

# مطالعه‌ی نظری و تحلیلی باریکه‌های فرش شعاعی بر اساس تابش گاوسی

خزایی، علی محمد<sup>۱</sup>؛ طهماسبی، زهرا<sup>۱</sup>؛ اسمعیلی، علیرضا<sup>۲</sup>

۱. گروه فیزیک، دانشگاه اراک، اراک

۲. گروه فیزیک، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد

پست الکترونیکی: [z.tahmasebi@araku.ac.ir](mailto:z.tahmasebi@araku.ac.ir), [khazaei.ma@lu.ac.ir](mailto:khazaei.ma@lu.ac.ir)

## چکیده

با توجه به اینکه در اکثر کاربردهای عملی از نمایه‌های باریکه‌ی گاوسی لیزرها استفاده می‌شود در این پژوهش، فراتر از اعمال تقریب موج تخت، ما با انتخاب یک تابش گاوسی همدوس بر یک ساختار دوبعدی جدایی‌پذیر نوری، چارچوبی عملی‌تر از پراش باریکه‌ی نوری را توسعه می‌دهیم که شرایط تجربی دنیای واقعی را بهتر منعکس می‌کند. نتایج نشان می‌دهند که این فرآیند علاوه بر اینکه منجر به تشکیل باریکه‌های نور ساختار یافته می‌گردد با افزایش فاصله‌ی انتشار، این نوع باریکه‌ها شکل و ساختار عرضی خود را حفظ می‌کنند، این ویژگی ناوردایی در شکل، آن‌ها را برای کاربردهای دقیق و کنترل‌شده در علم و فناوری بسیار ارزشمند می‌سازد. افزون بر این، تاثیر تغییرات طول موج باریکه‌ی فرودی بر الگوی پراش توری فاز شعاعی با نمایه‌ی باینری مورد بررسی قرار می‌گیرد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که توزیع شدت دارای تقارن سمتی است و تعداد لوب‌ها در الگوهای شدت و فاز پراش یافته، دو برابر تعداد پره‌های توری فازی شعاعی باینری است. یک مدل جامع و کاربردی پراش بر اساس انتگرال فرنل کیرشلف برای برهم‌کنش باریکه‌ی گاوسی با توری‌های فاز شعاعی باینری در مختصات قطبی ارائه شده است که از آن، عبارات تحلیلی برای میدان نوری مختلط حاصل استخراج می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توری نوری - باریکه‌ی فرش شعاعی - پراش - نورساختار یافته.

## ۱. مقدمه

مختصات قطبی دارای تناوب زاویه‌ای هستند. برخلاف توری‌های متعارف، پراش از ساختارهای شعاعی، مراتب گسسته‌ی پراش تولید نمی‌کند. با این حال، پراش یک باریکه‌ی نور با جبهه‌ی موج تخت یا گاوسی از یک توری شعاعی، پدیده‌های متمایز «فرش تالبوت» را در صفحه‌های عرضی پدید می‌آورد [۲].

مفهوم باریکه‌های فرش از مطالعات پایه‌ای بر روی امواج غیرپراشی توسط بری و بالاش در سال ۱۹۷۹ سرچشمه گرفت، جایی که آن‌ها وجود بسته‌های موج ایری غیرپراشی را پیش‌بینی کردند [۳]. این کشف، زمینه‌ساز اکتشاف و توسعه‌ی بیشتر در این حوزه شد و مبنایی برای شواهد تجربی بعدی باریکه‌های

ساختارهای متناوب نوری، که نقشی اساسی در دستکاری انتشار نور ایفا می‌کنند، معمولاً توری‌های پراش نامیده می‌شوند. یک توری متعارف، مانند توری خطی، در مختصات دکارتی تناوبی است. هنگامی که یک باریکه‌ی نوری از چنین ساختاری عبور می‌کند یا از آن بازتاب می‌یابد، دامنه یا فاز جبهه‌ی موج فرودی مدوله می‌شود. بر این اساس، توری‌ها بسته به پیکربندی خود، به انواع دامنه‌ای یا فازی و عبوری یا بازتابی دسته‌بندی می‌شوند. نمایه‌ی مدولاسیون فضایی می‌تواند اشکال گوناگونی مانند سینوسی، باینری، مثلثی یا ارم‌ماهی به خود بگیرد [۱]. دسته‌ای متمایز از توری‌ها، معروف به توری‌های شعاعی، در

شتاب‌دار توسط سیویلوگلو و همکاران در سال ۲۰۰۷ فراهم آورد [۴] پس از آن، این حوزه به سرعت گسترش یافت، زیرا محققان باریکه‌های نوری گوناگونی همچون بسل [۵]، متیو [۶] و وبر [۷] را کشف کردند. هر یک از این باریکه‌ها، ویژگی‌های انتشار متمایزی را نشان می‌دهند و درک ما از رفتار و کاربردهای آن‌ها را غنی می‌سازند. دسته‌ی خاص باریکه‌های فرش شعاعی، نخستین بار توسط رسولی و همکاران در سال ۲۰۱۸ از طریق پراش امواج تخت از توری‌های فاز شعاعی معرفی شد [۸]. در واقع، حوزه‌ی تولید الگوهای نوری دستخوش تحولات چشمگیری شده و از نواحی تداخل ساده به میدان‌های نوری ساختاریافته‌ی پیچیده تکامل یافته است. این تغییر با پیشرفت‌های نوآورانه در مدولاتورهای فضایی نور (SLMs) و المان‌های نوری پراشی [۹،۱۰] حاصل شده است. این پیشرفت نه تنها نشان‌دهنده‌ی نوآوری فناورانه، بلکه نشان از درک عمیق‌تری از دستکاری نور دارد و افق‌های تازه‌ای را برای کاربردها در تصویربرداری، ارتباطات و فراتر از آن می‌گشاید. در حالی که مدل‌های نظری اغلب امور را با فرض تابش ایده‌آل نور با جبهه‌ی موج تخت ساده می‌کنند [۱۱]، دنیای واقعی پیچیده‌تر است. اکثر کاربردهای عملی از نمایه‌های باریکه‌ی گاوسی لیزرها استفاده می‌کنند [۱۲]. این عدم تطابق بین نظریه و عمل، اجرای بسیاری از تکنیک‌های پیشرفته‌ی شکل‌دهی باریکه را خارج از آزمایشگاه دشوار ساخته است [۱۳]. پژوهش ما این شکاف حیاتی را با بررسی تولید باریکه‌های فرش شعاعی از طریق تابش گاوسی بر روی توری‌های فازی شعاعی با نمایه باینری برطرف می‌کند [۱۴] این باریکه‌های غیرپراشی و خودشتاب گیر، ویژگی‌های استثنایی از جمله خود-ترمیمی و تغییرناپذیری در طول انتشار را نشان می‌دهند [۱۵]، که آن‌ها را برای کاربردهایی از به تله‌اندازی نوری<sup>۱</sup> [۸] تا ارتباطات فضایی آزاد [۴] بی‌نظیر می‌سازد. برای نمونه از باریکه نوری در چیدمان آزمایشگاهی تله‌اندازی نوری استفاده می‌شود تا ذرات را شبیه چرخ دنده بچرخاند و امکان کنترل دقیق چرخش ذرات میکروسکوپی را فراهم کند [۱۶]. فراتر از به تله‌اندازی نوری،

الگوی متمایز و غیرپراشی این باریکه‌ها، پتانسیل قابل توجهی برای کاربرد در حسگری جبهه‌ی موج با وضوح بالا و سنجش‌شناسی نشان می‌دهد. همچنین، باریکه‌های نور ساختاریافته می‌توانند کاربردهای آتی را در اپتیک کوانتومی، ارتباطات نوری و سامانه‌های تصویربرداری پیشرفته، پیش ببرند [۱۷] مانند استفاده از مجموعه‌ای از مدهای فرش شعاعی برای انتقال داده از طریق کانال‌های آشفته با دقت بالا [۱۸].

به عنوان نوآوری اصلی این پژوهش، فراتر از اعمال تقریب موج تخت، با بکاربردن تابش گاوسی، چارچوبی عملی‌تر توسعه می‌دهیم که شرایط تجربی دنیای واقعی را بهتر منعکس می‌کند و در عین حال ویژگی‌های منحصر به فرد و ارزشمند این میدان‌های نور ساختاریافته را حفظ می‌کند [۲]. اعمال تابش گاوسی به جای امواج تخت، گامی حیاتی به سوی پیاده‌سازی‌های عملی فناوری‌های نور ساختاریافته برای کاربردهای گوناگون در حوزه‌هایی مانند بیوفتونیک [۱۹]، محاسبات نوری [۲۰] و پردازش مواد با لیزر است [۲۱]. یافته‌های ما نشان می‌دهد که ویژگی‌های استثنایی باریکه‌های فرش شعاعی را می‌توان به‌طور مؤثری با استفاده از منابع استاندارد باریکه‌ی گاوسی به کار گرفت [۲۲] و گستره‌ی کاربردهای بالقوه آن‌ها را به‌طور قابل توجهی گسترش داد [۲۰]. در این کار، بررسی نظری از پراش باریکه‌ی گاوسی توسط ساختارهای دو بعدی جدایی‌پذیر بیان شده در مختصات قطبی ارائه می‌دهیم. تحلیلی دقیق از الگوهای پراش حاصل بر اساس انتگرال فرنل-کیرشهف اعمال شده بر توری‌های فازی شعاعی با نمایه باینری انجام می‌شود. همچنین برای اولین بار در این مقاله، تاثیر تغییر طول موج باریکه فرودی بر ویژگی‌های پراش این توری‌ها به‌طور سیستماتیک بررسی می‌گردد. افزون بر این، تحول توزیع‌های فاز و دامنه‌ی میدان پراش‌یافته برای روشن‌سازی رفتار فیزیکی بنیادی تحلیل می‌شود.

## ۲. محاسبات نظری و نتایج شبیه‌سازی

تابع عبور دامنه‌ی مختلط یک توری فازی شعاعی با نمایه ی باینری، که در مختصات قطبی  $(r', \theta')$  تعریف شده است، به صورت زیر داده می‌شود [۸]:

<sup>1</sup> self-accelerating

<sup>2</sup> Optical tweezer

دامنه‌ی مختلط  $U(r', \theta, z)$  میدان پراش‌یافته در فاصله  $z$  با استفاده از انتگرال پراش فرنل در مختصات قطبی محاسبه می‌شود. فرض کنید  $T(r', \theta')$  تابع عبور توری شعاعی و  $U_G(r', z=0)$  میدان گاوسی ورودی باشد. در این صورت میدان پراش‌یافته به صورت زیر است

$$U(r, \theta, z) = h_0 e^{i\alpha r^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} U_G(r', z=0) \times T(r', \theta') e^{i\alpha r'^2} e^{-i\alpha r r' \cos(\theta - \theta')} r' dr' d\theta' \quad (6)$$

که در آن  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ،  $h_0 = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}$ ،  $\alpha = \frac{\pi}{\lambda z}$  که در آن  $\lambda$  طول موج است. با جایگزینی معادلات (3) و (5) در (6) به دست می‌آید:

$$U(r, \theta, z) = \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[ \cos(\gamma) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{\pi l} i^l \sin(\gamma) \times (e^{iml\theta} + e^{-iml\theta}) \right] \times e^{\frac{-r'^2}{W_0^2}} e^{i\alpha r'^2} e^{-i\alpha r r' \cos(\theta - \theta')} r' dr' d\theta' \right\} h_0 e^{i\alpha r^2} \quad (7)$$

این عبارت به مجموعی از انتگرال‌ها تفکیک می‌شود. انتگرال سمتی را می‌توان با استفاده از بسط ژاکوبی-آنژ حل کرد:

$$e^{ix \cos(\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(x) e^{in\varphi} \quad (8)$$

با اعمال این بسط و انتگرال‌گیری روی  $\theta'$ ، جمله‌هایی شامل توابع بسل نوع اول  $J_n(0)$  به دست می‌آید. تعامد توابع نمایی، ترتیب‌های خاصی را انتخاب می‌کند. نتیجه به صورت زیر است:

$$T(r', \theta') = e^{i\gamma \operatorname{sgn}[\cos(m\theta')]} \quad (1)$$

که در آن  $r'$  مختصات شعاعی،  $\theta'$  زاویه‌ی سمتی،  $\gamma$  دامنه‌ی تغییرات فاز را نشان می‌دهد،  $m$  تعداد پره‌های (تناوب) توری است و  $\operatorname{sgn}$  تابع علامت است. این تابع را می‌توان در طول یک دوره به صورت زیر بیان کرد:

$$T(r', \theta') = \begin{cases} e^{i\gamma} & \text{for } \frac{-\pi}{2m} < \theta < \frac{\pi}{2m} \\ e^{-i\gamma} & \text{for } \frac{-\pi}{m} < \theta < \frac{-\pi}{2m} \text{ and } \frac{\pi}{2m} < \theta < \frac{\pi}{m} \end{cases} \quad (2)$$

بسط سری فوریه این تابع عبور برای تحلیل الگوی پراش حیاتی است، که برای نمایه‌ی باینری توصیف شده، می‌توان آن را به صورت زیر استخراج کرد [8]:

$$T(r', \theta') = \cos(\gamma) + \sum_{\substack{l=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{2}{\pi l} i^l \sin(\gamma) [e^{iml\theta'} + e^{-iml\theta'}] \quad (3)$$

باریکه‌ی نور تابشی، یک باریکه‌ی گاوسی است. دامنه‌ی مختلط آن در فاصله‌ی انتشار  $z$  از کمر باریکه به صورت زیر داده می‌شود [12]:

$$U_G(r', z) = \left( \frac{W_0}{W(z)} \right) \exp \left[ -r'^2 / W^2(z) \right] \times \exp \left[ i \left( kz + \frac{kr'^2}{2R(z)} - \zeta(z) \right) \right] \quad (4)$$

که در آن:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2}$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right)$$

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$$

در صفحه‌ی توری ( $z=0$ )، این عبارت به صورت زیر ساده می‌شود [17]:

$$U_G(r', z=0) = \exp \left( \frac{-r'^2}{W_0^2} \right) \quad (5)$$

$$U(r, \theta, z) = \pi h_0 e^{i\alpha r^2} \left\{ \frac{1}{\beta} \cos(\gamma) e^{(-b^2/\lambda\beta)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi l}} i^{(1-m)l} \sin(\gamma) \cos(ml\theta) e^{(-b^2/\lambda\beta)} \times \left[ \frac{I_{ml-1}(b^2/\lambda\beta)}{\gamma} - \frac{I_{ml+1}(b^2/\lambda\beta)}{\gamma} \right] \right\} \quad (9)$$

این عبارت، پراش یک باریکه گاوسی توسط یک توری فازی شعاعی با نمایه باینری و در نتیجه تشکیل یک باریکه فرش شعاعی را توصیف می‌کند. توزیع شدت لوب‌ها توسط پارامترهای باریکه‌ی گاوسی  $(W_0, z_0)$ ، دامنه مدولاسیون فاز، طول‌موج باریکه‌ی فرودی و مرتبه‌ی توری ( $m$ ) کنترل می‌شود که امکان تحلیل و بهینه‌سازی دقیق فرآیند تولید باریکه را فراهم می‌کند.

### ۳. پراش باریکه‌ی گاوسی از توری فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری

همانطور که در معادله ۱ بیان شده، یک توری فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری با تقارن سمتی دارای ویژگی تکنیکی است که در آن فاز مستقل از مختصه‌ی شعاعی است. این بدان معناست که هر یک از پره‌ها به صورت یکنواخت از مرکز تا لبه‌ی مرز دایره‌ای کشیده می‌شوند. از شکل ۱ (الف) مشخص است که توری فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری از تعدادی پره با دو فاز مجزای  $-\pi/2$  برای نواحی سیاه و  $+\pi/2$  برای نواحی قرمز ساخته شده است که در یک صفحه‌ی دایره‌ای منظم شده‌اند. همچنین دامنه مدولاسیون فاز ( $\gamma$ ) را برای این ساختار،  $\pi/2$  انتخاب می‌کنیم. این یک عنصر مهم در اپتیک پراشی برای تولید باریکه‌های نوری ساختار یافته است. با انتقال یک باریکه‌ی گاوسی همدوس از این ساختار (شکل ۱ (ب)) نشان می‌دهیم که هر نقطه از توری تغییر فاز مربوط به خود را بر جبهه موج نور فرودی اعمال می‌کند. نور پراش یافته از توری فازی شعاعی با نمایه باینری، در یک فاصله‌ی انتشار  $Z$  می‌تواند با معادله ۱۲ توضیح داده شود. در شکل ۱ (پ) پراش باریکه‌ی گاوسی از توری فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری و تعداد پره‌های

$$U(r, \theta, z) = \pi h_0 e^{i\alpha r^2} \left\{ \cos(\gamma) \int_0^{\infty} J_0(\gamma \alpha r r') e^{(-\frac{r'^2}{W_0^2})} e^{i\alpha r'^2} r' dr' \right\} + \pi h_0 e^{i\alpha r^2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\pi l} i^l (-i)^{ml} \sin(\gamma) e^{(iml\theta)} \times \int_0^{\infty} J_{ml}(\gamma \alpha r r') e^{(-\frac{r'^2}{W_0^2})} e^{i\alpha r'^2} r' dr' \right\} + \pi h_0 e^{i\alpha r^2} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\pi l} i^l (-i)^{-ml} \sin(\gamma) e^{(-iml\theta)} \times \int_0^{\infty} J_{ml}(\gamma \alpha r r') e^{(-\frac{r'^2}{W_0^2})} e^{i\alpha r'^2} r' dr' \right\}$$

که در آن پارامتر مختلط زیر را تعریف کرده‌ایم:

$$\beta = \frac{1}{\omega_0^2} - i\alpha, \quad b = \gamma \alpha r = \frac{\gamma \pi r}{\lambda z} \quad (10)$$

اکنون حل مسئله به ارزیابی انتگرال‌های شعاعی به شکل  $\int_0^{\infty} J_\nu(br') e^{-\beta r'^2} r' dr'$  بستگی دارد، که در آن  $b = \gamma \alpha r$  است. از دو اتحاد انتگرال استاندارد زیر استفاده می‌شود [۲۳].

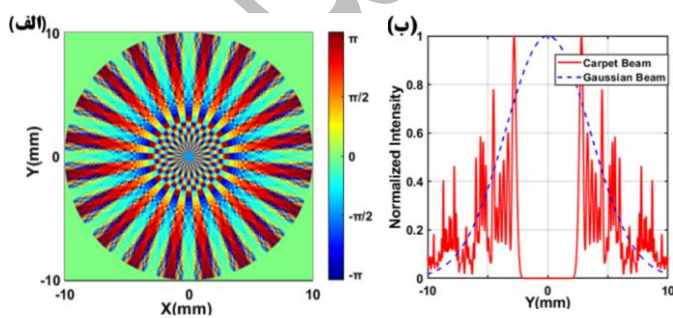
$$\int_0^{\infty} r^{\nu+1} J_\nu(br) e^{-\beta r^2} dr = \frac{b^\nu}{(\gamma\beta)^{\nu+1}} e^{(-\frac{b^2}{\gamma\beta})} \text{Re}(\alpha) \text{Re}(\nu) - 1 \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} J_\nu(br) e^{-\beta r^2} r dr = \frac{\sqrt{\pi} b}{\lambda\beta^{\frac{\nu}{2}}} e^{(-\frac{b^2}{\lambda\beta})} \times \left[ I_{\nu-1}\left(\frac{b^2}{\lambda\beta}\right) - I_{\nu+1}\left(\frac{b^2}{\lambda\beta}\right) \right]$$

که در آن  $I_n(x)$  تابع بسل اصلاح شده‌ی نوع اول مرتبه‌ی  $n$  است. با جایگزینی جواب این انتگرال‌ها در معادله (۹)، عبارت تحلیلی نهایی برای میدان نوری مختلط  $U(r, \theta, z)$  در هر نقطه از فضا پس از توری به دست می‌آید:

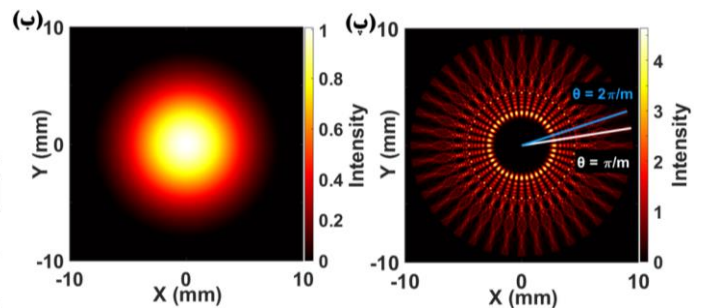
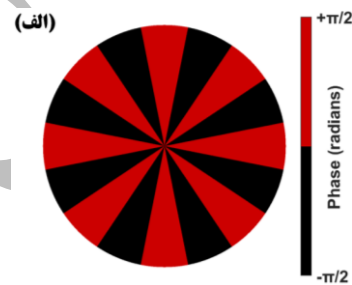
$$(12)$$

این رفتار از ویژگی‌های بارز باریکه‌های نوری است که در مسافت‌های انتشار طولانی، بدون گسترش عرضی، ساختار خود را حفظ می‌کنند. ویژگی‌ای که آن‌ها را برای کاربردهایی همچون تله‌اندازی نوری و ارتباطات راه دور بسیار ارزشمند می‌سازد. مقایسه‌ی نمایه‌ی شدت باریکه‌ی گاوسی (معادله ۵) و باریکه‌ی فرش شعاعی (معادله ۱۲) در فاصله‌ی انتشار یکسان  $z=200\text{ cm}$  در شکل‌های (الف) و (ب) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که عبور باریکه گاوسی از توری فازی شعاعی، برخلاف نمایه‌ی ساده و یکنواخت باریکه‌ی گاوسی، منجر به ظهور یک میدان نوری ساختاریافته با توزیع شدت پیچیده و غیریکنواخت می‌گردد. نور پراش یافته از طریق مدولاسیون دامنه و فاز مهندسی می‌شود که الگوی آن با شدت شعاعی چند لوبی با کنتراست بالا مشخص می‌شود. به عبارت دیگر در این نور ساختار یافته ما یک توالی از حلقه‌های هم مرکز روشن که روشنایی هر یک از آنها یکنواخت نیست بلکه به تعداد زیادی نقاط (لوب‌های) روشن شکسته می‌شود (تعداد آنها با مقدار  $m$  تعیین می‌شود) مشاهده می‌کنیم. این قیاس، نقش کلیدی مهندسی جبهه‌ی موج را آشکار می‌سازد به ویژه آنکه این ساختار پیچیده، صرفاً از تغییر شکل یک مد پایه‌ای لیزر (که رایج‌ترین چشمه‌ی نور در کاربردهای عملی است) حاصل شده است.



**شکل ۲.** تحلیل تغییرات فاز باریکه‌ی فرش و قیاس رفتار باریکه‌ی فرش و ویژگی‌های یکنای آن با باریکه‌های گاوسی مرسوم. (الف) الگوی فاز باریکه‌ی فرش تولید شده توسط یک توری فازی شعاعی با  $m=20$  که در مسافت انتشار  $z=200\text{ cm}$  شبیه سازی شده است. (ب) مقطع قائم شدت بهنجار شده‌ی نمایه‌ی باریکه فرش و گاوسی در  $z$  یکسان بر هم منطبق شده‌اند. برای تمام شبیه‌سازی‌ها مدولاسیون فاز  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

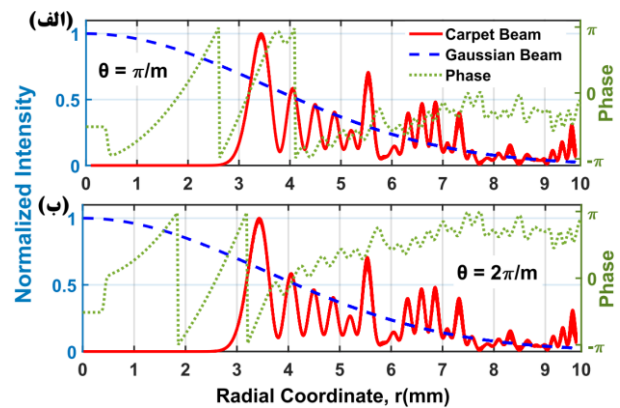
$m=20$  در فاصله‌ی انتشار  $z=200\text{ cm}$  را نشان می‌دهد. در معادله ۱۲ با انتخاب مدولاسیون دامنه‌ی فاز  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  تعداد پره‌های الگوی باریکه‌ی فرش شعاعی ۲ برابر تعداد پره‌های توری شده و همچنین جمله‌ی اول این معادله صفر، در نتیجه شدت الگوی پراش در مرکز صفر می‌شود. هسته‌ی مرکزی تاریک و حلقه‌های هم‌مرکز در باریکه‌ی فرش شعاعی، شباهت ساختاری به باریکه‌های غیرپراشی از خانواده‌ی بسل (Bessel beams) دارند [۵، ۶]. این شباهت ناشی از حضور توابع بسل در انتگرال‌های شعاعی (مانند رابطه ۱۱) است که پس از انتگرال‌گیری، منجر به ظهور ساختاری با هسته‌ی مرکزی تاریک و حلقه‌های هم‌مرکز می‌شود. این ویژگی با عنوان رفتار شبه-بسل شناخته می‌شود.



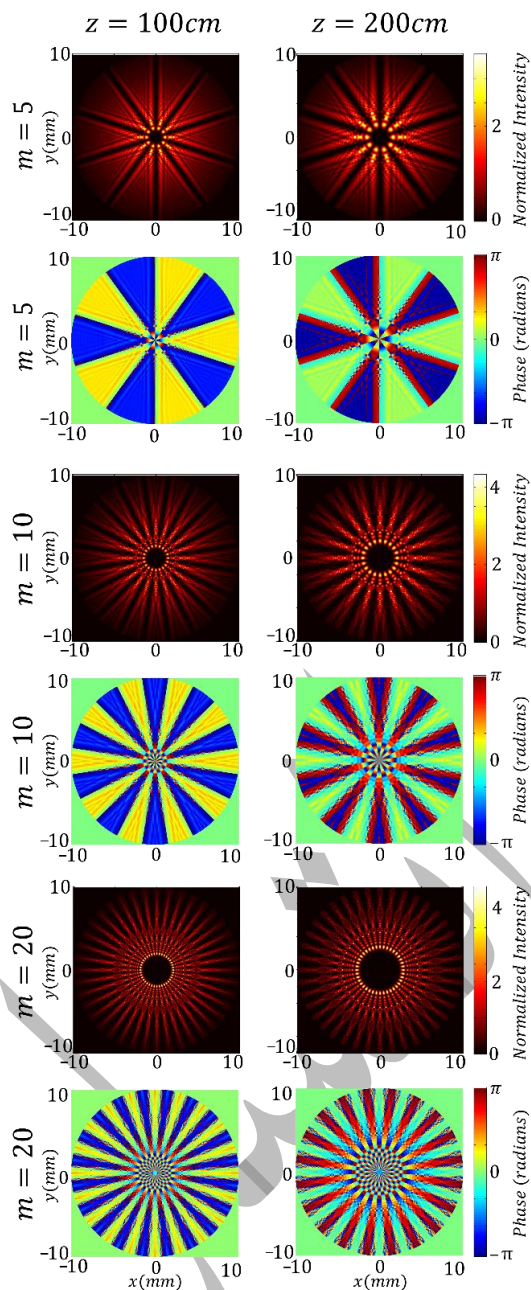
**شکل ۱.** (الف) نمایش یک توری فازی شعاعی با تابع عبور باینری که تعداد  $m=8$  پره دارد و یک مقایسه بین الگوی عرضی شدتی (ب) باریکه‌ی فرودی غیرپراشی در فاصله‌ی انتشار  $200\text{ cm}$  از محل توری فازی و (پ) باریکه‌ی فرش شعاعی ناشی از پراش باریکه‌ی گاوسی توسط یک توری فازی شعاعی با یک نمایه‌ی باینری ( $m=20$ ) که در آن دو راستای سمتی  $\theta = \pi/m$  و  $\theta = 2\pi/m$  در مرکز دو پره‌ی روشن متوالی مشخص شده است. دامنه مدولاسیون فاز برای این توری  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

مسافت  $200\text{ cm}$  مشاهده می‌کنیم. علاوه بر الگوی اعمال شده روی نمایه‌ی باریکه بعد از پراش، همانطور که قابل مشاهده است مقدار بیشینه‌ی باریکه‌ی گاوسی بر کمینه‌ی باریکه‌ی فرش شعاعی منطبق شده است. در شکل ۳ نمایه‌ی فاز و شدت شعاعی بهنجار شده‌ی باریکه فرش شعاعی و گاوسی در نمودار  $a$  برای زاویه‌ی سمتی  $\theta = \pi/m$  و  $b$  در زاویه سمتی  $\theta = 2\pi/m$  (در شکل (پ)) به عنوان راستاهای شعاعی مشخص به ترتیب از مرکز پره‌ی دوم و سوم الگوی شدت عبور می‌کنند) نشان داده شده است. همانطور که از هر دو شکل ۳(الف) و (ب) قابل مشاهده است شدت شعاعی بهنجار شده‌ی باریکه فرش شعاعی (منحنی توپر قرمز رنگ) یک توزیع شدت چند حلقه‌ای مجزا با بیشینه‌ها و دره‌های ثانویه‌ی واضح را نشان می‌دهد که منجر به اثر فرش می‌شود. این الگوی پیچیده از ترکیب مدهای شبه بسل چندگانه حاصل می‌شود که سهم‌های توابع بسل تعمیم یافته را شامل می‌شود. افت و خیزها در شدت شعاعی بر توانایی باریکه در بازسازی خود و حفظ ویژگی غیرپراشی خود در حین انتشار تاکید دارد. شدت شعاعی بهنجار شده‌ی باریکه‌ی فرش شعاعی در تمام فواصل شعاعی، برای هر دو پره‌ی متوالی دوم و سوم الگوی عرضی شدت، تغییرات یکسانی از خود نشان می‌دهد. اما برخلاف توزیع شدت، تغییرات شعاعی فاز باریکه‌ی فرش شعاعی (منحنی خط چین سبز رنگ) در راستای پره‌ی دوم و سوم تفاوت دارد. همچنین در قیاس با باریکه‌ی گاوسی فرودی، تغییر شعاعی فاز باریکه‌ی فرش پراش‌های فازی ناپیوسته و سریع  $\pi$  رادیان که به تکنیکی‌های فاز تشکیل دهنده‌ی ساختار فرش شعاعی متصل می‌شوند را نشان می‌دهد. در حالی که باریکه‌ی گاوسی که نمایه‌ی شدت آن با یک کاهش نمایی توسط منحنی خط چین آبی رنگ نشان داده شده است طبق معادله ۵ در حین انتشار در تمامی فواصل، الگوی شدتی یکسان و ثابتی دارد و در صفحه‌ی مورد بررسی در این شکل ( $z=200\text{ cm}$ ) دارای یک جبهه‌ی موج کروی (غیرتخت) است. اما در این مقطع عرضی خاص، فاقد ناپیوستگی‌های  $\pi$  رادیانی (تکنیکی‌های فاز) است.

برای دست یافتن به درک فیزیکی بیشتر از ویژگی‌های مشخصه‌ی باریکه‌ی فرش شعاعی، نمایش تغییرات فاز ناشی از پراش از طریق توری فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری ضروری است. شکل ۲(الف) مقطع عرضی تغییرات فاز باریکه‌ی نور ساختار یافته‌ی مذکور در شکل ۱(پ) را با همان پارامترهای تحلیلی نشان می‌دهد. برخلاف باریکه‌ی فرودی که یک جبهه‌ی موج تخت و یکنواخت بدون هیچگونه تکنیکی فاز دارد، این مقطع عرضی یک چیدمان مترکم از تکنیکی‌های فازی هم مرکز را عرضه می‌کند. این الگوی جالب، تصادفی نیست چرا که انتگرال فرنل در محاسبات، معادل با تبدیل فوریه برای تقریب میدان نزدیک است و با شامل شدن مراتب بالای تابع بسل اصلاح شده‌ی نوع اول مرتبه‌ی  $m$  الگوی پراش باریکه‌ی نور را به عنوان نمایش حوزه‌ی فوریه مدولاسیون مرتبه‌ی بالا معرفی می‌کند. در همین شکل قسمت (ب) ما یک مقطع عرضی قائم از شدت بهنجار شده (در مقایسه با شدت باریکه‌ی فرودی) برای نمایه هر دو باریکه‌ی فرش شعاعی و گاوسی بعد از انتشار



شکل ۳. مقایسه ویژگی‌های شعاعی باریکه‌ی فرش شعاعی ( $m=20$ ) با باریکه‌ی گاوسی پایه بعد از انتشار ۲ متر در طول موج  $\lambda = 523\text{ nm}$ . نمایه‌های فاز (منحنی سبز رنگ خط چین) و شدت شعاعی بهنجار شده برای باریکه‌ی فرش شعاعی (نمودار قرمز رنگ پیوسته) و گاوسی (نمودار آبی رنگ خط چین) (الف) در زاویه سمتی  $\theta = \pi/m$  (شعاع سفید رنگ). (ب) در زاویه سمتی  $\theta = 2\pi/m$  (شعاع آبی رنگ).



شکل ۴. شدت تحلیلی (ستون‌های اول، سوم و چهارم) و فاز (ستون‌های دوم، چهارم و ششم) الگوهای پراش توری‌های فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری و با تعداد پره  $m=5$ ،  $m=10$  و  $m=20$  در فواصل انتشار مختلف  $20\text{cm}$ ،  $100\text{cm}$  و  $200\text{cm}$  نسبت به محل توری. شعاع کمر باریکه‌ی گاوسی فرودی  $W_0=10\text{mm}$  در نظر گرفته شده است و دامنه‌ی مدولاسیون فاز برای این توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

نمایه‌ی فاز پله‌کانی گونه‌ی باریکه فرش شعاعی، طبیعت شتابگیری شعاعی باریکه‌ی پراش یافته را مشخص می‌کند که بخش‌های شعاعی مختلف مسیره‌های سهمی گون مجزایی را دنبال می‌کنند.

شکل (۴) الگوی پراشی محاسبه شده از سه توری فازی شعاعی با نمایه‌های باینری و با تعداد پره  $m=5$ ،  $m=10$  و  $m=20$  در فواصل انتشار مختلف  $20\text{cm}$ ،  $100\text{cm}$  و  $200\text{cm}$  نسبت به محل توری را نشان می‌دهد. دامنه مدولاسیون فاز توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است. رفتار پراش مشاهده شده در این نتایج می‌تواند به عنوان یک نتیجه از مدولاسیون فاز زاویه‌ای اعمال شده توسط توری فازی شعاعی با نمایه‌ی باینری تفسیر شود. وقتی باریکه‌ی گاوسی فرودی با توری برهمکنش می‌کند فاز سمتی آن به طور متناوب بین دو مقدار مجزا تغییر می‌کند که یک ساختار فاز با تناوب چرخشی ایجاد می‌کند. این مدولاسیون منجر به دیده شدن لوب‌های شدت شعاعی در الگوهای ثبت شده می‌شود. مرتبه‌ی توری  $m$  با تغییر در ویژگی‌های زاویه‌ای و شعاعی، یک مکانیسم متفاوت برای مهندسی کردن باریکه‌ها ارائه می‌دهد. چنین باریکه‌هایی برای تله‌اندازی نوری، میکرواستکاری نوری و مطالعات برهمکنش نور-ساختار مهم هستند، جایی که کنترل دقیق توزیع فاز و شدت زاویه‌ای ضروری است.

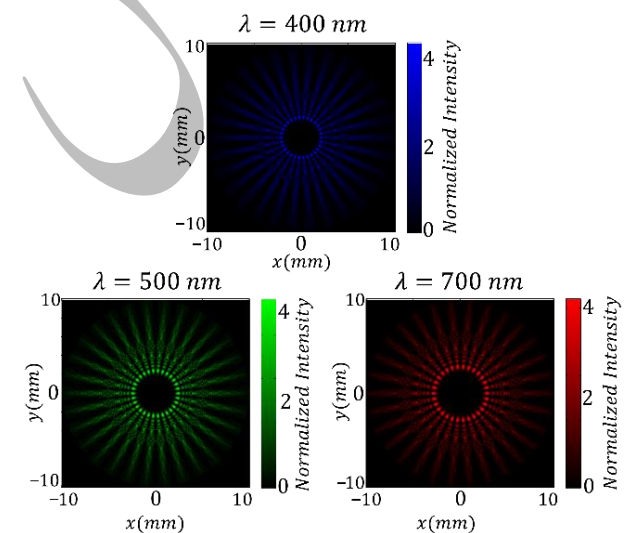
همانطور که باریکه منتشر می‌شود، با توجه به انحنای جبهه‌ی موج باریکه‌ی گاوسی، مراتب پراش سمتی تحول می‌یابند. با افزایش فاصله‌ی انتشار، الگوی پراش پایدار شده، تغییر شکل نمی‌دهد و یک الگوی شعاعی شبیه تالوت تشکیل می‌دهد. این پدیده متفاوت از توری‌های خطی است که الگو با فاصله‌ی انتشار تغییر می‌کند. توزیع‌های فاز بینش عمیق‌تری نسبت به ساختار داخلی باریکه وجود می‌آورد. نواحی متناوب فاز مخالف متناظر با بخش‌های سمتی با اختلاف راه نوری مشخص هستند و تقاطع بخش‌ها، نشان دهنده‌ی وجود تکینگی‌های فاز است. حفظ تناوب فاز در طول انتشار نشان می‌دهد که همدوسی زاویه‌ای باریکه پایدار باقی می‌ماند با این اطمینان که در مسافت‌های انتشار طولانی‌تر فرش نوری شعاعی پایدار می‌ماند.

همانطور که باریکه منتشر می‌شود، با توجه به انحنای جبهه‌ی موج باریکه‌ی گاوسی، مراتب پراش سمتی تحول می‌یابند. با افزایش فاصله‌ی انتشار، الگوی پراش پایدار شده، تغییر شکل نمی‌دهد و یک الگوی شعاعی شبیه تالوت تشکیل می‌دهد. این پدیده متفاوت از توری‌های خطی است که الگو با فاصله‌ی انتشار تغییر می‌کند. توزیع‌های فاز بینش عمیق‌تری نسبت به ساختار داخلی باریکه وجود می‌آورد. نواحی متناوب فاز مخالف متناظر با بخش‌های سمتی با اختلاف راه نوری مشخص هستند و تقاطع بخش‌ها، نشان دهنده‌ی وجود تکینگی‌های فاز است. حفظ تناوب فاز در طول انتشار نشان می‌دهد که همدوسی زاویه‌ای باریکه پایدار باقی می‌ماند با این اطمینان که در مسافت‌های انتشار طولانی‌تر فرش نوری شعاعی پایدار می‌ماند.

#### ۴. نتیجه‌گیری

این پژوهش به عنوان نورآوری اصلیش، به جای اعمال تقریب موج تخت یک چارچوب نظری برای پراش باریکه‌ی گاوسی توسط توری‌های فاز شعاعی با نمایه باینری ساخته است. عبارات استخراج شده براساس نظریه‌ی پراش فرنل به دقت توزیع میدان نوری مختلط را توصیف می‌کنند. این مدل نظری نشان می‌دهد که این میدان‌های نوری ساختار یافته توزیع شدت عرضیشان را در حین انتشار بدون تغییر حفظ می‌کنند. این ویژگی ناوردایی در شکل برای کاربردهای دقیق در دستکاری‌های نوری و سیستم‌های ارتباطی ضروری است. بررسی ما آشکار می‌کند که فرایند پراش الگوهای شدتی را تولید می‌کند که تعداد لوب‌ها در باریکه‌ی فرش شعاعی حاصل دقیقاً دو برابر تعداد پره‌ها در توری‌های تولید کننده‌ی آن است. علاوه بر این طول موج باریکه‌ی گاوسی فرودی مشخصه‌های پراش را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

همانطور که باریکه منتشر می‌شود، با توجه به انحنای جبهه‌ی موج باریکه‌ی گاوسی، مراتب پراش سمتی تحول می‌یابند. با افزایش فاصله‌ی انتشار، الگوی پراش پایدار شده، تغییر شکل نمی‌دهد و یک الگوی شعاعی شبیه تالوت تشکیل می‌دهد. این پدیده متفاوت از توری‌های خطی است که الگو با فاصله‌ی انتشار تغییر می‌کند. توزیع‌های فاز بینش عمیق‌تری نسبت به ساختار داخلی باریکه وجود می‌آورد. نواحی متناوب فاز مخالف متناظر با بخش‌های سمتی با اختلاف راه نوری مشخص هستند و تقاطع بخش‌ها، نشان دهنده‌ی وجود تکینگی‌های فاز است. حفظ تناوب فاز در طول انتشار نشان می‌دهد که همدوسی زاویه‌ای باریکه پایدار باقی می‌ماند با این اطمینان که در مسافت‌های انتشار طولانی‌تر فرش نوری شعاعی پایدار می‌ماند.



شکل ۵. نتایج تحلیلی اثر طول موج بر الگوی پراش توری فاز شعاعی با نمایه‌ی و با تعداد ۲۰ پره به ازای مسافت انتشار ۲۰۰cm از محل توری. الگوهای آبی، سبز و قرمز به ترتیب متناظر با طول موج‌های  $\lambda = 400 \text{ nm}$ ،  $\lambda = 500 \text{ nm}$  و  $\lambda = 700 \text{ nm}$  هستند. شعاع کمر باریکه‌ی گاوسی فرودی  $W_0 = 1 \text{ mm}$  در نظر گرفته شده است و دامنه‌ی مدولاسیون فاز برای این توری‌ها  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  است.

با در نظر گرفتن معادله‌های ۱۰ و ۱۲ می‌توان دریافت که دامنه‌ی مختلط میدان وابسته به طول موج است. شکل ۵ نتایج تحلیلی الگوهای پراش یک باریکه‌ی گاوسی با طول موج‌های

13. I Kaminer, M Segev, & D N Christodoulides, *Phy. Rev. Lett.* **106** (2011) 213903.
14. A Jesacher, A Schwaighofer, S Fürhapter, C Maurer, S Bernet, and M Ritsch-Marte, *Opt. Express* **15** (2007) 5801.
15. A Forbes, M De Oliveira, and M R Dennis, *Nat. Photonics* **15** (2021) 253.
16. J Bayat, F Hajizadeh, A M Khazaei, and S Rasouli, *Sci. Rep.* **10** (2020) 11721.
17. A M Khazaei, D Hebri, and S Rasouli, *Opt. Express* **31** (2023) 16361.
18. M Khodadadi Karahroudi, and M R Jafarfard, *Iran. J. Phys. Res.* **23** (2024) 597.
19. F Diebel, M Boguslawski, T Dadalyan, R Drampyan, and C Denz, *Opt. Express* **24** (2016) 12933.
20. I Bloch, J Dalibard, and S Nascimbene, *Nat. Phys.* **8** (2012) 267.
21. P Polynkin, M Kolesik, and J Moloney, *Phy. Rev. Lett.* **103** (2009) 123902.
22. A Couairon, and A Mysyrowicz, *Phys. Rep.* **441** (2007) 47.
23. D Zwillinger, and V Moll, “*In Table of Integrals, Series, and Products*”, Academic Press, (2014).
1. E G Loewen and E Popov, “*Diffraction gratings and applications*”, CRC Press, (2018).
2. S Rasouli, A M Khazaei, and D Hebri, *J. Opt. Soc. Am. A* **35** (2017) 55.
3. M V Berry, N L Balazs, *Am. J. Phys.* **47** (1979) 264.
4. G A Siviloglou, J Broky, A Dogariu, and D N Christodoulides, *Phy. Rev. Lett.* **99** (2007) 213901.
5. Z Bouchal and M Olivík, *J. Mod. Opt.* **42** (1995) 1555.
6. J C Gutiérrez-Vega, M D Iturbe-Castillo, and S Chávez-Cerda, *Opt. Lett.* **25** (2000) 1493.
7. P Zhang, Y Hu, T Li, D Cannan, X Yin, R Morandotti, ... and X Zhang, *Phy. Rev. Lett.* **109** (2012) 193901.
8. S Rasouli, et al., *Phys. Rev. A* **97** (2018) 033844.
9. J W Goodman, “*Introduction to Fourier optics*”. Roberts and Company publishers, (2005).
10. D G Grier, *nature* **424** (2003) 810.
11. S Rasouli, D Hebri, and A M Khazaei, *J.Opt.*, **19** (2017) 095601.
12. J Broky, G A Siviloglou, A Dogariu, and D N Christodoulides, *Opt. Express* **16** (2008) 12880.