

# پراش باریکه گاوسی از توری فازی شعاعی سینوسی و اثر پارامترهای ورودی بر باریکه‌های فرش شعاعی

سودابه عباسی<sup>۱</sup>، سید علی هاشمی‌زاده عقدا<sup>۲</sup>، و علی محمد خزایی<sup>۳\*</sup>

۱. دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور مرکز تهران شرق، تهران

۲. دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور مرکز تهران شرق، تهران

۳. دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد

پست الکترونیکی: khazaei.am@lu.ac.ir

## چکیده

در این پژوهش پراش یک باریکه گاوسی از توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی به صورت نظری بررسی شده است. نتایج به روشنی نشان می‌دهد که این فرایند به شکل‌گیری باریکه‌های فرش شعاعی منجر می‌گردد. کاهش شعاع کمر باریکه ورودی روی شدت لوب اصلی اثرگذار است در عین حال موجب محدود شدن شدت پرها در راستای شعاع می‌گردد. همچنین طول موج باریکه تابیده شده به توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی نقش تعیین‌کننده‌ای در الگوی پراش دارد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد تغییرات ناقص بسیار کوچک در تعداد پره‌های توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی موجب تغییرات در آرایش فاز می‌شود، اما الگوی شدت تقریباً پایدار باقی می‌ماند. خاصیت خودترمیمی در باریکه‌های فرش شعاعی به تعداد پره‌های توری و اندازه قطاع مسدودکننده وابسته است به طوری که با افزایش تعداد پرها و کاهش اندازه قطاع، فاصله خودترمیمی باریکه کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: توری شعاعی، باریکه گاوسی، باریکه فرش شعاعی، دامنه فاز، خودترمیمی.

## ۱. مقدمه

در رژیم میدان نزدیک، برهم‌نهی مرتبه‌های مختلف پراش به تشکیل خودتصاویر و زیرتصاویر ساختار توری در فواصل معینی از مسیر انتشار منجر می‌شود. این پدیده با عنوان اثر تالبوت شناخته می‌شود [۱]. الگوی شدت حاصل بر روی صفحه‌ای که شامل محور انتشار و بردار توری است، فرش تالبوت نام دارد [۲].

زمانی که یک باریکه از توری عبور می‌کند یا از آن بازتاب می‌یابد، دامنه و/یا فاز جبهه موج فرودی مدوله می‌شود. براین اساس، توری‌ها به انواع دامنه‌ای یا فازی و نیز عبوری یا بازتابی تقسیم می‌شوند. نمایه فضایی این مدولاسیون می‌تواند

ساختارهای تناوبی که عموماً با عنوان توری‌های پراش شناخته می‌شوند، از مهم‌ترین المان‌های اپتیکی برای کنترل انتشار نور هستند. یک توری پراش متعارف، مانند توری خطی، دارای ساختاری تناوبی در دستگاه مختصات دکارتی است. هنگامی که یک موج تخت از چنین توری‌ای پراش می‌یابد، باریکه فرودی به چندین باریکه پراشیده تقسیم می‌شود که در جهات مختلف منتشر می‌گردند. این باریکه‌ها مرتبه‌های پراش نامیده می‌شوند و شدت آن‌ها با افزایش مرتبه کاهش می‌یابد.

شکل‌های مختلفی از جمله سینوسی، باینری، مثلثی یا دندانه‌اره‌ای داشته باشد [۳]. پراش نور از توری‌های یک‌بعدی متعارف با خطوط موازی، کاربردهای گسترده‌ای در اپتیک دارد که طیف‌سنجی مهم‌ترین کاربرد کلاسیک آن‌ها محسوب می‌شود [۴،۵]. افزون بر این، توری‌های پراش در حوزه‌هایی نظیر اندازه‌گیری جابه‌جایی [۶،۷]، مطالعه تالطم [۸]، حسگری جبهه موج [۹،۱۰] و تعیین ویژگی‌های باریکه‌های گردابی [۱۱-۱۳] به کار گرفته شده‌اند.

نوع خاصی از توری‌ها، توری‌های شعاعی هستند که دارای ساختاری تناوبی در راستای زاویه‌ای و در مختصات قطبی‌اند. برخلاف توری‌های متعارف، در پراش از توری‌های شعاعی مرتبه‌های پراش مجزا وجود ندارد. باین‌حال، پراش موج تخت یا گاوسی از این توری‌ها پدیده‌های متنوع و قابل توجهی را آشکار می‌سازد. به‌عنوان مثال، هنگامی که یک توری دامنه‌ای شعاعی با یک باریکه همدوس روشن شود، فرش تالبوت بر روی صفحه‌های عرضی تشکیل می‌شود [۱۴]. این در حالی است که در توری‌های خطی، فرش تالبوت متعارف در اثر تابش موج تخت و بر روی صفحه‌های طولی ظاهر می‌شود [۱۵،۱۶].

همچنین گزارش شده است که مرز میان نواحی سایه هندسی و نواحی پراش، چه در میدان نزدیک و چه در میدان دور، دارای انحنا مشخصی است. در پراش یک موج تخت از توری دامنه‌ای شعاعی، ناحیه مرکزی الگوی پراش در اطراف محور نوری به‌صورت یک ناحیه تاریک ظاهر می‌شود. این ناحیه متناظر با الگوی پراش میدان دور است [۱۴].

پراش از ساختارهای شعاعی می‌تواند به تولید خانواده‌ای گسترده از باریکه‌های نوری منجر شود. برای نمونه، پراش موج تخت از این ساختارها باریکه‌های شبه‌بسل نیم‌صحیح ترکیبی را ایجاد می‌کند که از جمله جواب‌های پیرامحوری معادله هلمهولتز به شمار می‌آیند [۱۷]. همچنین نشان داده شده است که پراش موج تخت از توری‌های فازی شعاعی، به تولید باریکه‌های فرش شعاعی می‌انجامد [۱۴،۱۸]. مطالعاتی نیز در مورد پراش نور چندرنگ از توری‌های دامنه‌ای شعاعی انجام شده است [۱۹].

از کاربردهای این توری‌ها می‌توان به تله‌گذاری هم‌زمان چند ذره [۲۰]، انتشار باریکه‌های فرش شعاعی در محیط‌های متلاطم [۲۱،۲۲] و انتقال اطلاعات با استفاده از این باریکه‌ها [۲۳،۲۴] اشاره کرد. افزون بر این، پراش باریکه‌های گردابی از توری‌های دامنه‌ای شعاعی با نمایه سینوسی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این مطالعات نشان می‌دهد که الگوی پراش قادر به آشکارسازی بار توپولوژیکی و جهت پیچش باریکه فرودی است [۲۵]. همچنین رفتار باریکه‌های فرش شعاعی، پراش موج تخت از توری‌های شعاعی با تعداد کسری از پره‌ها، تولید الگوهای فرش شعاعی بیضوی و باریکه‌های شبکه‌ای فرش شعاعی غیرپراشده بررسی شده است [۲۶-۲۹].

دکتر رسولی و همکاران، پراش یک باریکه گاوسی از توری‌های دامنه‌ای شعاعی با نمایه سینوسی را مطالعه کرده‌اند [۳۰]. در این پژوهش نظری، پراش باریکه گاوسی از توری‌های فازی شعاعی با نمایه سینوسی بررسی می‌شود. در این تحلیل، باریکه گاوسی به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده است که نمایه شدت آن در طول انتشار ثابت بوده و واگرایی نداشته باشد. پراش باریکه گاوسی از ساختارهای دوبعدی قابل تفکیک در مختصات قطبی به‌صورت نظری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، تحلیل دقیقی از الگوهای پراش با استفاده از انتگرال فرنل-کیرشلف برای توری‌های فازی شعاعی با نمایه سینوسی ارائه می‌شود. علاوه بر این، اثر تغییر شعاع کمر باریکه گاوسی، طول موج باریکه فرودی و همچنین پراش از توری‌های شعاعی با تعداد پره‌های کسری بررسی خواهد شد. در ادامه، تغییرات دامنه فاز، ناهنجاری‌های فازی باریکه‌های فرش شعاعی و خاصیت خودترمیمی این باریکه‌ها نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## ۲. تحلیل پراش باریکه گاوسی از توری فازی

### شعاعی با نمایه سینوسی

تابع عبور از یک توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی که دارای ساختار دوبعدی است را دستگاه مختصات قطبی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$T(r', \theta') = e^{i\gamma \cos(m\theta')} \quad (1)$$

$$U(r, \theta, z) = h_0 e^{i\alpha r^\gamma} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i\gamma \cos(m\theta')} e^{-\left(\frac{1}{\omega_0^\gamma} - i\alpha\right) r'^\gamma} e^{-i\alpha r r' \cos(\theta' - \theta)} r' dr' d\theta' \quad (6)$$

با استفاده از بسط ژاکوبی - آنژه [۳۳]:

$$e^{\pm i x \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\pm i)^n J_n(x) e^{\pm i n \theta} \quad (7)$$

که در اینجا  $J_n$  تابع بسل نوع اول مرتبه  $n$  ام است و تبدیل هنکل مرتبه  $n$  ام تابع  $f(r')$  که بصورت زیر می باشد:

$$H\{f(r')\} = \gamma \pi \int_0^\infty f(r') J_n(\gamma \rho r') r' dr' \quad (8)$$

در اینجا  $\rho = \frac{r}{\lambda z}$  است. دامنه مختلط میدان نوری را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U(r, \theta, z) = h_0 e^{i\alpha r^\gamma} J_0(\gamma) H_0\left(e^{-\left(\frac{1}{\omega_0^\gamma} - i\alpha\right) r'^\gamma}\right) + \sum_{l=1}^{l=+\infty} i^{l(1-m)} J_l(\gamma) H_{ml}\left(e^{-\left(\frac{1}{\omega_0^\gamma} - i\alpha\right) r'^\gamma}\right) \cos(ml\theta) \quad (9)$$

در اینجا از روابط

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (10)$$

و

$$H_{-n}\{f(r')\} = (-1)^n H_n\{f(r')\} \quad (11)$$

بهره گرفته ایم.

با کمک تبدیلات هنکل زیر [۳۴]:

$$H_0\{e^{-x r'^\gamma}\} = \frac{\pi}{x} e^{-\left(\frac{\rho^\gamma}{\lambda x}\right)} \quad (12)$$

و

$$H_n\{e^{-x r'^\gamma}\} = \frac{\rho}{\lambda x} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{\gamma}{2}} e^{-\left(\frac{\rho^\gamma}{\lambda x}\right)} \left[ I_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\frac{\rho^\gamma}{\lambda x}\right) - I_{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\frac{\rho^\gamma}{\lambda x}\right) \right] \quad (13)$$

در اینجا  $I_n$  تابع بسل اصلاح شده نوع اول مرتبه  $n$  ام است.

همچنین با استفاده از تغییر متغیرهای

$$\beta = \frac{1}{\omega_0^\gamma} - i\alpha \quad (14)$$

$$b = \gamma \alpha r$$

می توان دامنه مختلط میدان نوری را در هر فاصله معین

به صورت زیر به دست آورد:

$r'$ ,  $\theta'$ ,  $\gamma$  و  $m$  به ترتیب مختصه شعاعی، زاویه سمتی، دامنه تغییرات فاز و تعداد پره های توری فازی شعاعی می باشد.

دامنه مختلط میدان نور فرودی یک باریکه گاوسی که شعاع کمر باریکه آن  $w_0$  است را می توان در  $z = z$  به صورت زیر نشان داد:

$$U_G(r', z) = \left(\frac{w_0}{w(z)}\right) e^{-\frac{r'^2}{w(z)}} e^{i\left[kz + \frac{kr'^2}{2R(z)} - \zeta(z)\right]} \quad (2)$$

که

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (3)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

در اینجا  $w(z)$  شعاع باریکه،  $R(z)$  شعاع انحنای جبهه موج،  $\zeta(z)$  جابجایی فاز گوی و  $z_0$  حد رایلی نامیده می شوند.

در فاصله  $z = 0$  دامنه مختلط میدان نور فرودی یک باریکه گاوسی را می توان به صورت زیر نوشت [۳۱]:

$$U_G(r', z=0) = e^{-\frac{r'^2}{w_0^2}} \quad (4)$$

یعنی شکل باریکه یکنواخت و بدون واگرایی انتشار می یابد.

فرض کنیم  $T(r', \theta')$ ,  $U_G(r', z=0)$  و  $U(r, \theta, z)$  به ترتیب

تابع دامنه عبور از توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی، دامنه

مختلط میدان نور فرودی یک باریکه گاوسی و دامنه مختلط

میدان نوری به ترتیب در  $z = z$  و  $z = 0$  باشند، در تقریب

فرنل در دستگاه مختصات قطبی داریم [۳۲]:

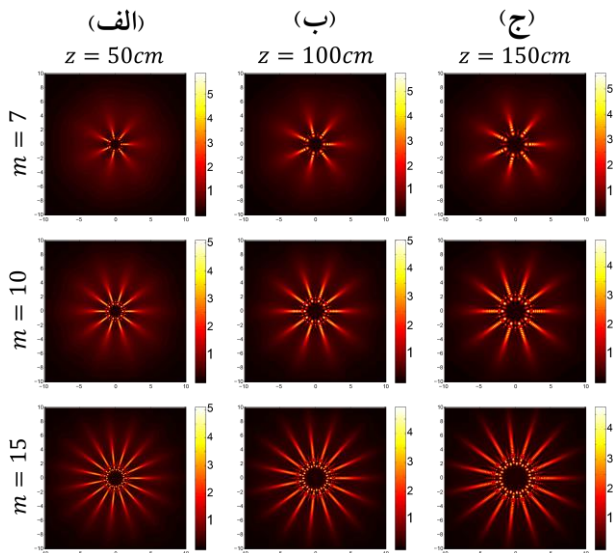
$$U(r, \theta, z) = h_0 e^{i\alpha r^\gamma} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_G(r', z=0) T(r', \theta') \times e^{i\alpha r'^\gamma} e^{-i\alpha r r' \cos(\theta' - \theta)} r' dr' d\theta' \quad (5)$$

که  $r$  مختصه شعاعی،  $\theta$  زاویه سمتی،  $\alpha = \frac{\pi}{\lambda z}$  عدد موج،

$h_0 = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}$ ،  $\lambda$  طول موج نور در خلأ و  $k$  عدد موج هستند. با

جایگذاری معادله (۱) در معادله (۵)، دامنه مختلط میدان نوری

در  $z = z$  داریم:



شکل ۱. الگوهای پراش تحلیلی از توری‌های فازی شعاعی با نمایه سینوسی و تعداد پره‌های  $m=7$ ،  $m=10$  و  $m=15$  در فواصل  $z=50\text{cm}$ ،  $z=100\text{cm}$  و  $z=150\text{cm}$  از توری‌ها را نشان می‌دهد.  $w_0=1.0\text{mm}$  کمر باریکه‌ی باریکه گوسی فرودی  $1.0\text{mm}$  است. اندازه واقعی همه الگوها  $2.0\text{mm} \times 2.0\text{mm}$  است.

دامنه مدولاسیون فاز توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

## ۲.۱. اثر پراش کمر باریکه‌ی گوسی بر توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی

موج تخت دارای دامنه و فازی یکنواخت است که به توری فازی شعاعی تابیده می‌شود. در نتیجه، کل سطح توری به صورت یکنواخت روشن شده و تمامی نواحی آن به طور یکسان در فرایند پراش مشارکت می‌کنند. الگوی پراش حاصل کاملاً متقارن و شفاف است و بیشترین انطباق را با پیش‌بینی‌های تئوری ایده‌آل نشان می‌دهد [۱۸].

در مقابل، باریکه گوسی دارای دامنه‌ای است که در مرکز بیشینه بوده و به صورت نمایی به سمت لبه‌ها کاهش می‌یابد؛ بنابراین، با افزایش فاصله از مرکز توری، سهم این نواحی در پراش کاهش می‌یابد. این ویژگی موجب تضعیف اثر پراش در نواحی دور از مرکز شده و الگوی پراش حاصل، نسبت به حالت موج تخت، نرم‌تر و کم‌وضوح‌تر خواهد بود. با این حال، لوب‌های مرکزی (حلقه‌های اول پر شدت مرکزی)، توزیع شدت برجسته‌تری دارند. به بیان دیگر، توزیع شدت در الگوی پراش

$$U(r, \theta, z) = \pi h_0 e^{iar^2} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\beta} J_0(\gamma) e^{-\frac{b^2}{4\beta}} + \\ & \sum_{l=1}^{l=+\infty} \frac{\sqrt{\pi} b}{\beta^2} i^{l(1-m)} J_l(\gamma) \cos(ml\theta) e^{-\frac{b^2}{4\beta}} \\ & [I_{ml-1}(\frac{b^2}{4\beta}) - I_{ml+1}(\frac{b^2}{4\beta})] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

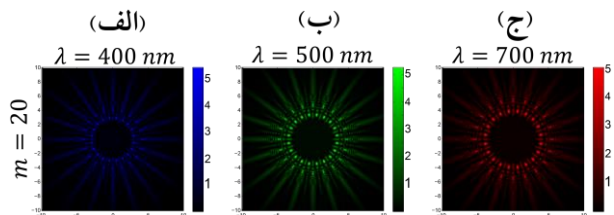
برای یک توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی، با استفاده از معادله (۱۵) الگوی پراش در یک  $z$  معین را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I(r, \theta, z) = U(r, \theta, z) U^*(r, \theta, z) \quad (16)$$

که در آن \* نشان دهنده یک مزدوج مختلط است. در شکل ۱ الگوی پراش محاسبه شده از سه توری فازی شعاعی سینوسی با تعداد پره‌های  $m=7$ ،  $m=10$  و  $m=15$  نشان داده شده است. دامنه مدولاسیون فاز برای همه توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

از شکل ۱ می‌توان نتیجه گرفت که توزیع میدان نور در حین انتشار، شکل ثابتی دارد. به دلیل تقارن شعاعی و همچنین زیبایی و پیچیدگی ساختاری الگوهای شدت حاصل، باریکه‌های نور پراش‌یافته از توری‌های فازی شعاعی با عنوان «باریکه‌های فرش شعاعی» شناخته می‌شوند [۱۸].

تفاوت اصلی این باریکه‌ها با باریکه‌های فرش شعاعی مرجع ارائه شده در مرجع [۱۸] در رفتار شدت پره‌ها در راستای شعاع است. در این الگوها، شدت پره‌ها با افزایش فاصله از مرکز الگوی پراش به طور محسوس کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که در نواحی کناری الگو افت شدت قابل توجهی مشاهده می‌شود. همچنین، همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، الگوی شدت پراش نسبت به محور  $x$  تقارن دارد.



شکل ۳. الگوهای پراش تحلیلی از توری فازی شعاعی ۲۰ پره با نمایه سینوسی برای طول موج‌های  $400\text{nm}$ ،  $500\text{nm}$  و  $700\text{nm}$  در فاصله  $z = 300\text{cm}$  از توری را نشان می‌دهد.  $w_0 = 10\text{mm}$  کمر باریکه گاوسی فرودی  $10\text{mm}$  است. اندازه واقعی همه الگوها  $20\text{mm} \times 20\text{mm}$  است. دامنه مدولاسیون فاز توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

### ۳.۲. پراش باریکه گاوسی از توری فازی شعاعی

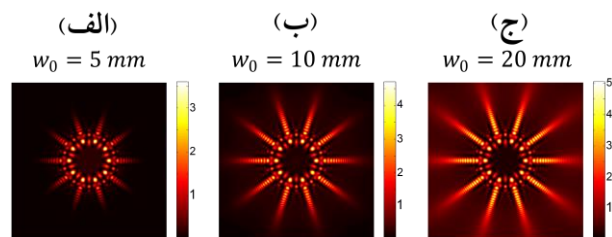
#### کسری با نمایه سینوسی

اگر تعداد پره‌های توری شعاعی در یک دوره کامل عدد صحیح نباشد، آن را توری شعاعی کسری می‌نامیم. در توری فازی شعاعی کسری، تقارن در راستای سمتی وجود ندارد.

شکل ۴ الگوی پراش و فاز محاسبه‌شده از توری‌های فازی شعاعی سینوسی با تعداد پره‌های ۱۰.۱ تا ۱۱ (با گام‌های ۰.۱) را نشان می‌دهد. در ستون‌های اول و سوم، هنگامی که  $m$  عدد صحیح است، الگوهای پراش متقارن و یکنواخت هستند و تعداد لوب‌ها برابر با  $2m$  است. وقتی  $m$  کسری می‌شود، الگو اندکی نامتقارن شده و نقاط روشن روی حلقه‌ها جابه‌جا می‌شوند. هرچه فاصله  $m$  از عدد صحیح بیشتر باشد، این اعوجاج افزایش می‌یابد.

ستون‌های دوم و چهارم، فاز محاسبه‌شده از توری‌های فازی شعاعی با نمایه سینوسی را نمایش می‌دهند. برای حالتی که  $m$  عدد صحیح است، مرزهای خطوط تغییر فاز دقیقاً بین لوب‌های شدت قرار می‌گیرند و تقارن سمتی کامل دارند. برای حالتی که  $m$  کسری است، مرزهای تغییر فاز اندکی چرخش یافته و نسبت به الگوی شدت جابه‌جا می‌شوند. این تغییر کوچک باعث می‌شود که الگو در طول انتشار، ویژگی‌های متفاوتی داشته باشد.

این الگوها نشان می‌دهند که حتی تغییرات بسیار کوچک در  $m$



شکل ۲. الگوهای پراش تحلیلی از توری فازی شعاعی ۱۰ پره با نمایه سینوسی، با کمر باریکه‌های  $w_0 = 5\text{mm}$ ،  $w_0 = 10\text{mm}$  و  $w_0 = 15\text{mm}$  در فاصله  $z = 300\text{cm}$  از توری را نشان می‌دهد. اندازه واقعی همه الگوها  $20\text{mm} \times 20\text{mm}$  است. دامنه مدولاسیون فاز توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

ناشی از توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی، به طور مستقیم تحت تأثیر کمر باریکه گاوسی قرار دارد.

شکل ۲ اثر پراش باریکه گاوسی بر توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی را که کمر باریکه‌های گاوسی  $w_0 = 5\text{mm}$ ،  $w_0 = 10\text{mm}$  و  $w_0 = 15\text{mm}$  را نشان می‌دهد.

### ۲.۲. اثر طول موج باریکه گاوسی پراش یافته از توری

#### فازی شعاعی با نمایه سینوسی

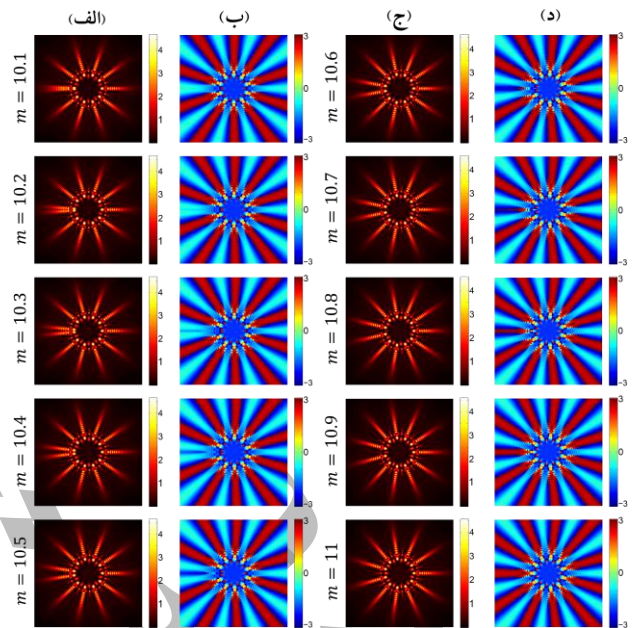
طول موج یک باریکه گاوسی تأثیر قابل توجهی بر الگوی پراش آن از توری دارد. مطابق معادله (۱۵)، دامنه مختلط میدان نوری به طور مستقیم به طول موج وابسته است. در نتیجه، برای طول موج‌های کوتاه‌تر، الگوی پراش کوچک‌تر و برای طول موج‌های بلندتر، الگوی پراش بزرگ‌تر می‌شود. با افزایش طول موج، وضوح حلقه‌ها اندکی کاهش می‌یابد؛ زیرا برای طول موج بلندتر، تعداد نوسانات فضایی کمتر است و پراش نرم‌تر مشاهده می‌شود. شکل ۳ الگوی پراش محاسبه شده از توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی ۲۰ پره برای طول موج‌های  $400\text{nm}$ ،  $500\text{nm}$  و  $700\text{nm}$  را نشان می‌دهد.

تغییر در الگوی تداخلی زاویه‌ای منجر می‌گردد.

شکل ۵ اثر تغییر دامنه فاز بر الگوی پراش را نشان می‌دهد. در ادامه، رفتار الگوها برای مقادیر مختلف دامنه فاز بررسی می‌شود. برای دامنه فاز  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ، بیشترین انرژی در حلقه‌های داخلی متمرکز است و شدت در ناحیه‌ی پراش میدان دور مقدار کمی دارد. با افزایش دامنه فاز به  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ، پره‌ها واضح‌تر شده و تعداد آن‌ها نسبت به حالت قبل افزایش می‌یابد. در این حالت، حلقه‌ها فشرده‌تر بوده و شدت بیشینه نیز افزایش می‌یابد، در حالی که شدت در ناحیه‌ی میدان دور همچنان کم است. برای  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$  حلقه‌ها بسیار ریزتر و متراکم‌تر شده‌اند، به طوری که یک بافت فضایی فرکانس بالا ایجاد شده است. تعداد لوب‌ها در حلقه مرکزی ۲ برابر تعداد پره‌های توری است. در ناحیه پراش میدان دور شدت به سمت صفر میل می‌کند. برای حالتی مقدار دامنه فاز  $\gamma = \pi$  ساختار حلقه‌های بیشترین تراکم را دارد و پره‌های شعاعی نیز در فواصل نزدیک‌تری نسبت به یکدیگر دیده می‌شوند.

یکی از پدیده‌های مهم در باریکه‌های فرش شعاعی، بروز ناهنجاری‌های فازی در فرایند تولید و انتشار این باریکه‌هاست. ناهنجاری‌های فازی به بی‌نظمی‌ها یا تغییرات غیرخطی در توزیع فاز اطلاق می‌شوند که می‌توانند باعث تغییرات ناخواسته در شدت، جابه‌جایی خطوط تداخلی، یا ناپایداری الگوی باریکه شوند.

در این بخش، ناهنجاری‌های فازی باریکه‌های فرش شعاعی بررسی می‌شوند. در شکل ۶، کمیت  $arg[U(r, \theta, z)]$  از معادله (۱۵) برای یک توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی و  $20^\circ$  پره، در مقادیر مختلف دامنه‌ی فاز  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$  و  $\gamma = \pi$  در فاصله‌ی ۳ متری از توری و بر حسب  $\theta$  نمایش داده شده است. این کمیت برای دو مقدار ثابت  $r = 3.5mm$  و  $r = 4.9mm$  رسم شده و نمایه‌های شدت متناظر نیز به‌منظور نمایش واضح‌تر مکان پرش‌های فاز ارائه شده‌اند.



شکل ۴. ستون‌های اول و سوم الگوهای پراش و ستون‌های دوم و چهارم فاز محاسبه شده از توری‌های فازی شعاعی با تعداد پره‌های ۱، ۲، ۱۰، ۱۰۰، با نمایه سینوسی در فاصله  $z = 30cm$  از توری‌ها را نشان می‌دهد.  $w_0 = 10mm$  کمر باریکه گاوسی فرودی  $10mm$  است. اندازه واقعی همه الگوها  $20mm \times 20mm$  است. دامنه مدولاسیون فاز توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

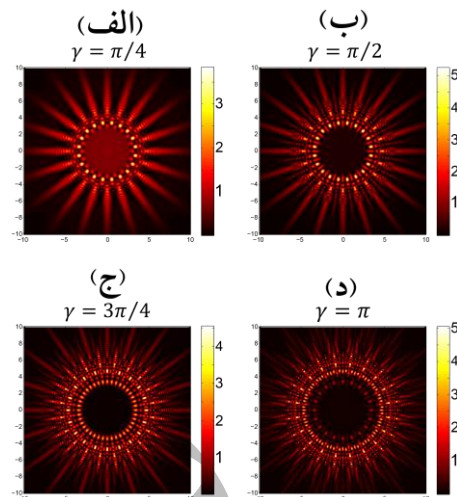
به اندازه ۰.۱ می‌تواند موجب تغییرات قابل توجه در آرایش فاز شود، در حالی که الگوی شدت تا حد زیادی پایدار باقی می‌ماند. این تفاوت رفتاری بین شدت و فاز را می‌توان برای کنترل دقیق جبهه موج و طراحی عناصر اپتیکی با قابلیت تنظیم پیوسته به‌کار برد.

### ۳. اثرات تغییرات دامنه فاز بر باریکه‌های فرش شعاعی

ویژگی‌های فیزیکی توری‌های فازی شعاعی را می‌توان به‌سادگی تنظیم کرد تا باریکه‌های فرش شعاعی متنوعی تولید شوند. مطابق معادله (۱۵)، یکی از پارامترهای مؤثر در تعیین شکل الگوی پراش باریکه گاوسی از توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی، دامنه فاز است. دامنه فاز در عمل یک اختلاف راه اپتیکی ایجاد می‌کند و موجب تقدم یا تأخر فاز می‌شود. این تغییر فاز به جابه‌جایی و تغییر پهنای قله‌های پراش و نیز به

نسبت به  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  است. تغییرات فاز ناگهانی تر و تقریباً مربعی شکل است (شبیه به یک مدولاسیون باینری). این حالت یادآور یک شبکه فازی مربعی است. برای  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$  شدت ترکیبی از رفتارهای قبلی است و نوسانات بیشتر و ریزساختارهای تیزتر است. فاز بین حالت پله‌ای و موجی در نوسان است. این حالت گذار بین  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  و  $\gamma = \pi$  است و به همین دلیل هم شدت و هم فاز شکل پیچیده‌تری به خود گرفته‌اند. برای  $\gamma = \pi$  دامنه نمایه شدت کاهش قابل توجه دارد اما تعداد ماکزیمم‌ها زیادتر است. فاز جهش‌های ناگهانی و پله‌ای با شکل تقریباً تیز و پرشی دارد. این حالت بیشترین شدت تغییر فاز را نشان می‌دهد و تقریباً به یک مدولاسیون پله‌ای کامل می‌رسد. این الگوها به ترتیب در دامنه‌های فاز  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  و  $\gamma = \pi$  دارای شدت بیشتری هستند.

این الگوها نشان‌دهنده اثر مدولاسیون فاز و شدت در مختصات زاویه‌ای هستند. پارامتر  $\gamma$  در اینجا نقش اختلاف فاز را دارد که تعیین می‌کند شدت و فاز خروجی چگونه توزیع شوند. با تغییر  $\gamma$  الگوها از حالت موجی ملایم تا حالت مربعی تیز تغییر می‌کنند که در عمل می‌تواند برای طراحی شبکه‌های پراش، هولوگرافی و کنترل مدهای باریکه استفاده شود.

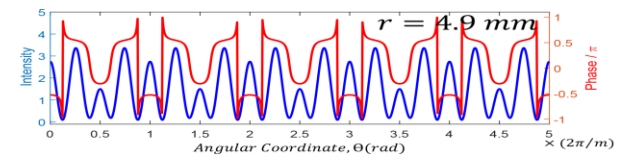
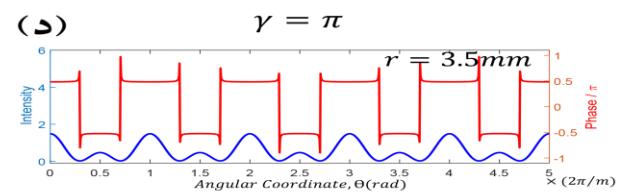
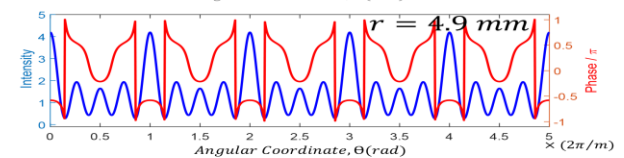
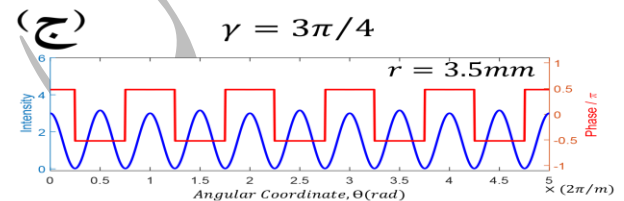
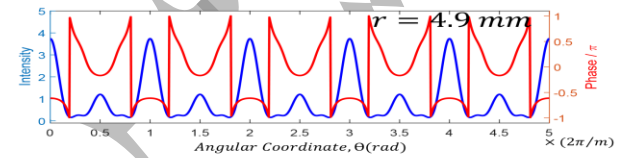
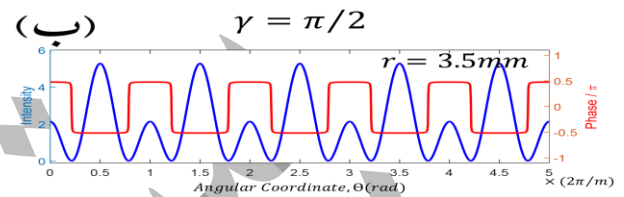
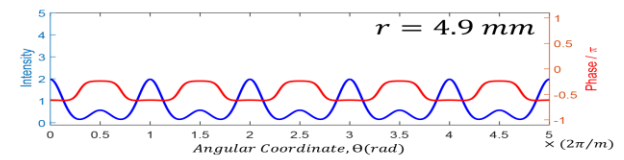
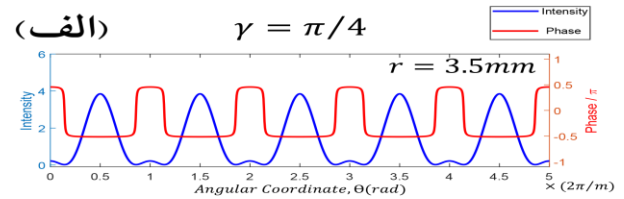
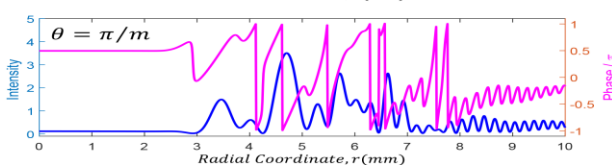
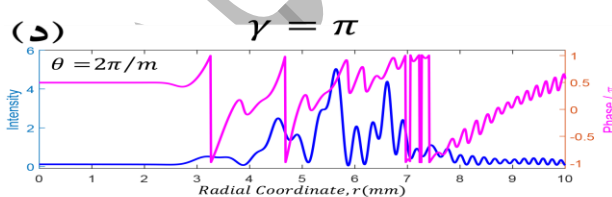
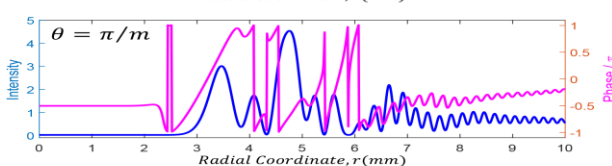
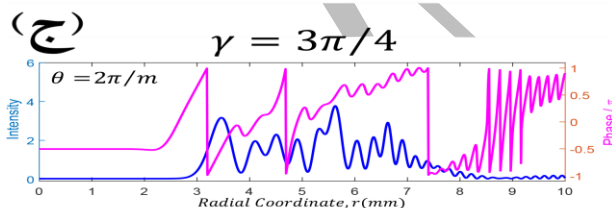
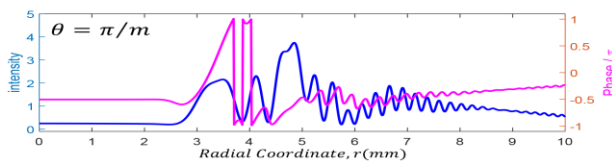
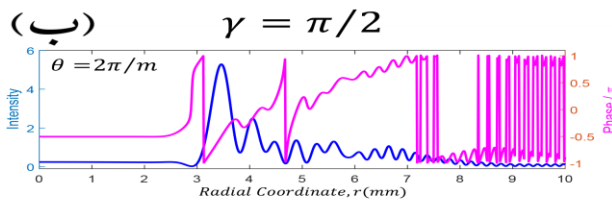
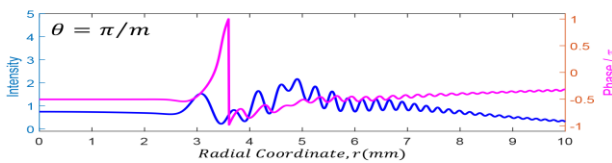
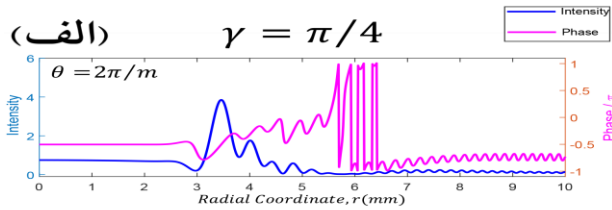


شکل ۵. الگوهای پراش از توری‌های فازی شعاعی ۲۰ پره با نمایه سینوسی با تغییرات دامنه فاز  $\gamma = \pi/4$ ،  $\gamma = \pi/2$ ،  $\gamma = 3\pi/4$  و  $\gamma = \pi$  در فاصله  $z = 30\text{ cm}$  از توری‌ها را نشان می‌دهد.  $w_0 = 10\text{ mm}$  کمر باریکه گاوسی فرودی  $10\text{ mm}$  است. اندازه واقعی همه الگوها  $20\text{ mm} \times 20\text{ mm}$  است.

همان‌گونه که از نمودارهای شکل ۶ مشخص است، در امتداد یک مسیر سمتی با  $r$  ثابت، پراش‌های فاز بین تمام لوب‌های شدت مجاور مشاهده می‌شود.

در سطر اول شکل‌های ۶ (الف)، (ب)، (ج) و (د) نمایه‌های شدت و فاز توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی در امتداد سمتی  $r = 3.5\text{ cm}$  را بررسی می‌کنیم. الگوی شدت حلقه اول این شکل‌ها در دامنه‌های فاز  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$  و  $\gamma = \pi$  به ترتیب دارای شدت بیشتری هستند. نمایه فاز این الگوها به یک نمایه شبه‌باینری تبدیل می‌شود. برای هر شعاع از توری فازی شعاعی، نمایه‌های فاز در راستای سمتی با تغییر دامنه‌ی فاز به‌طور قابل توجهی تغییر می‌شوند.

همچنین در سطر دوم شکل‌های ۶ (الف)، (ب)، (ج) و (د) نمایه‌های شدت و فاز توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی در امتداد سمتی  $r = 4.9\text{ cm}$  را بررسی می‌کنیم. برای حالتی که مقدار دامنه فاز  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  است الگوی شدت رفتار موج‌مانند با قله‌های منظم دارد و تغییرات فاز به‌صورت پله‌ای اما نرم ظاهر می‌شوند. این حالت بیانگر تعادل نسبی میان مدولاسیون شدت و فاز است. برای  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  شدت نوسانات تیزتر و پرکنتر است



شکل ۷. سطرهای اول و دوم (الف)، (ب)، (ج) و (د) نمایه‌های شدت و فاز را به ترتیب در امتداد دو مسیر شعاعی مختلف  $\theta = \pi/m$  و  $\theta = 2\pi/m$  برای یک توری فازی با نمایه سینوسی  $\gamma = \pi$  و  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  در فاصله از  $z = 30\text{cm}$  از توری را نشان می‌دهند.

شکل ۶. سطرهای اول و دوم (الف)، (ب)، (ج) و (د) نمایه‌های شدت و فاز را به ترتیب در امتداد دو مسیر سمتی مختلف  $r = 4.9\text{mm}$  و  $r = 3.5\text{mm}$  برای یک توری فازی با نمایه سینوسی  $\gamma = \pi$  و  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  در فاصله  $z = 30\text{cm}$  از توری را نشان می‌دهند.

شکل ۷ برای مقادیر یکسان با شکل ۶، نمایه‌های فاز و شدت در امتداد دو جهت شعاعی با مقادیر مختلف  $\theta = \frac{2\pi}{m}$  و  $\theta = \frac{\pi}{m}$  نمایش داده شده‌اند.

شدت در ناحیه مرکزی ( $r \approx 2mm$ ) کم است و به تدریج با افزایش  $r$  شروع به نوسان می‌کند. نوسانات شدت شبیه الگوهای پراش و تداخل هستند که ناشی از نمایه شعاعی فاز هستند.

با تغییر  $\gamma$  و  $\theta$  موقعیت پیک‌های شدت و تعداد نوسانات تغییر می‌کند. هرچه  $\gamma$  بزرگ‌تر می‌شود الگوی شدت پیچیده‌تر و پرنوسان‌تر می‌شود. این یعنی تغییر فاز کلی موجب تغییر جدی در شدت می‌شود. تغییرات  $\gamma$  باعث جابه‌جایی نقاط پرش فاز و تغییر هم‌زمان شدت متناظر می‌شود. فاز در مرکز تقریباً ثابت است، اما با افزایش شعاع جهش‌های ناگهانی دارد. این جهش‌ها همان پرش‌های فاز هستند که در ساختارهای فازی مدور به دلیل ماهیت سینوسی یا پله‌ای پدیدار می‌شوند. در  $\theta = \frac{2\pi}{m}$  تعداد جهش‌های فاز بیشتر است و در  $\theta = \frac{\pi}{m}$  تعداد جهش‌ها کمتر اما با دامنه بزرگ‌تر است.

سطر اول شکل‌های ۷ (الف)، (ب)، (ج) و (د) که در امتداد جهت شعاعی  $\theta = \frac{2\pi}{m}$ ، الگوی شدت برای مقادیر مختلف دامنه فاز را نشان می‌دهد. الگوی مکان اولین قله پر شدت به ترتیب در دامنه‌های فاز  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$  و  $\gamma = \pi$  هستند. الگوهای شدت نشان می‌دهند که پیک قله‌ها برای مقادیر مختلف دامنه فاز جابجا می‌شود.

سطر دوم شکل‌های ۷ (الف)، (ب)، (ج) و (د) که در امتداد جهت شعاعی  $\theta = \frac{\pi}{m}$  را نشان می‌دهند. این الگوها به ترتیب در دامنه‌های فاز  $\gamma = \frac{2\pi}{4}$ ،  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma = \pi$  و  $\gamma = \frac{3\pi}{4}$  دارای قله شدت بالاتری هستند.

#### ۴. خاصیت خودترمیمی باریکه فرس شعاعی

در اینجا، ما ویژگی‌های خودترمیمی باریکه‌های فرس شعاعی تولید شده را از طریق شبیه‌سازی عددی بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این نوع باریکه تمایل دارد در طول انتشار، علی‌رغم شدت اغتشاشات اعمال شده، مجدداً تشکیل شوند. این رفتار را با مسدودکردن یک بخش قطاعی از باریکه‌ها بررسی می‌کنیم. هر نقطه روی باریکه با شعاع  $r_0$  در فاصله انتشار  $z_0$  را در نظر بگیریم با یک نقطه دیگر روی باریکه با شعاع  $r(z')$  در فاصله  $z'$  با رابطه زیر این نقاط با هم مرتبط هستند [۱۸]:

$$r(z') = r_0 \sqrt{\frac{z'}{z_0}} \quad (17)$$

خودترمیمی یعنی وقتی یک لوب یا بخش از باریکه فرس شعاعی در فاصله  $z_0$  مسدود شود، لوب‌های مجاور سالم طبق رابطه (۱۷) به تکامل خود ادامه می‌دهند. از آنجا که الگوی عرضی شکل-ناورد (غیرپراشده) است و لوب‌ها یا بخش‌ها به سمت بیرون با  $r \propto \sqrt{z'}$  شتاب می‌گیرند، منطقه مسدود شده به تدریج توسط انرژی جاری از لوب‌های یا بخش‌های مجاور پر می‌شود. بنابراین، فاصله خودترمیمی را می‌توان به عنوان طول انتشار  $z_0 - z'$  تخمین زد که در آن مسیرهای جابجا شده لوب‌های یا بخش‌های مجاور همپوشانی کرده و منطقه مسدود شده را پر می‌کنند. بنابراین رابطه حاکم بر فاصله خودترمیمی اساساً معادله (۱۷) است.

در ادامه یک تخمین ساده و فیزیکی برای فاصله خودترمیمی  $z_{selfhealing}$  ارائه می‌دهم. لوب‌های یا بخش‌های اصلی باریکه‌های فرس شعاعی در زوایای گسسته‌ی سمتی قرار دارند و  $N$  لوب (که لوب‌ها یک در میان پرشدت هستند) در اطراف دایره با فاصله زاویه‌ای  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$  وجود دارد. برای یک توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی  $N \approx 2m$  است. در صفحه انتشار  $z_0$  یک قطاع اصلی به طور کامل مسدود شده است. لوب‌های مجاور در  $\pm \frac{\Delta\theta}{2}$  قرار دارند و در مکان  $z_0$  و شعاع یکسان  $r_0$  را دارند.

در فاصله  $z'$ ، شعاع هر نقطه روی قطاع مجاور و موقعیت مسدودشده به ترتیب برابر  $r_{niegh}(z') = r_0 \sqrt{\frac{z'}{z_0}}$  و

$\gamma = \frac{\pi}{2}$  را نشان می‌دهد که یک قطاع به طول کمان  $\frac{\pi}{2}$  را به عنوان مانعی برای انتشار در فاصله  $z_0 = 100\text{cm}$  از این الگوها قرار دارد. سپس در فواصل مختلف بعد از مانع اثر خودترمیمی را الگوهای پراش شدت و فاز توری که را مشاهده کرده‌ایم. مطابق معادله (۲۳) در فاصله برابر  $z_0$  یعنی  $100\text{cm}$  از مانع لوب مرکزی الگوی شدت بازسازی می‌شود و در فواصل بعدی خودترمیمی الگوی پراش افزایش می‌یابد.

ستون اول (الف) شکل ۸ را می‌توان با ردیف سوم (الگوهای شدت شبیه‌سازی شده) و ردیف چهارم (الگوهای شدت تجربی) شکل ۹ (a) در مرجع [۱۸] مقایسه کرد. در این مرجع نشان داده شده است که توری فازی شعاعی سینوسی با  $30^\circ$  پره، پس از عبور از مانع، فرایند خودبازسازی را آغاز می‌کند. نتایج به‌دست آمده در این مقاله با الگوی ارائه شده در شکل ۹ (a) مرجع [۱۸] تطابق کامل دارد.

فاصله و تری (عرضی) بین  $r_{blocked}(z') = r_0 \sqrt{\frac{z'}{z_0}}$  همسایه و نقطه مسدود شده در شعاع  $r(z)$  برابر است با:

$$S(z') = 2r(z') \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 2r_0 \sqrt{\frac{z'}{z_0}} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right). \quad (18)$$

تغییرات شعاعی به سمت بیرون همسایه (نسبت به مقدار آن در  $z_0$ ) برابر است با:

$$\Delta r(z') = r_{niegh}(z') - r_0 = r_0 \left( \sqrt{\frac{z'}{z_0}} - 1 \right). \quad (19)$$

برای اینکه نقاط همسایه بتواند نواحی مسدود شده را پر کند، جابجایی شعاعی اضافی آن به سمت بیرون در مقایسه با مقدار اولیه‌اش در  $z_0$  باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا بتواند به آن شکاف برسد. یک معیار هندسی ساده این است که  $\Delta r$  را قابل مقایسه با (نیمی از) تصویر وتر در جهت شعاعی در نظر بگیریم یعنی:

$$\Delta r(z') \geq r_0 \left( 1 - \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \right) \quad (20)$$

بنابراین، شرط ترمیم به صورت زیر است:

$$r_0 \left( \sqrt{\frac{z'}{z_0}} - 1 \right) \geq r_0 \left( 1 - \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \right) \quad (21)$$

با حذف  $r_0$  و خواهیم داشت:

$$z_{selfhealing} \approx z_0 \left[ 1 + \left( 1 - \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \right) \right]^2 \quad (22)$$

این یک تخمین هندسی ساده برای فاصله انتشار است که در آن مسیرهای شعاعی لوب‌های مجاور به اندازه کافی پیشرفت کرده‌اند تا از نظر هندسی با موقعیت مسدود شده همپوشانی داشته باشند.

برای زوایای کوچک  $\Delta\theta$  می‌توان  $\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx 1 - \frac{1}{8}\Delta\theta^2$  را بسط داد. بنابراین

$$z_{selfhealing} \approx z_0 \left[ 1 + \frac{\Delta\theta^2}{8} \right]^2 \approx z_0 \left[ 1 + \frac{\Delta\theta^2}{4} \right] \quad (23)$$

که برای این فاصله زاویه‌ای کوچک، فاصله خودترمیمی کم است.

شکل ۸ الگوهای پراش شدت و فاز شبیه‌سازی شده از یک توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی  $30^\circ$  پره با دامنه فاز

کلیدی این باریکه‌ها با نمونه مرجع [۱۸] مطابقت دارد. کاهش شعاع کمر باریکه گاوسی ورودی، شدت لوب اصلی را افزایش می‌دهد. درعین حال، شدت پرها در راستای شعاع محدود و به تدریج کاهش می‌یابد.

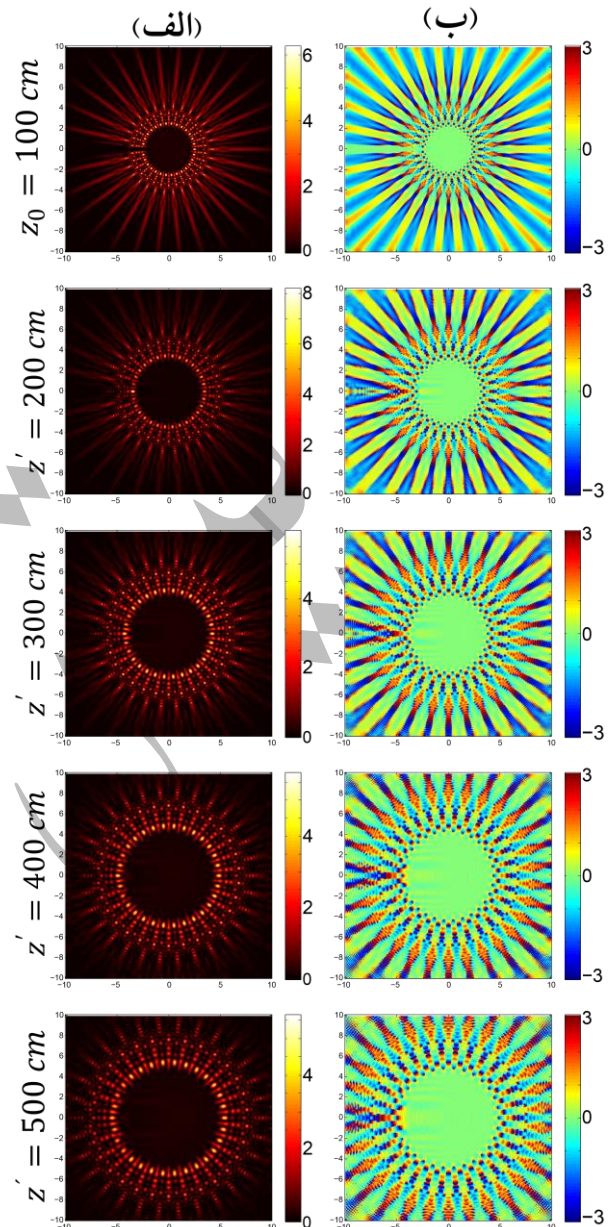
طول موج باریکه تابیده شده نقش اساسی در تعیین الگوی پراش دارد. با افزایش طول موج از مقادیر کوتاه به بلند، وضوح حلقه‌های پراش کاهش می‌یابد. این پدیده ناشی از کاهش تعداد نوسانات فضایی در طول موج‌های بلندتر است که منجر به پراشی نرم‌تر می‌شود.

تحلیل‌ها نشان می‌دهد که تغییرات بسیار کوچک در تعداد پره‌های توری (حتی در حد ۰.۱) تغییرات قابل توجهی در آرایش فاز ایجاد می‌کند. با این حال، الگوی شدت نسبتاً پایدار باقی می‌ماند. این عدم تقارن رفتاری بین شدت و فاز، ابزاری مؤثر برای کنترل دقیق جبهه موج و طراحی عناصر اپتیکی با قابلیت تنظیم پیوسته فراهم می‌آورد.

به‌ویژه، تغییر دامنه فاز موجب جابه‌جایی موقعیت قله‌ها و دره‌های شدت می‌شود. پروفایل فاز نیز از حالت پله‌ای ساده به الگوهای نوسانی پیچیده و تیز گذار می‌کند. چنین ویژگی‌هایی بیانگر پویایی‌های غیرخطی نور تحت مدولاسیون فازی با تقارن دایره‌ای است. این ویژگی‌ها برای اپتیک ساختاری، پردازش باریکه و طراحی المان‌های دیفراکتیو (DOE) اهمیت بسزایی دارند. بررسی ناهنجاری‌های فازی در باریکه‌های فرش شعاعی، دانش‌بنیادی درباره ماهیت موجی نور را گسترش می‌دهد. این بررسی همچنین امکان توسعه ابزارهای نوین برای کنترل میدان‌های نوری در مقیاس‌های میکروسکوپی و نانومتری را فراهم می‌سازد.

باریکه‌های فرش شعاعی، مشابه باریکه‌های گردابی و بسل، خاصیت خودترمیمی نشان می‌دهند. بر اساس محاسبات ما، این خاصیت به پارامترهایی همچون تعداد پره‌های توری وابسته است. با افزایش تعداد پرها و کاهش اندازه قطاع مسدودکننده، فاصله خودترمیمی باریکه کاهش می‌یابد.

کاربردهای بالقوه باریکه‌های فرش شعاعی شامل کنترل شکل



شکل ۸. الگوهای شدت و فاز یک توری فازی شعاعی با نمایه

سینوسی ۳۰ پره که قطاعی با طول کمان  $\frac{\pi}{6}$  در فاصله  $z_0 = 100\text{ cm}$  مانع انتشار از این الگوها فرار گرفته است و سپس در فواصل از  $z' = 200\text{ cm}$ ،  $z' = 300\text{ cm}$ ،  $z' = 400\text{ cm}$  و  $z' = 500\text{ cm}$  از توری نشان داده شده است. دامنه تغییرات فاز  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  و کمر باریکه گاوسی فرودی  $10\text{ mm}$  است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

پراش یک باریکه گاوسی از توری فازی شعاعی با نمایه سینوسی، باریکه‌های فرش شعاعی را ایجاد می‌کند. ویژگی‌های

مانند برای ارتباطات نوری و پردازش مواد است.

باریکه در تله‌گذاری نوری، تنظیم الگوهای پراش در  
سنجش‌های اپتیکی حساس، و تولید باریکه‌های حلقوی و بس

## مراجع

1. H Talbot, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **9**(56) (1836) 401.
2. WB Case, M Tomandl, S Deachapunya, and M Arndt, *Opt. Express* **17** (2009) 20966.
3. E Loewen, and E Popov, “*Diffraction Gratings and Applications*”, New York, (1997).
4. S Akhmanov, and SY Nikitin, “*Physical optics*”, Clarendon, (1997).
5. M Mantravadi, and D Malacara, “*Newton, Fizeau, and Haidinger interferometers*”, Optical shop testing, **59** (2007).
6. K Paturski and M Kujawinska “*Handbook of the moiré fringe technique*”, Springer, (1993).
7. JY Lee, and GA. *Opt. Express* **21** (2013) 25553.
8. S Rasouli, *Opt. Lett.* **35** (2010) 1470.
9. M Kotov, V Danko, and A Goloborodko, *J. Opt. Soc. Am. B* **40** (2023) 373.
10. Y Meng, X Shen, J Xie, Y Peng, X Shao, F Yan, and C Yang, *Photonics* **10** (2023) 420.
11. K Dai, C Gao, L Zhong, Q Na, Q Wang, *Opt. Lett.* **40** (2015) 562.
12. I Moreno, J A Davis, B M L Pascoguin, and M JMitry, *Opt. Lett.* **34** (2009) 2927.
13. S Zheng, and J Wang, *Scientific reports* **7** (2017) 40781.
14. S Rasouli, AM Khazaei, and D Hebri, *J. Opt. Soc. Am. A* **35** (2018) 55.
15. M V Berry, and S Klein, *Journal of Modern Optics* **43**, (1996) 2139.
16. J Wen, Y Zhang, M Xiao and S N Zhu, *Advances in Optics and Photonics* **5**, (2013) 83.
17. D Hebri, and S Rasouli, *Phys. Rev. A* **98** (2018) 043826.
18. S Rasouli, AM Khazaei, and D Hebri, *Phys. Rev. A* **97** (2018) 033844.
19. S Rasouli, S Hamzeloui, and D Hebri, *Opt. Express* **27** (2019) 17435.
20. J Bayat, F Hajizadeh, AM Khazaei, and S Rasouli, *Scientific Reports* **10** (2020) 11721.
21. S Rasouli, and M Bagheri, *Journal of Optics* **24** (2022) 075602.
22. S Rasouli, M Bagheri, and J J Niemela, *Scientific Reports* **14.1** (2024) 18419.
23. M Karahroudi, M Khodadadi Karahroudi, A Mobashery, B Parmoon, *Applied Optics* **58** (2019) 1886.
24. M Khodadadi Karahroudi and M R Jafarfard. *Iranian Journal of Physics Research* **23.4** (2024) 597-604.
25. D Hebri, S Rasouli, and M Yeganeh, *J. Opt. Soc. Am. B* **35** (2018) 724.
26. M Mohammadi Masouleh, and S Rasouli, *Journal of Optics* **27** (8) (2025) 085603.
27. S Rasouli, Z Madankan, P Amiri, and LG Wang, *Journal of the Optical Society of America B* **42** (9) (2025) 1928.
28. T Gao and J Cheng, *J. Opt. Soc. Am. A* **42** (2025) 606-616.
29. N Gong, et al., *Journal of the European Optical Society-Rapid Publications* **21.2** (2025) 35.
30. R Azizkhani, D Hebri, and S Rasouli, *Optics Express* **31** (13) (2023) 20665-20682.
31. A M Khazaei, D Hebri, and S Rasouli, *Optics Express* **31** (10) (2023) 16361-16379.
32. B E A Saleh, and M C Teich, “*Fundamentals of Photonics*”, John Wiley & sons, (1991).
33. G B Arfken, “*Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed*”, Academic, (1985).
34. A Jeffrey and D. Zwillinger, “*Table of Integrals, Series, and Products*”, Academic, (2007).