شرایط مرزی جهان‌رویه در مدل‌های سیگمای T-دوگان غیرآبلی با متریک AdS_4

علی اقبالی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

پست الکترونیکی: eghbali978@gmail.com, a.eghbali@azaruniv.ac.ir

چکیده

ما نشان می‌دهیم که متریک AdS_4 در حضور یک میدان ماکسول به همراه میدان دیلاتون ثابت، معادلات حرکت برای نظریه ریسمان دورگه را برآورده می‌کند. سپس، با اعمال دوگانگی-T غیرآبلی (در اینجا دوگانگی-T پواسون–لی روی یک دوتایی درینفلد نیمه آبلی)، یک جفتِ دوگان غیر آبلی برای متریک AdS_4 ساخته می‌شود. با استفاده از یک پارامتریزاسیون خاص از گروه لی غیر آبلی ۲–بعدی A_2، مدل سیگمای اصلی شامل متریک AdS_4 را در غیاب میدان B می‌سازیم. نشان داده می‌شود که پس‌زمینه‌ی دوگان ساخته شده به وسیله‌ی دوگانگی-T پواسون–لی، توسط یک میدان B و یک متریک که شامل یک تکینگی واقعی است، پشتیبانی می‌شود. با بررسی رفتار متریک دوگان در ناحیه‌ی $r=0$ نشان داده می‌شود که متریک برای r خیلی کوچک همراه با یک میدان دیلاتون غیربدیهی و یک میدان ماکسول مناسب معادلات حرکت ریسمان دورگه را برآورده می‌کنند. جالب‌ترین نشانه‌ی این کار این است که برای r بزرگ، متریک دوگان به جواب مجانبی نزدیک می‌شود؛ در واقع، متریک دوگان یک متریک AdS_4 مجانبی است. در نهایت، ما در مورد D–شامه‌ها و شرایط مرزی جهان‌رویه که توسط یک ماتریس چسب روی مدل سیگمای AdS_4 تعریف شده است، بحث می‌کنیم. با استفاده از نگاشت دوگانگی به‌دست‌آمده از توصیف تبدیل کانونیک از دوگانگی-T پواسون–لی برای ماتریس چسب که به‌طور محلی خواص D–شامه‌ها را تعریف می‌کند، سه حالت مختلف از ماتریس‌های چسب برای مدل سیگمای AdS_4 و جفت دوگان آن را می‌یابیم.

واژه‌های کلیدی: متریک AdS_4، مدل سیگما، دوگانگی ریسمان، نظریه ریسمان دورگه، شرایط مرزی جهان رویه، D-شامه

۱. مقدمه

زمانی که بتوانیم به یک پدیده از دو دیدگاه مختلف نگاه کنیم یا به عبارتی بتوان یک نظریه را به نظریه‌ی دیگر نگاشت کرد، گفته می‌شود بین این نظریه‌ها نوعی دوگانگی رخ داده است. در نظریه ریسمان دوگانگی روی فضای هدف که دوگانگی–T[1] نامیده می‌شود، در اواخر دهه هشتاد میلادی کشف شد [۱،۲،۳]. در این نوع از دوگانگی، نظریه‌های ابرریسمان نوع IIA و نوع IIB و همچنین نظریه‌های ابرریسمان دورگه[2] به هم مرتبط می‌شوند، به گونه‌ای که گویی دو نسخه از یک نظریه‌ی بنیادین هستند. تقارن دوگانگی در نظریه ریسمان برای اولین بار در فشرده‌سازی چنبره‌ای ریسمان‌های بسته به صورت دوگانگی $R\leftrightarrow \alpha'/R$ نشان داده شد [۴]، به طوری که α' شیب رجی[3] نامیده می‌شود که معادل عکس کشش ریسمان است. بعدها با مطالعه دوگانگی در مدل‌های سیگمای ۲–بعدی درک بهتری از این دوگانگی ارائه شد [۲]. تقارن دوگانگی نقش مهمی در نظریه ریسمان ایفا می کند؛ در واقع این تقارن درک ما را از هندسه‌ی فضا–زمان از دیدگاه نظریه ریسمان عمیق‌تر می–

۱. T-duality

۲. Heterotic

۱. Regee

کند. تبدیل دوگانگی–T، دو مدل سیگما که فضاهای هدف آن–ها از لحاظ هندسی کاملا تفاوت دارند را به هم ربط می‌دهد، به‌طوری که این دو مدل از لحاظ فیزیکی معادل هستند. به راستی نشان داده شده است که تبدیل دوگانگی–T نوعی تبدیل کانونیک است [۸،۷،۶،۵]. در مورد مدل‌های سیگمای ۲–بعدی [۹]، دوگانگی–T معادلات حرکت و اتحادهای بایانکی را به هم تبدیل می‌کند. در نظریه ریسمان نیز تقریبا این‌گونه است، با این تفاوت که در نظریه ریسمان، دوگانگی هندسه‌ی فضای هدف را تغییر می‌دهد. به عنوان مثال، انتشار یک ریسمان در فضا–زمانی که یک بعد آن دایره‌ای به شعاع R است، توسط دوگانگی–T به ریسمان منتشر شده در یک فضا–زمانی که یک بعد آن دایره‌ای به شعاع α'/R است مربوط می‌شود که از نقطه نظر فیزیکی این فضاها با هم معادل‌اند [۱۰]. همچنین تکانه به صورت گسسته نقش تعداد تاب[۱] برداشتگی‌های ریسمان را در توصیف فضای دوگان ایفا می‌کند. بوشر نشان داد که [۳،۲] تقارن $O(d,d,\mathbb{Z})$ می‌تواند خاصیت مربوط به همه‌ی ریسمان‌های انتشاریافته در فضا–زمان خمیده باشد، به شرطی که فضا–زمان این‌گونه از ریسمان‌ها دارای تقارن ایزومتری آبلی باشد. واژه تقارن در مورد دوگانگی–T به این دلیل به کار رفته است که فضای مدولی مربوط به تبدیلات $O(d,d,\mathbb{Z})$ همان گروه تقارنی مربوط به کنش موثر ریسمان است. بوشر همچنین نشان داد که تقارن دوگانگی–T همدیس بودن فضا را تا مرتبه‌ی یک حلقه حفظ می‌کند. او در رساله دکتری‌اش احتمال تعمیم تبدیلات دوگانگی آبلی به غیرآبلی را نیز پیش‌بینی کرده بود، تا این که دلاوسا و کویویدو [۱۱] تعمیم به حالت غیرآبلی را به شیوه‌ی مشخصی انجام دادند که در این مورد مشکل بازگشت‌پذیری به مدل اصلی وجود داشت؛ یعنی در مورد غیرآبلی همیشه تبدیلات دوگانگی معکوس‌پذیر نبودند. برخلاف کارهای بوشر در دوگانگی آبلی استاندارد که وجود تقارن ایزومتری آبلی الزامی بود، در حالت غیر آبلی مدل دوگان دیگر دارای تقارن ایزومتری نبود، لذا با بازگشت به مدل اصلی از مدل دوگان به مانند دوگانگی آبلی امکان‌پذیر نبود. به دنبال آن گیوون و روچک نشان دادند که [۱۲] علیرغم حفظ نشدن تقارن ایزومتری تحت تبدیلات غیر آبلی، مفهوم دوگانگی استاندارد یعنی تبدیلی که معادلات حرکت مدل اصلی را به اتحادهای بایانکی مدل دوگان ببرد و برگرداند همچنان حفظ می‌شود [۱۳]. مشکل برگشت–ناپذیری به مدل اصلی همچنان وجود داشت تا اینکه کلیمچیک و شورا [۱۵،۱۴] راه حلی برای این مشکل پیدا کردند. آن‌ها لزوم داشتن تقارن ایزومتری را از بین بردند و به جای آن از قید ضعیف‌تری استفاده کردند و فرض کردند که برای داشتن تقارن دوگانگی لازم نیست که دیگر فضای هدف دارای تقارن ایزومتری باشد، بلکه کافیست که جریان نوتری مربوط به اثر آزاد یک گروه لی G روی خمینه هدف $\mathcal{M}$انتگرال‌پذیر باشد، به عبارت دیگر، مولفه‌های جریان نوتری در معادله التصاق تخت با ثابت ساختار گروه دوگان $\tilde{G}$ صدق کند. به این ترتیب آن‌ها برای ماتریس پس‌زمینه مدل، معادله دیفرانسیلی به دست آوردند که به شرط وجود تقارن پواسون–لی[۲] معروف شد. علت نامگذاری تقارن پواسون–لی به این دلیل بود که هر دو گروه–های G و $\tilde{G}$ در این رهیافت دارای ساختار پواسون–لی بودند و جبرهای لی $\mathcal{G}$ و $\tilde{\mathcal{G}}$ مربوط به گروه‌های لی G و $\tilde{G}$ نیز دارای ساختار دوجبرلی بودند. به هر حال تقارن پواسون–لی طوری مطرح شده بود که در حالت‌های خاص، دوگانگی آبلی و غیر آبلی استاندارد را شامل می‌شد. دیگر با این روش رسیدن به مدل اصلی از تبدیلات دوگان مشکلات قبلی را نداشت و به سادگی تبدیلات دوگانگی وارون‌پذیر بودند. بعد از فرمول‌بندی تقارن پواسون–لی در مدل‌های سیگمای ۲–بعدی، مثال‌های متعددی از این مدل‌ها مطرح گردید. با طبقه‌بندی دوجبرهای لی ۳–بعدی از نوع بایانکی [۱۷،۱۶] تعدادی از مدل‌های سیگمای پواسون–لیT–دوگان ساخته شد و به دنبال آن با طبقه‌بندی دوتایی‌های درینفلد ۴–بعدی [۱۸] مدل‌های سیگما با تقارن پواسون–لی روی آن‌ها ساخته شدند. همان‌طور که در بالا ذکر شد، دوتایی درینفلد و یا ساختار دوجبرلی از عناصر مهم و ضروری در ساختار مدل‌های سیگمای پواسون–لیT–دوگان روی گروه‌های لی است. تاکنون شاهد پیشرفت‌های زیادی در زمینه‌ی بررسی تقارن پواسون–لی در پس‌زمینه‌های فیزیکی

۲. Wind

۳. Poisson-Lie symmetry

[۱۹–۲۹] و همچنین تعمیم این تقارن به ابرگروه های لی [۳۰–۳۸] بوده‌ایم.

از طرف دیگر، پس‌زمینه‌های AdS نقش مهمی در نظریه‌ی (ابر)ریسمان ایفا کرده‌اند. در مقاله [۳۹] نشان داده شده است که مدل سیگمای ۲-بعدی با فضای هدف ابرخمینه[1] در کوانتش نظریه‌های ابرریسمان نوع IIA و نوع IIB با پس‌زمینه‌های راموند–راموند ظاهر می‌شوند. در [۴۰] نظریه ابرریسمان گرین–شوارتز از نوع IIB در پس‌زمینه $AdS_2 \times S^2 \times T^6$ با شار ۵–فرم راموند–راموند و همچنین دوگان‌های نوع IIA آن بررسی شده است؛ علاوه بر این، نشان داده شده است که قسمت بوزونی $AdS_2 \times S^2$ با فرمیون‌های متناظرش می‌توانند با یک مدل سیگمای انتگرال‌پذیر روی فضای ابرهم‌مجموعه $PSU(1,1|2)/SO(1,1) \times U(1)$ تفسیر شوند. اخیرا دوگانگی T–پواسون–لی روی پس‌زمینه‌های ابرریسمان نظیر $AdS_2 \times S^2$ مطالعه شده است [۴۱]. در این راستا یک جفت دوگان غیرآبلی برای این پس‌زمینه به دست آورده شده است، به‌طوری که متریک دوگان یک تکینگی واقعی در $r = 0$ و یک افق در ناحیه‌ی $r = 1$ را دربر می‌گیرد. در مقاله حاضر با بکارگیری دوگانگی T–پواسون–لی روی دوتایی درینفلد نیمه آبلی $(A_2, 2A_1)$ یک جفت دوگان غیرآبلی برای متریک AdS_2 به دست آورده می‌شود. مدل اصلی که تنها متریک AdS_2 را دربر می‌گیرد روی گروه لی غیر آبلی ۲-بعدی A_2 ساخته می‌شود. نشان داده می‌شود که متریک دوگان یک تکینگی واقعی در $r = 0$ را شامل می‌شود. با بررسی رفتار متریک دوگان در ناحیه‌ی $r = 0$ نشان داده می‌شود که متریک برای r خیلی کوچک همراه با یک میدان دیلاتون غیربدیهی و یک میدان ماکسول معادلات حرکت ریسمان دورگه را برآورده می‌کنند. از همه جالب‌تر، با مطالعه‌ی رفتار مجانبی متریک دوگان، دیده می‌شود که در حد $r \to \infty$ متریک دوگان به AdS_2 برمی‌گردد.

در مقاله‌ی [۴۲] با مطالعه خواص سرتاسری دوگانگی T–پواسون–لی برای ریسمان‌های باز، این دوگانگی بین ریسمان باز و D-شامه‌ها[2] (حرف D به دیریکله اشاره دارد) مطرح گردید. بعدها D-شامه‌ها و شرایط مرزی جهان‌رویه برای ریسمان‌های بوزونی تحت دوگانگی T– پواسون–لی در مقاله‌ی [۴۳] بررسی شدند. در این مقاله، با بکارگیری تبدیلات کانونیک پواسون–لیT–دوگان [۸] برای شرایط مرزی جهان‌رویه‌ی ریسمان باز نشان داده شده است که شرایط مرزی در حد کلاسیک ناوردا باقی می‌مانند، بنابراین با تبدیلات دوگانگی T– پواسون–لی سازگار خواهند بود. همچنین با استفاده از تبدیلات مذکور یک نگاشت دوگانگی برای ماتریس چسب[3] (ماتریسی که بین میدان‌های چپ‌رونده و راست‌رونده روی مرز ارتباط برقرار می‌کند) به دست آورده شد که به طور موضعی خواص D-شامه‌ها را تفسیر می‌کند. در مقاله‌ی [۴۳] همچنین شرایط مرزی و D-شامه‌ها تحت دوگانگی T– پواسون–لی برای تعدادی از مثال‌های ۲– و ۳–بعدی مشخص شده است. بعدها با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده در [۴۳] شرایط مرزی جهان‌رویه برای مدل وس–زومینو–ویتن روی گروه لی هایزنبرگ تحت دوگانگی T– پواسون–لی به دست آورده شد [۲۳]. اینجا در این مقاله با استفاده از فرمول‌بندی داده شده در [۴۳] D-شامه‌ها را تحت دوگانگی برای مدل‌های سیگمایT–دوگان غیرآبلی با متریک AdS_2 مطالعه می‌کنیم.

بخش‌بندی این مقاله به صورت زیر است: در بخش۲ ابتدا متریک فضای AdS_2 معرفی می‌گردد، سپس نشان داده می‌شود که این متریک همراه با یک میدان ماکسول و میدان دیلاتون ثابت معادلات حرکت کنش موثر ریسمان دورگه بوزونی را برآورده می‌کند. در بخش ۳ تقارن پواسون–لی روی خمینه‌ها معرفی می‌گردد؛ در ادامه ساختار مدل‌های سیگمای پواسون–لیT–دوگان روی گروه‌های لی مرور می‌شود. دوگانگی T– غیر آبلی استاندارد به عنوان حالت خاصی از دوگانگی T– پواسون–لی نیز در انتهای بخش ۳ بحث می‌شود. در بخش۴ با استفاده از رهیافت دوگانگی T- پواسون–لی، مدل سیگمای اصلی روی گروه لی غیرآبلی ۲–بعدی A_2 ساخته می‌شود که تنها

---

۱. Supermanifold

۲. D-branes

۳. Gluing matrix

متریک AdS_2 را دربر می‌گیرد. همچنین در این بخش نشان داده می‌شود که پس‌زمینه‌ی دوگان توسط یک میدان B و یک متریک که شامل یک تکینگی واقعی است، پشتیبانی می‌شود. ساختار هندسه دوگان شامل تکینگی و رفتار مجانبی متریک نیز در انتهای بخش ۴ بحث می‌شود. بخش ۵ با مروری بر تعاریف و شرایط مرزی جهان‌رویه (شرایط مرزی دیریکله و نیومن) و ماتریس چسب شروع می‌شود. در این بخش همچنین شرایط مرزی جهان‌رویه تحت دوگانگی–T پواسون–لی در چارچوب جبرلی مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۶ به عنوان یک نتیجه‌ی جدید در مورد D–شامه‌ها و شرایط مرزی جهان‌رویه که توسط یک ماتریس چسب روی مدل سیگمای AdS_2 تعریف شده است، بحث می‌کنیم. سپس با استفاده از نگاشت دوگانگی به‌دست‌آمده از توصیف تبدیل کانونیک از دوگانگی-T پواسون–لی برای ماتریس چسب که به‌طور محلی خواص D–شامه‌ها را تعریف می‌کند، سه حالت مختلف از ماتریس‌های چسب برای مدل سیگمای AdS_2 و جفت دوگان آن را می‌یابیم. بخش ۷ به نتیجه‌گیری پایانی اختصاص داده می‌شود. علاوه بر این‌ها، دو پیوست الف و ب به ترتیب تحت عناوین: مروری مقدماتی بر تعاریف D-شامه‌ها و شرایط مرزی دیریکله و نیومن، و ساختارها روی D-شامه‌ها، به انتهای مقاله اضافه شده است.

۲. متریک AdS_2 به عنوان یک جواب برای نظریه ریسمان دورگه بوزونی

عنصر خطی متناظر با فضای AdS_2 در مختصات‌های (t , r) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ds^2 = \frac{l^2}{r^2}(-dt^2 + dr^2), \qquad (1)$$

بطوریکه l شعاع AdS_2 را مشخص می‌کند. این متریک انحنای اسکالری ثابت به‌صورت $\mathcal{R} = -2/l^2$ دارد و مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی متناظر به صورت $\mathcal{R}_{tt} = -\mathcal{R}_{rr} = 1/r^2$ هستند. با در نظر گرفتن عنصر خطی (۱) در فرم استاندارد $ds^2 = G_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ و سپس با حل معادله کیلینگ $\mathcal{L}_{K_a} G_{\mu\nu} = 0$، سه بردار کیلینگ مستقل خطی به ترتیب به صورت تبدیل همدیس خاص، گسترش و انتقال به دست می‌آیند

$$K_1 = \frac{1}{2}(t^2 + r^2)\partial_t + tr\,\partial_r,$$
$$K_2 = t\partial_t + r\,\partial_r,$$
$$K_3 = -\partial_t.$$

به طور وضوح برای ناحیه $0 < r < \infty$ بردار کیلینگ K_3 با مربع نُرم $\| K_3 \|^2 = -l^2/r^2$ یک بردار زمانی منفی است که زمان‌گونه نامیده می‌شود. جبر لی جاروب شده به‌وسیله این بردارها که جبر لی ایزومتری متریک AdS_2 نامیده می‌شود، چیزی نیست جز $sl(2,\Re)$ که با روابط جابجایی زیر تعریف می‌شود

$$[K_2, K_1] = K_1, \quad [K_2, K_3] = -K_3, \quad [K_1, K_3] = K_2.$$

توجه داشته باشید که می‌توان زیرجبر لی غیر آبلی ۲-بعدی $\mathcal{A}_2$ از $sl(2,\Re)$ را به وسیله بردارهای $(T_1 = K_2, T_2 = K_1)$ با رابطه جابجایی $[T_1, T_2] = T_2$ در نظر گرفت. در بخش ۴ ما متریک فضای AdS_2 را از یک مدل سیگما روی گروه لی متناظر با زیرجبر A_2 می‌سازیم.

می‌خواهیم نشان دهیم که متریک AdS_2 (رابطه‌ی (۱)) در حضور یک میدان ماکسول $F_{\mu\nu}$ متناظر با میدان پیمانه‌ای یک-فرم A و میدان دیلاتون ثابت $\Phi = c$ معادلات حرکت کنش موثر ریسمان دورگه بوزونی را برآورده می‌کنند. این جا ما با کنش انرژی‌های پایین نظریه ریسمان دورگه سروکار داریم. کنش متناظر با یک متریک $G_{\mu\nu}$، یک میدان دیلاتون Φ، یک میدان ماکسول $F_{\mu\nu}$ و یک سه–فرم $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$ تفسیر می‌شود. میدان ماکسول به یک زیرگروه $U(1)$ از گروه پیمانه‌ای نسبت داده می‌شود (توجه داشته باشید که بقیه میدان‌های پیمانه‌ای و همچنین فرمیون‌ها در این نظریه غائب فرض شده‌اند).

میدان‌های ذکر شده در بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B = \frac{1}{2!} B_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu, \qquad (2)$$

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu, \qquad (3)$$

$$A = A_\mu dx^\mu, \qquad (4)$$

به طوری‌که $F = dA$ و به این ترتیب داریم

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (5)$$

ما همچنین شدت میدان $\mathcal{H}=dB-A\wedge F$ را تعریف می‌کنیم، به طوری که

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}&=\partial_\mu B_{\nu\rho}+\partial_\nu B_{\rho\mu}+\partial_\rho B_{\mu\nu}\\&\quad-A_\mu F_{\nu\rho}-A_\nu F_{\rho\mu}-A_\rho F_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{۶}$$

کنش متناظر در یک فضا–زمان d–بعدی با مختصات‌های x^μ به صورت زیر داده می‌شود [۴۴]

$$\begin{aligned}S=\int d^dx\sqrt{-G}\;e^{-2\Phi}\,[\Lambda+\mathcal{R}+4\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi\\-\frac{1}{12}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}\mathcal{H}^{\mu\nu\rho}-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}],\end{aligned}\tag{۷}$$

که در آن $\mathcal{R}$ انحنای اسکالر متریک $G_{\mu\nu}$ است و $G=\det(G_{\mu\nu})$؛ به علاوه، Λ ثابت کیهان‌شناسی است که با بعد فضا–زمان و بارمرکزی یک نظریه‌ی میدان همدیس *داخلی* احتمالی ارتباط دارد. با وردش از کنش (۷) نسبت به میدان‌های $G_{\mu\nu}$، $B_{\mu\nu}$، Φ و $F_{\mu\nu}$ معادلات حرکت کنش به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\mathcal{H}_{\mu\lambda\sigma}\mathcal{H}_\nu^{\ \lambda\sigma}+2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi-2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=0,\tag{۸}$$

$$\nabla^\mu(e^{-2\Phi}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho})=0,\tag{۹}$$

$$\begin{aligned}\Lambda+\mathcal{R}-\frac{1}{12}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}\mathcal{H}^{\mu\nu\rho}+4\nabla_\mu\nabla^\mu\Phi\\-4\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=0,\end{aligned}\tag{۱۰}$$

$$\nabla^\nu(e^{-2\Phi}F_{\mu\nu})+\frac{1}{12}e^{-2\Phi}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}F^{\nu\rho}=0.\tag{۱۱}$$

به منظور حل معادلات بالا برای متریک AdS_2 می‌بایست به این نکته توجه داشته باشیم که در ۲–بعد ذاتا dB مساوی صفر است، بنابراین این جا ما $B_{\mu\nu}=0$ در نظر می‌گیریم. علاوه بر این شدت میدان $\mathcal{H}$ در ۲–بعد نیز همیشه صفر می‌شود، $\mathcal{H}_{123}=0$. در نهایت معادلات (۸)–(۱۱) با متریک (۱)، ثابت کیهان‌شناسی $\Lambda=1/l^2$، میدان دیلاتون ثابت $\Phi=c$ و میدان‌های زیر برآورده می‌شوند

$$A=\frac{l}{\sqrt{2}\,r}dt,\qquad F=\frac{l}{\sqrt{2}\,r^2}dt\wedge dr.\tag{۱۲}$$

۳. دوگانگی–T غیرآبلی از دوگانگی–T پواسون–لی

کنش مدل سیگمای غیرخطی دو–بعدی با متریک $G_{\mu\nu}(x)$ و میدان تانسوری پادمتقارن $B_{\mu\nu}(x)$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_\Sigma d\sigma^+d\sigma^-\;\varepsilon_{\mu\nu}(\mathrm{x})\,\partial_+x^\mu\partial_-x^\nu\\&=\frac{1}{2}\int_\Sigma d\sigma^+d\sigma^-\left[G_{\mu\nu}(x)+B_{\mu\nu}(x)\right]\partial_+x^\mu\partial_-x^\nu,\end{aligned}\tag{۱۳}$$

که در آن $\sigma^\pm$ مختصات‌های مخروط نوری هستند که بر حسب مختصات‌های جهان‌رویه Σ، (τ,σ)، به‌صورت $\sigma^\pm=(\tau\pm\sigma)/\sqrt{2}$ تعریف می‌شوند و x^μها، ($\mu=1,...,d$)، مختصات‌های خمینه $\mathcal{M}$ می‌باشند که جهان‌رویه در آن غوطه‌ور است. مطابق با [۱۵،۱۴] برای بررسی تقارن پواسون–لی در مدل سیگمای (۱۳)، تغییرات کنش را که از اثر آزاد [۴۵] گروه لی G روی خمینه $\mathcal{M}$ ناشی می‌شود، تحت یک تبدیل بینهایت کوچک از مختصات x^μ بررسی می‌کنیم. سپس با شرط برقرار بودن معادلات حرکت کنش (۱۳) بقای جریان‌های غیر جابجایی شرط زیر را روی ماتریس پس‌زمینه تحمیل می‌کند [۱۵،۱۴]

$$\mathcal{L}_{V_a}\varepsilon_{\lambda\nu}=\tilde{f}^{bc}_{\ \ a}\,\mathrm{V}_b^{\ \mu}\mathrm{V}_c^{\ \rho}\varepsilon_{\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu},\tag{۱۴}$$

که در آن $\tilde{f}^{bc}_{\ \ a}$ ثابت ساختار مربوط به جبر لی دوگان از گروه لی $\tilde{G}$ می‌باشد و $V_a^{\ \mu}$ها، مولفه‌های میدان‌های برداری ناوردای چپ روی گروه G هستند که به صورت $V_a=V_a^{\ \mu}\,\partial/\partial\mathrm{x}^\mu$ تعریف می‌شوند. مدل‌های سیگمایی که ماتریس پس‌زمینه‌شان در شرط (۱۴) صدق کند، گفته می‌شود دارای *تقارن پواسون–لی* هستند [۱۵،۱۴]. توجه داشته باشید که گروه‌های لی G و $\tilde{G}$ ساختار پواسون–لی دارند و جبرهای لی‌شان تشکیل دوجبر لی می‌دهند، به طوری که ثابت‌های ساختارشان اتحاد یاکوبی زیر را برآورده می‌کنند

$$f^c_{\ ab}\,\tilde{f}^{de}_{\ \ c}=f^d_{\ ac}\,\tilde{f}^{ce}_{\ \ b}+f^e_{\ ac}\,\tilde{f}^{dc}_{\ \ b}+f^d_{\ cb}\,\tilde{f}^{ce}_{\ \ a}+f^e_{\ cb}\,\tilde{f}^{dc}_{\ \ a},\tag{۱۵}$$

در ادامه، مدل‌های سیگمای پواسون–لی T–دوگان روی گروه‌های لی G و $\tilde{G}$ مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این مورد اثر گروه لی G روی خمینه‌ی هدف علاوه بر اثر آزاد، متعددی نیز خواهد بود [۴۵]، یعنی خمینه‌ی $\mathcal{M}$ همان گروه لی در نظر گرفته می‌شود، $\mathcal{M}\approx G$. همان‌طور که در مقالات [۱۴] و [۱۵] ذکر شده است دوتایی درینفلد یکی از عناصر مهم و ضروری

در ساختن مدل‌های سیگما روی گروه‌های لی G و $\tilde{G}$ است. یک دوتایی درینفلد یک گروه لی D می‌باشد به‌طوریکه جبرلی متناظرش، $\mathcal{D}$، تجزیه‌ای به‌صورت $\mathcal{D}=\mathcal{G}\oplus\tilde{\mathcal{G}}$ به داخل زیرجبرهای ماکسیمال آیزوتروپیک[1] $\mathcal{G}$ و $\tilde{\mathcal{G}}$ نسبت به فرم دوخطی غیردژنره متقارن $<.,.>$ را می‌پذیرد. ما بعلاوه G و $\tilde{G}$ را به عنوان یک جفت از زیرگروه‌های لی ماکسیمال آیزوتروپیک به ترتیب متناظر با زیرجبرهای لی $\mathcal{G}$ و $\tilde{\mathcal{G}}$ با پایه‌های $T_a\in\mathcal{G}$ و $\tilde{T}^a\in\tilde{\mathcal{G}}$ در نظر می‌گیریم. ماکسیمال آیزوتروپیک بودن زیرجبرها نسبت به فرم دوخطی به این معنی است که

$$<T_a,T_b>=<\tilde{T}^a,\tilde{T}^b>=0,\qquad <T_a,\tilde{T}^b>=\delta_a{}^b. \qquad (۱۶)$$

پایه‌های این دو زیرجبر روابط زیر را برآورده می‌کنند

$$\begin{aligned}&[T_a,T_b]=f^c{}_{ab}T_c,\quad [\tilde{T}^a,\tilde{T}^b]=\tilde{f}^{ab}_c\tilde{T}^c,\\ &[T_a,\tilde{T}^b]=\tilde{f}^{bc}_a T_c+f^b{}_{ca}\tilde{T}^c,\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

بطوریکه $f_{ab}{}^c$ و $\tilde{f}^{ab}_c$ به‌ترتیب ثابت‌های ساختار جبرهای لی $\mathcal{G}$ و $\tilde{\mathcal{G}}$ هستند. توجه داشته باشید که ساختار جبر تعریف شده از طریق معادله‌ی (۱۷)، جبرلی از دوتایی درینفلد $\mathcal{D}$ نامیده می‌شود. مطابق با [۱۵،۱۴] مدل سیگمای اصلی با یک فضای هدف درگروه لی G با کنش زیر تعریف می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\Sigma}d\sigma^+d\sigma^-\ R_+^a R_-^b\ \mathbb{E}_{ab}(g), \qquad (۱۸)$$

به‌طوری که $g\in G$ و $R_\pm^a$های تعریف شده به صورت

$$\partial_\pm g\ g^{-1}=R_\pm^a T_a=\partial_\pm x^\mu R_\mu{}^a T_a, \qquad (۱۹)$$

مولفه‌های یک-فرم‌های ناوردای راست روی گروه G هستند. ماتریس $\mathbb{E}_{ab}(g)$ نیز به صورت

$$\mathbb{E}(g)=\left(E_.^{-1}(e)+\Pi(g)\right)^{-1} \qquad (۲۰)$$

تعریف می‌شود، که در آن $E_.(e)$ ماتریس ثابت مدل سیگما نامیده می‌شود که در همسایگی عضو واحد گروه $(g=e)$ تعریف می‌شود و $\Pi(g)$ تعریف شده از طریق روابط

$$g^{-1}T_a g=a_a{}^b(g)T_b, \qquad (۲۱)$$

$$g^{-1}\tilde{T}^a g=b^{ac}(g)T_c+(a^{-1})_c{}^a(g)\tilde{T}^c, \qquad (۲۲)$$

$$\Pi(g)=b(g)a^{-1}(g). \qquad (۲۳)$$

ساختار پواسون روی گروه لی G نامیده می‌شود.

۱. Maximal isotropic

مدل سیگمای دیگری که پواسون-لی T-دوگان با مدل سیگمای (۱۸) می‌باشد، روی گروه لی دوگان $\tilde{G}$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\int_{\Sigma}d\sigma^+d\sigma^-\ \tilde{R}_{+a}\tilde{R}_{-b}\ \tilde{\mathbb{E}}^{ab}(\tilde{g}), \qquad (۲۴)$$

که در آن

$$\partial_\pm\tilde{g}\ \tilde{g}^{-1}=\tilde{R}_{\pm a}\tilde{T}^a=\partial_\pm\tilde{x}^\mu\tilde{R}_{\mu a}\tilde{T}^a, \qquad (۲۵)$$

مولفه‌های یک-فرم‌های ناوردای راست روی گروه لی $\tilde{G}$ می‌باشند. ماتریس $\tilde{\mathbb{E}}^{ab}(\tilde{g})$ نیز به صورت

$$\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{g})=\left(E_.(e)+\tilde{\Pi}(\tilde{g})\right)^{-1}, \qquad (۲۶)$$

تعریف می‌شود که در آن $\tilde{\Pi}(\tilde{g})=\tilde{b}(\tilde{g})\tilde{a}^{-1}(\tilde{g})$ ساختار پواسون روی $\tilde{G}$ می‌باشد که با تعویض کمیت‌های تیلدادار با بدون تیلدا مشابه با فرمول‌های (۲۱) و (۲۲) تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که مطابق با روابط (۲۰) و (۲۶) ارتباط بین پس‌زمینه‌ی مدل‌های اصلی و دوگان از طریق ماتریس ثابت $E_.(e)$ تعیین می‌گردد که این خود یکی از تبدیلات دوگانگی می‌باشد.

همان‌طور که در بخش مقدمه ذکر شد، تقارن پواسون-لی در حالت خاص، دوگانگی غیر آبلی استاندارد را شامل می‌شود. برای بررسی این موضوع بایستی در دوتایی درینفلد $(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$ یکی از زیرجبرها، غیرآبلی با ثابت ساختار $f^c{}_{ab}\neq 0$ و دیگری آبلی با ثابت ساختار $\tilde{f}^{ab}_c=0$ در نظر گرفته شود. سپس از روابط (۱۷) و (۲۱)-(۲۳) نتیجه‌گیری می‌شود که ساختار پواسون روی گروه لی G صفر می‌شود، $\Pi(g)=0$، که این منجر به ثابت ماندن ماتریس پس‌زمینه از رابطه‌ی (۲۰) به صورت $\mathbb{E}(g)=E_.(e)$ می‌شود. در نهایت کنش متناظر در مورد دوگانگی-T غیر آبلی به صورت زیر درمی‌آید

$$S=\frac{1}{2}\int_{\Sigma}d\sigma^+d\sigma^-\ R_+^a R_-^b\ E_{.ab}(e), \qquad (۲۷)$$

در این مورد مدل دوگان متناظر با کنش (۲۷) با همان روابط (۲۴) تا (۲۶) تعریف خواهد شد.

۴. فضای T-دوگان غیرآبلی برای متریک AdS_2

همان‌طور که قبلا ذکر شد، مفهوم دوتایی درینفلد از عناصر مهم و ضروری در ساختن مدل‌های سیگمای پواسون-لی T-دوگان روی گروه‌های لی G و $\tilde{G}$ است. در این بخش یک جفت از

مدل‌های سیگمای پواسون–لی روی دوتایی درینفلد نیمه آبلی $(A_4, 2A_1)$ به عنوان فضاهای هدف ساخته می‌شود. جبرلی از دوتایی درینفلد نیمه آبلی ۴–بعدی $(A_2, 2A_1)$ با روابط جابجایی غیرصفر زیر تعریف می‌شود

$$[T_1, T_2] = T_2,\ [T_1, \tilde{T}^2] = -\tilde{T}^2,\ [T_2, \tilde{T}^2] = \tilde{T}^1, \qquad (۲۸)$$

کـه در آن $\{T_1, T_2\}$ پایـه‌های جبرلـی A_2 هسـتند و پایـه‌های $\{\tilde{T}^1, \tilde{T}^2\}$ جبرلی آبلی $2A_1$ را تعریف می‌کننـد. همـان‌طور کـه نشان خواهیم داد مدل سیگمای اصلی پس‌زمینه AdS_2 را تفسیر می‌کند. در مدل دوگان که روی گروه لی آبلی $2A_1$ سـاخته مـی‌شود با یک تکینگی واقعی روبـه‌رو خـواهیم شـد کـه بـرای آن رفتار مجانبی مدل را نیز بررسی خواهیم کرد.

۴. ۱. مدل اصلی به عنوان پس‌زمینه‌ی AdS_2

به‌منظور ساختن کنش مدل اصلی (۱۸) (در مورد دوگانگی–T غیر آبلی، کنش (۲۷)) روی گروه لی ۲–بعدی A_2 به یک–فرم‌های ناوردای راست روی گروه نیاز داریم. برای این منظور از یک پارامتریزاسیون مناسب گروه به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$g = e^{x_1 T_1} e^{x_2 T_2}, \qquad (۲۹)$$

که در آن (x_1, x_2) مختصات‌های گروه لی A_2 هستند. با استفاده از روابط (۱۹)، (۲۸) و (۲۹) نتیجه‌گیری می‌شود که

$$R_\pm^1 = \partial_\pm x_1, \qquad R_\pm^2 = e^{x_1} \partial_\pm x_2. \qquad (۳۰)$$

چون گروه‌لی دوگان آبلی درنظر گرفته شده است، با استفاده از روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۸) می‌توان نتیجه گرفت که $\Pi(g) = 0$ است. با انتخاب ماتریس ثابت مدل سیگما به صورت

$$E_0(e) = \begin{pmatrix} l^2 & 0 \\ 0 & -l^2 \end{pmatrix}, \qquad (۳۱)$$

و سپس با استفاده از (۳۰) در (۲۷)، کنش مدل اصلی به‌صورت زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$S = \frac{1}{2}\int d\sigma^+ d\sigma^- \left[l^2 \partial_+ x_1 \partial_- x_1 - l^2 e^{2x_1} \partial_+ x_2 \partial_- x_2 \right]. \qquad (۳۲)$$

از مقایسه کنش بالا با کنش مدل سیگمای (۱۳)، عنصر خطی متریک و میدان تانسوری B به‌صورت زیر حاصل می‌گردند

$$ds^2 = l^2 (dx_1^2 - e^{2x_1} dx_2^2), \qquad (۳۳)$$

$$B = 0. \qquad (۳۴)$$

می‌توان نشان داد که تحت تبدیل مختصات زیر

$$e^{x_1} = \frac{(t^2 - r^2)}{2r},\ \ x_2 = -\frac{2t}{(t^2 - r^2)}, \qquad (۳۵)$$

متریک (۳۳) همان متریک فضای AdS_2 می‌باشد که در معادله (۱) نمایش داده شده است. به این ترتیب ما توانستیم متریک AdS_2 را از یک مدل سیگما که روی گروه لی غیرآبلی ۲–بعدی A_2 ساخته می‌شود، به‌دست آوریم. در ادامه مدل سیگمای دوگان روی گروه لی آبلی $2A_1$ به عنوان یک جفت دوگان برای فضای AdS_2 ساخته می‌شود.

۴. ۲. مدل دوگان

به منظور ساختن مدل سیگمای دوگان، گروه لی دوگان آبلی $\tilde{G} = 2A_1$ را با مختصات‌های $\tilde{x}_a = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ پارامتریزه می‌کنیم، به‌طوریکه عضو گروه مشابه با (۲۹) به صورت

$$\tilde{g} = e^{\tilde{x}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{x}_2 \tilde{T}^2}, \qquad (۳۶)$$

درنظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از روابط جابجایی (۲۸) و همچنین بکارگیری فرمول (۲۵)، یک–فرم‌های ناوردای راست روی گروه آبلی $2A_1$ به صورت زیر نتیجه می‌شوند

$$\partial_\pm \tilde{g}\, \tilde{g}^{-1} = \partial_\pm \tilde{x}_1 \tilde{T}^1 + \partial_\pm \tilde{x}_2 \tilde{T}^2,$$

که بر حسب مولفه‌ها داریم:

$$\tilde{R}_{\pm_1} = \partial_\pm \tilde{x}_1, \qquad \tilde{R}_{\pm_2} = \partial_\pm \tilde{x}_2. \qquad (۳۷)$$

علاوه بر این، با استفاده از روابط (۲۸) و (۳۶) و همچنین فرمول‌های (۲۱) و (۲۲) برای کمیت‌های تیلدادار به‌دست می‌آید که

$$\tilde{a}^a{}_b(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b}_{ab}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

سپس ساختار پواسون روی گروه لی دوگان با استفاده از فرمول (۲۳) برای کمیت‌های تیلدادار به دست می‌آید که یک نمایش ماتریسی به صورت زیر دارد

$$\tilde{\Pi}_{ab}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (۳۸)$$

با وارد کردن روابط (۳۱) و (۳۸) در فرمول (۲۶) ماتریس پس زمینه‌ی دوگان به صورت زیر بدست می‌آید

$$\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{g}) = \frac{1}{(l^4 - \tilde{x}_2^2)} \begin{pmatrix} l^2 & -\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 & -l^2 \end{pmatrix}. \tag{۳۹}$$

در نهایت با استفاده از روابط (۳۷)، (۳۹) و (۲۴)، کنش مدل دوگان به‌صورت زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \frac{1}{2}\int d\sigma^+ d\sigma^- \frac{1}{\Delta}[l^2 \ \ & \partial_+\tilde{x}_1\partial_-\tilde{x}_1 - \partial_+\tilde{x}_2\partial_-\tilde{x}_2 \\ +\tilde{x}_2 \ \ & -\partial_+\tilde{x}_1\partial_-\tilde{x}_2 + \partial_+\tilde{x}_2\partial_-\tilde{x}_1 \ ], \end{aligned} \tag{۴۰}$$

به‌طوریکه $\Delta = (l^4 - \tilde{x}_2^2)$. به منظور نوشتن عنصر خطی متریک و میدان تانسوری پادمتقارن مدل دوگان، کنش (۴۰) را با کنش مدل سیگمای (۱۳) مقایسه می‌کنیم. سپس نتیجه‌گیری می‌شود که

$$d\tilde{s}^2 = \frac{l^2}{\Delta}(d\tilde{x}_1^2 - d\tilde{x}_2^2), \tag{۴۱}$$

$$\tilde{B} = -\frac{\tilde{x}_2}{\Delta} d\tilde{x}_1 \wedge d\tilde{x}_2. \tag{۴۲}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، متریک دوگان در $\Delta = 0$ یا در نواحی $\tilde{x}_2 = \pm l^2$ تکین است. هم اکنون ممکن است این سوال پیش بیاید که این نواحی در هندسه‌ی دوگان تکینگی واقعی ایجاد می‌کنند یا خیر؟ با محاسبه‌ی انحنای اسکالر متریک می‌توان به این سوال پاسخ داد. اما قبل از این بهتر است که متریک را به شکل ساده‌تری بنویسیم.

۴. ۳. ساختار و رفتار مجانبی هندسه‌ی دوگان

به منظور تفسیر ساختار هندسه‌ی دوگان شامل تکینگی، رویداد افق و رفتار مجانبی از یک تبدیل مختصات مناسب بر حسب زمان t و شعاع r به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$\tilde{x}_1 = l^2 t, \quad \tilde{x}_2 = \cosh r, \tag{۴۳}$$

تحت تبدیل مختصات بالا، عنصر خطی متریک (۴۱) و میدان تانسوری $\tilde{B}$ (۴۲) به‌صورت زیر در می‌آیند

$$d\tilde{s}^2 = l^2(dr^2 - \frac{dt^2}{\sinh^2 r}), \tag{۴۴}$$

$$\tilde{B} = l^2 \coth r \ dt \Lambda dr. \tag{۴۵}$$

این متریک یک هندسه‌ی ایستا در فرم $ds^2 = G_{tt}(r)\,dt^2 + G_{rr}(r)\,dr^2$ را توصیف می‌کند. تکینگی ظاهری متریک در نقطه‌ی $r = 0$ است، چون در این نقطه $G_{tt} = -l^2/\sinh^2 r$ واگرا می‌شود، پس در مختصات داده شده متریک در $r = 0$ تکین به نظر می‌رسد. همچنین این متریک انحنای اسکالری به‌صورت

$$\tilde{\mathcal{R}} = -\frac{(3 + \cosh 2r)}{l^2 \sinh^2 r}, \tag{۴۶}$$

دارد که به طور وضوح در $r = 0$ واگرا می شود. به علاوه، با محاسبه اسکالر کریشمن[1] متناظر با متریک به صورت

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{(3 + \cosh 2r)^2}{l^4 \sinh^4 r}, \tag{۴۷}$$

نتیجه‌گیری می‌شود که این تکینگی علاوه بر متریک و $\tilde{\mathcal{R}}$ در اسکالر کریشمن نیز ظاهر می‌شود. براین اساس، $r = 0$ یک نقطه‌ی تکین واقعی برای متریک به حساب می‌آید که با یک تبدیل مختصات دیگر رفع شدنی نیست. از دیدگاه فیزیکی، واگرایی انحنا معمولا به این معناست که مسیرهای ژئودزیک ممکن است در زمان متناهی به این نقطه برسند و پایان یابند. به علاوه، توصیف کلاسیکی فضا-زمان در این جا اعتبار خود را از دست می‌دهد. بنابراین $r = 0$ را می‌توان یک نقطه یا مرز با شکست فیزیک کلاسیک دانست. این تکینگی نقش یک مرز درونی برای هندسه را بازی می‌کند. یعنی ناحیه مجاز فضا-زمان عملا برای $r > 0$ تعریف می‌شود و $r = 0$ انتهای فضاست نه یک نقطه‌ی معمولی درون خمینه. پس $r = 0$ بخش منظمی از فضا-زمان نیست و ادامه دادن فضا از آن نقطه معمولا ممکن نیست.

از طرف دیگر، چون متریک به زمان وابسته نیست، پس تحت انتقال زمانی ناورداست. می‌توان دید که $\zeta = \partial/\partial t$ تنها بردار کیلینگ زمانی متناظر با متریک (۴۴) است. برای ناحیه $0 < r < \infty$ این بردار با مربع نُرم

$$\|\zeta\|^2 = G_{tt} = -l^2/\sinh^2 r < 0$$

یک بردار زمانی منفی است، به طوری‌که در $r \to \infty$ به سمت صفر می‌رود و پوچ می‌شود. یعنی در آن جا ($r \to \infty$) یک افق کیلینگ حدی[2] وجود دارد. اما افق رویداد در هندسه‌های

۱. Kretschmann scalar

۱. Extremal Killing horizon

ایستا در نقطه‌ای ظاهر می‌شود که داشته باشیم: $G_{tt}(r=r_H)=0$، زیرا در آن نقطه بردار کیلینگ زمانی پوچ می‌شود. در مورد متریک دوگان (۴۴)، برای هر $r>0$ داریم که $G_{tt}=-l^2/\sinh^2 r<0$ و هیچ‌گاه G_{tt} صفر نمی‌شود. نتیجه این که در این هندسه افق رویداد در مقدار متناهی r وجود ندارد. همان‌طور که در بالا ذکر شد مولفه‌ی G_{tt} تنها در $r\to\infty$ به سمت صفر می‌رود و از این‌رو مرز $r\to\infty$ یک افق کیلینگ حدی را نشان می‌دهد. اما این افق لزوما یک افق رویداد سیاه چاله‌ای به معنای متعارف نیست. بلکه بیشتر یک افق مختصاتی/علّی است.

دیدگاه دیگر از مطالعه رفتار ژئودزیک‌های نورگونه متناظر با متریک ناشی می‌شود. برای مسیر نورگونه داریم که: $ds^2=0$. سپس از (۴۴) نتیجه‌گیری می‌شود که $dr^2=\frac{dt^2}{\sinh^2 r}$ و به این ترتیب داریم

$$dr=\pm\frac{dt}{\sinh r}\to\int\sinh r\,dr=\pm\int dt\to t\sim\cosh r,$$

این نشان می‌دهد که رسیدن به $r\to\infty$ در زمان مختصاتی t، بینهایت طول می‌کشد، ولی در زمان ویژه پوچ ممکن است متناهی باشد. این دقیقا رفتار یک افق کیلینگ حدی است. اما چون در $r=0$، نُرم $\partial/\partial t$ صفر نمی‌شود، بلکه واگرا می‌شود، پس $r=0$ به معنای دقیق افق رویداد نیست. این بیشتر مرز مختصاتی عریان[۱] است. تکینگی عریان به نوعی از تکینگی اطلاق می‌شود که توسط افق رویداد پنهان نشده باشد. در هندسه‌ی دوگان به‌دست آمده، افق رویداد وجود ندارد و $r=0$ از نظر علّی قابل مشاهده است. پس اگر $r=0$ را به صورت تکینگی تعبیر کنیم، این تکینگی عریان است. همچنین جالب به نظر می‌رسد که رفتار متریگ دوگان (۴۴) را در نواحی $r\to 0$ و $r\to\infty$ بررسی کنیم.

۴. ۱.۳. رفتار متریک دوگان در $r\to 0$

در نزدیکی $r\to 0$ داریم که $\sinh^2 r\to r^2$، سپس متریک (۴۴) به صورت زیر در می‌آید

$$d\tilde{s}^2=l^2\left(dr^2-\frac{dt^2}{r^2}\right),\qquad (۴۸)$$

و همچنین میدان تانسوری $\tilde B$ (۴۵) به صورت $\tilde B_{tr}=l^2/r$ نتیجه می‌شود که برای آن شدت میدان $\tilde{\mathcal H}$ صفر می‌شود. متریک (۴۸) انحنایی به صورت $\tilde{\mathcal R}=-4/l^2r^2$ دارد که در $r=0$ بینهایت می‌شود. پس تکینگی در $r=0$ یک تکینگی واقعی هندسی/فیزیکی است. به عنوان یک نتیجه‌ی جالب ما نشان داده‌ایم که متریک (۴۸) در غیاب شدت میدان معادلات حرکت کنش ریسمان دورگه بوزونی (معادلات (۸)–(۱۱)) را با ثابت کیهان‌شناسی صفر و میدان‌های زیر برآورده می‌کند

$$A=\frac{l}{\sqrt{2}\,r}dt,\qquad \Phi=c_0-\frac{1}{2}Log\,r.\qquad (۴۹)$$

۴. ۲.۳. رفتار متریک دوگان در $r\to\infty$

به‌منظور بررسی رفتار مجانبی متریک دوگان، رفتار متریک را در ناحیه‌ی دور از تکینگی مطالعه می‌کنیم، برای $r\to\infty$ داریم: $\sinh r\to e^r/2$ و به این ترتیب $1/\sinh^2 r\to 4e^{-2r}$، سپس خواهیم داشت

$$d\tilde{s}^2=l^2(dr^2-e^{-2r}d\tau^2),\qquad (۵۰)$$

بطوریکه $\tau=2t$ درنظر گرفته شده است. با یک تغییر متغیر ساده به فرم $e^r=\rho$، متریک (۵۰) به صورت

$$d\tilde{s}^2=\frac{l^2}{\rho^2}(-d\tau^2+d\rho^2),\qquad (۵۱)$$

درمی‌آید که چیزی جز متریک AdS_2 در معادله‌ی (۱) نخواهد بود. به علاوه، انحنای اسکالر $\tilde{\mathcal R}$ در معادله‌ی (۴۶) در حد $r\to\infty$ به سمت $-2/l^2$ می‌رود که این همان انحنای اسکالر متناظر با متریک AdS_2 است. بنابراین در حد $r\to\infty$، متریک AdS_2 تحت دوگانگی–T غیرآبلی ناوردا باقی مانده است. جالب است که این موضوع در مورد متریک AdS_3 متفاوت است. همان‌طور که در [۲۴] نشان داده شده است رفتار مجانبی متریک دوگان با AdS_3 ما را به یک متریک تخت لورنتسی هدایت می‌کند.

---

۲. Naked

توجه داشته باشید اگر با دقت بیشتری به رفتار متریک در ناحیه‌ی $r \to \infty$ نگاه کنیم، نتیجه می‌گیریم که مولفه‌ی زمانی متریک در این ناحیه به سمت صفر می‌رود، $G_{tt} = {}^{1}\!/_{\sinh^{2} r} \to 4e^{-2r} \to 0$؛ یعنی راستای زمان فشرده می‌شود. این رفتار بیشتر شبیه نزدیک شدن به یک مرز بینهایت یا ناحیه‌ی سرخ‌گرایی[1] شدید است، اما تکینگی اصلی همان $r = 0$ است. چون ناوردای انحنا در $r = 0$ واگراست، این نقطه یک مرز تکین فضا-زمان است، یعنی ساختار هندسی واقعا از هم می پاشد.

در نهایت از متریک‌های (۱) و (۴۴) دیده می‌شود که تبدیل دوگانگی متریک AdS_2 را تغییر داده است. به‌علاوه، قابل توجه است که دوگانگی، متریک AdS_2 بدون تکینگی واقعی را به یک متریک با یک نقطه‌ی تکین واقعی تبدیل کرده است. از طرف دیگر، جهت‌های زمان‌گونه تحت دوگانگی حفظ شده است.

۵. شرایط مرزی جهان‌رویه تحت دوگانگی-T پواسون-لی

همان‌طور که در بخش مقدمه ذکر شد، اولین بار D-شامه‌ها و شرایط مرزی جهان‌رویه برای ریسمان‌های بوزونی تحت دوگانگی-T پواسون-لی در مقاله‌ی [۴۳] بررسی شدند. به منظور مطالعه‌ی پیکربندی D-شامه‌های مختلف در فضای حالت‌های مرزی تحت تبدیل دوگانگی-T در مدل سیگمای AdS_2 لازم است که مروری مقدماتی بر تعاریف و شرایط مرزی دیریکله و نیومن و همچنین شرایط مرزی جهان رویه تحت دوگانگی-T پواسون-لی داشته باشیم.

۵. ۱. شرایط مرزی جهان‌رویه و ماتریس چسب

برای مطالعه شرایط مرزی روی خمینه بایستی شرایط مرزی روی جهان‌رویه را بر مختصات‌های خمینه تحمیل کرد. ما می-بایست شرایط مرزی دیریکله و نیومن (به پیوست الف مراجعه شود) را روی مرز تحمیل کنیم. یک خمینه‌ی d-بعدی به عنوان فضای هدف با مختصات‌های x^{μ}، $(\mu = 0,1,...p, p+1,..., d-1)$ و با D_p-شامه‌های مربوطه را در نظر بگیرید. به این ترتیب، $d-(p+1)$ جهت دیریکله برای مختصات‌های x^{μ} وجود دارد به طوری‌که

$$\partial_{\tau} x^{i} = 0, \qquad i = p+1,..., d-1. \tag{۵۲}$$

در هر نقطه داده شده روی D-شامه مختصات‌های موضعی x^{i} جهت‌های عمود به شامه را مشخص می‌کنند، در حالی که x^{m} ها، $(m = 0,1,...p)$ به عنوان جهت‌های نیومن جهت‌های مماس به شامه هستند. چنین سیستم مختصاتی، مختصات پذیرفته شده[2] برای شامه نامیده می‌شود. حال اگر $\#D$ و $\#N$ به ترتیب تعداد کل جهت‌های دیریکله و نیومن برای مختصات-های x^{μ} باشند، با توجه به بحث بالا خواهیم داشت:

$$\#D + \#N = d. \tag{۵۳}$$

از طرف دیگر، چون تعداد کل جهت‌های نیومن در مختصات های x^{μ} برابر $p+1$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$\#N = p+1, \qquad \#D = d-(p+1). \tag{۵۴}$$

مرز جهان‌رویه به یک D-شامه محدود می‌شود. چون ارتباط بین میدان‌های چپ‌رونده $\partial_{+} x^{\mu}$ و راست‌رونده $\partial_{-} x^{\mu}$ به واسطه مرز ایجاد می‌گردد، بنابراین یک الگوی کلی برای این ارتباط ساخته خواهد شد. هدف به‌دست آوردن محدودیت‌هایی روی این الگوی کلی خواهد بود که از وردش کنش مدل سیگمای (۱۳) حاصل خواهد شد. عمومی‌ترین شرایط مرزی موضعی که به صورت یک حدس[3] در [۴۳] در نظر گرفته شد، به صورت زیر است

$$\partial_{-} x^{\mu} = \mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu}\, \partial_{+} x^{\mu}, \tag{۵۵}$$

که در آن $\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu}$ ماتریس چسب نامیده می‌شود. این ماتریس اطلاعاتی راجع به جهت‌های دیریکله و نیومن در ویژه توابع و ویژه مقادیرش ثبت می‌کند. برای ماتریس چسب $\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu}$ یک نمایش بلوکی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{m}{}_{n} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{R}^{i}{}_{j} \end{array} \right), \tag{۵۶}$$

به‌طوری که $\mathbb{R}^{m}{}_{n}$ و $\mathbb{R}^{i}{}_{j}$ به ترتیب قسمت‌های نیومن-نیومن و دیریکله-دیریکله نامیده می‌شوند. هم اکنون با رفتن به مختصات پذیرفته شده برای شامه در یک نقطه و با نوشتن

---

۱. Redshift

۲. Adapted

۳. Ansatz

معادله (۵۲) در مختصات مخروط نوری خواهیم داشت

$$\partial_- x^i = -\partial_+ x^i = -\delta^i{}_j \, \partial_+ x^j, \qquad (۵۷)$$

از مقایسه‌ی (۵۷) با (۵۵)، شرط مرزی دیریکه به صورت زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$\mathbb{R}^i{}_j = -\delta^i{}_j. \qquad (۵۸)$$

توجه داشته باشید که شرط نیومن برای $\mathbb{R}^m{}_n$ فعلا بدون تغییر باقی می‌ماند. شرایط مرزی ذکر شده در بالا می‌بایست ناوردایی همدیس را در نقاط مرزی حفظ کند. افزون بر این، هر تقارن متناظر با یک جریان بقادار است که از وردش کنش مدل سیگمای (۱۳) نسبت به میدان مربوطه حاصل می‌گردد. در مورد ناوردایی همدیس، جریان متناظر تانسور انرژی-مومنتوم است که از وردش کنش مدل سیگما نسبت به متریک جهان‌رویه به دست می‌آید. مولفه‌های این تانسور در مختصات مخروط نوری به صورت زیر بیان می‌گردند

$$T_{\pm\pm} = G_{\mu\nu} \, \partial_\pm x^\mu \partial_\pm x^\nu, \qquad (۵۹)$$

در رابطه‌ی بالا، T_{++} جریان چپ‌رونده نامیده می‌شود که فقط به σ^+ وابسته می‌باشد، در حالی که T_{--} به عنوان جریان راست‌رونده به σ^- بستگی دارد. برای اطمینان از ناوردایی همدیس روی مرز نیاز به تحمیل بقای جریان روی مرز داریم. در حالت کلی برای به دست آوردن شرط مرزی برای یک جریان داده شده از بار نسبت داده شده به آن جریان استفاده می‌شود، به‌طوری که بار بقا خواهد داشت. با بکارگیری بحث بالا برای تانسور انرژی-مومنتوم خواهیم داشت

$$T_{++} - T_{--} = ۰. \qquad (۶۰)$$

به این ترتیب با استفاده از روابط (۵۵)، (۵۹) و (۶۰) نتیجه-گیری می‌شود که

$$\mathbb{R}^\mu{}_\rho G_{\mu\nu} \, \mathbb{R}^\nu{}_\sigma = G_{\rho\sigma}, \qquad (۶۱)$$

این رابطه ناوردایی متریک خمینه توسط ماتریس چسب را نشان می‌دهد؛ به عبارت دیگر، بیانگر ناوردایی همدیس روی مرز در یک مدل سیگما روی خمینه است.

۵. ۲. شرایط مرزی در چارچوب جبرلی

قبل از بحث راجع به شرایط مرزی تحت دوگانگی-T پواسون-لی می‌خواهیم شرایط مرزی داده شده در بالا را در چارچوب جبرلی بنویسیم، زیرا در چارچوب جبرلی محاسبه‌ی نگاشت دوگانگی برای ماتریس چسب ساده‌تر خواهد شد. برای نوشتن معادلات در چارچوب جبرلی، ابتدا یک گروه لی G با متریک جبرلی $\Omega_{ab} = \langle T_a, T_b \rangle$ و یک-فرم‌های ناوردای راست $\mathrm{R}_\mu{}^a$ در نظر بگیرید. با استفاده از یک-فرم‌ها، ماتریس چسب در چارچوب جبرلی به صورت

$$\mathbb{R}^a{}_b = R_\mu{}^a \, \mathbb{R}^\mu{}_\nu \, (R^{-1})^\nu{}_b. \qquad (۶۲)$$

بیان می‌گردد. مشابه رابطه‌ی (۶۲) را می‌توان برای متریک خمینه $G_{\mu\nu}$ و تصویرگرهای $\mathcal{Q}^\mu{}_\nu$ و $\mathcal{N}^\mu{}_\nu$(ساختار این تصویرگرها در پیوست ب بحث شده است) نیز تکرار کرد. در نهایت شرایط مرزی را در چارچوب جبرلی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$R^a_- = \mathbb{R}^a{}_b \, R^b_+, \qquad (۶۳)$$

$$\mathbb{R}^c{}_a \, \Omega_{cd} \, \mathbb{R}^d{}_b = \Omega_{ab}, \qquad (۶۴)$$

$$\mathcal{Q}^a{}_b \, \mathbb{R}^b{}_c = \mathbb{R}^a{}_b \, \mathcal{Q}^b{}_c = -\mathcal{Q}^a{}_c, \qquad (۶۵)$$

$$\mathcal{N}^d{}_a \, \mathbb{E}_{cd}(g) \, \mathcal{N}^c{}_b - \mathcal{N}^d{}_a \, \mathbb{E}_{dc}(g) \, \mathcal{N}^c{}_e \, \mathbb{R}^e{}_b = ۰, \qquad (۶۶)$$

$$\mathcal{N}^c{}_a \, \Omega_{cd} \, \mathcal{Q}^d{}_b = 0. \qquad (۶۷)$$

از رابطه‌ی (۶۳) دیده می‌شود که ماتریس چسب $\mathbb{R}^a{}_b$ به عنوان یک نگاشت، جریان‌ها را در مرز جهان‌رویه از R^a_+ به R^a_- می-نگارد. در واقع $\mathbb{R}^a{}_b$ نگاشتی از جبرلی به خود جبرلی است؛ لذا می‌توان نقش یک خودریختی از جبرلی را به آن نسبت داد.

در رابطه‌ی (۵۸) نشان داده شد که بلوک دیریکله-دیریکله از ماتریس $\mathbb{R}^a{}_b$ به صورت $\mathbb{R}^i{}_j = -\delta^i{}_j$ نتیجه می‌شود. برای به دست آوردن بلوک غیرصفر نیومن-نیومن از شرط (۶۶) استفاده می‌کنیم. می‌توان این شرط را در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{N}^T \, \mathbb{E}^T(g) \, \mathcal{N} - \mathcal{N}^T \, \mathbb{E}(g) \, \mathcal{N} \mathbb{R} = ۰, \qquad (۶۸)$$

در بلوک نیومن-نیومن چون همه‌ی جهت ها نیومن هستند، بنابراین $\mathcal{N}^a{}_b$ معکوس‌پذیر خواهد بود. به این ترتیب رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر ساده‌تر کرد

$$\mathbb{R}^{Neumann} = (\mathcal{N}^T\mathbb{E}(g)\mathcal{N})^{-1}(\mathcal{N}^T\mathbb{E}(g)\mathcal{N})^T, \tag{۶۹}$$

در نهایت ماتریس چسب ${\mathbb{R}^a}_b$ با استفاده از (۵۸) و (۶۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbb{R}^a{}_b = \left(\begin{array}{c|c} (\mathcal{N}^T\mathbb{E}(g)\mathcal{N})^{-1}(\mathcal{N}^T\mathbb{E}(g)\mathcal{N})^T & \cdot \\ \cdot & -\delta^i{}_j \end{array}\right). \tag{۷۰}$$

در ادامه به هدف اصلی این بخش نزدیک می‌شویم که چیزی جز محاسبه‌ی تبدیل ماتریس چسب تحت دوگانگی-T پواسون-لی نیست. در واقع با پیدا کردن ماتریس چسب دوگان به این سوال پاسخ می‌دهیم که چگونه دوگانگی-T پواسون-لی روی شرایط مرزی جهان‌رویه اثر می‌گذارد؟

۵. ۳. تبدیلات پواسون-لی و نگاشت دوگانگی برای ماتریس چسب

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از تبدیلات دوگانگی-T پواسون-لی نگاشت دوگانگی مربوط به ماتریس چسب را به دست آوریم. همان‌طور که قبلا هم ذکر شد، ماتریس چسب و دوگانش در بررسی شرایط مرزی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند، زیرا این ماتریس‌ها به طور موضعی خواص $D-$ شامه‌ها را تفسیر می‌کنند. اسفتسوس دوگانگی-T پواسون-لی را به عنوان یک تبدیل مشخص بین متغیرهای کانونیک مدل سیگمای اصلی و دوگان فرمول‌بندی کرد [۸]. این تبدیل روی یک دوتایی درینفلد با زیرگروه‌های G و $\tilde{G}$ بین دوجفت از متغیرهای (R^a_σ, P_a) و $((\tilde{R}_\sigma)_a, \tilde{P}^a)$ به صورت زیر بیان می‌گردد [۸]

$$R^a_\sigma = ({\delta^a}_b - \Pi^{ac}\tilde{\Pi}_{cb})\tilde{P}^b - \Pi^{ab}(\tilde{R}_\sigma)_b, \tag{۷۱}$$

$$P_a = \tilde{\Pi}_{ab}\tilde{P}^b + (\tilde{R}_\sigma)_a. \tag{۷۲}$$

به‌طوری که P_a و $\tilde{P}^a$ به صورت $P_a = (R^{-1})^\mu{}_a\, P_\mu$ و $\tilde{P}^a = (\tilde{R}^{-1})^{\mu a}\,\tilde{P}_\mu$ تعریف می‌شوند که در آن P_μ و $\tilde{P}_\mu$ به ترتیب مومنتوم‌های همیوغ با مختصه‌های x^μ و $\tilde{x}^\mu$ از کنش (۱۳) را نشان می‌دهند. با استفاده از تبدیل مختصات جهان‌رویه (τ,σ) بر حسب مختصات مخروط نوری می‌توان R^a_σ و P_a را بر حسب جریان‌های چپ‌رونده و راست‌رونده به صورت زیر تعریف کرد

$$R^a_\sigma = \frac{1}{2}(R^a_+ - R^a_-), \tag{۷۳}$$

$$P_a = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}^T_{ab}(g)\, R^b_+ + \mathbb{E}_{ab}(g)\, R^b_-\Big). \tag{۷۴}$$

توجه داشته باشید که روابط بالا برای کمیت‌های تیلتادار (روی گروه دوگان) به صورت زیر داده می‌شوند

$$(\tilde{R}_\sigma)_a = \frac{1}{2}(\tilde{R}_{+a} - \tilde{R}_{-a}), \tag{۷۵}$$

$$\tilde{P}^a = \frac{1}{2}\Big(\tilde{\mathbb{E}}^{Tab}(\tilde{g})\,\tilde{R}_{+b} + \tilde{\mathbb{E}}^{ab}(\tilde{g})\,\tilde{R}_{-b}\Big). \tag{۷۶}$$

حال برای به دست آوردن شرایط مرزی دوگان به تبدیلی از $R^a_\pm$ به $\tilde{R}_{\pm a}$ نیاز داریم. ابتدا با جایگذاری (۷۴) در سمت چپ معادله (۷۲) و سپس با جایگذاری (۷۵) و (۷۶) در سمت راست (۷۲) به روابط زیر می‌رسیم

$$\mathbb{E}_{ba}\, R^b_+ = ({\delta_a}^c + \tilde{\Pi}_{ab}\tilde{\mathbb{E}}^{cb})\tilde{R}_{+c}, \tag{۷۷}$$

$$\mathbb{E}_{ab}\, R^b_- = -({\delta_a}^c - \tilde{\Pi}_{ab}\tilde{\mathbb{E}}^{bc})\tilde{R}_{-c}. \tag{۷۸}$$

در ادامه از تعریف ماتریس‌های پس‌زمینه $\mathbb{E}(g)$ و $\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{g})$ به ترتیب از معادلات (۲۰) و (۲۶) استفاده می‌کنیم که نتیجه منجر به رابطه‌ی تبدیلی یک-فرم‌ها به صورت زیر خواهد شد [۴۳]

$$\tilde{R}_{+a} = (\tilde{\mathbb{E}})^{-1}_{ba}\,(E_{\cdot}^{-1})^{cb}\,\mathbb{E}_{dc} R^d_+, \tag{۷۹}$$

$$\tilde{R}_{-a} = -(\tilde{\mathbb{E}})^{-1}_{ab}\,(E_{\cdot}^{-1})^{bc}\,\mathbb{E}_{cd} R^d_-. \tag{۸۰}$$

از طرف دیگر، مشابه شرط مرزی (۶۳) را می‌توان روی گروه لی دوگان به صورت زیر بیان کرد

$$\tilde{R}_{-a} = \tilde{\mathbb{R}}_a{}^b\,\tilde{R}_{+b}, \tag{۸۱}$$

که در آن $\tilde{\mathbb{R}}_a{}^b$ ماتریس چسب دوگان نامیده می‌شود. حال با جای‌گذاری روابط (۷۹) و (۸۰) در (۸۱) ماتریس چسب دوگان بر حسب ${\mathbb{R}^a}_b$ به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\tilde{\mathbb{R}}_a{}^b = -(\tilde{\mathbb{E}})^{-1}_{ac}\,(E_{\cdot}^{-1})^{cd}\,\mathbb{E}_{de}\,\mathbb{R}^e{}_f\,(\mathbb{E}^{-1})^{hf}\,E_{\cdot gh}\,\tilde{\mathbb{E}}^{bg}. \tag{۸۲}$$

رابطه‌ی بالا تبدیل ماتریس چسب تحت دوگانگی نامیده می‌شود. با گرفتن دترمینان از طرفین معادله‌ی (۸۲) نتیجه می‌گیریم که $\det\tilde{\mathbb{R}} = \det(-\mathbb{R})$. این رابطه در بخش بعدی از اهمیت خاصی برخوردار خواهد بود.

در بخش بعدی با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده در بالا، شرایط مرزی جهان‌رویه و پیکربندی D-شامه‌های مختلف در فضای حالت‌های مرزی تحت تبدیل دوگانگی-T در مدل سیگمای AdS_2 را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۶. شرایط مرزی جهان‌رویه در پس‌زمینه‌ی AdS_2 تحت دوگانگی-T غیرآبلی

در این بخش به عنوان یک مثال D-شامه‌ها و شرایط مرزی جهان‌رویه را برای مدل‌های سیگمای T-دوگان غیر آبلی که روی دوتایی درینفلد نیمه آبلی $(\mathcal{A}_1, 2\mathcal{A}_1)$ ساخته شدند، مطالعه می‌کنیم. در این راستا، نتایج تبدیل دوگانگی ماتریس چسب برای این مدل‌ها بررسی می‌شوند. مطابق با فرمول تبدیل دوگانگی ماتریس چسب در رابطه‌ی (۸۲) به میدان‌های پس‌زمینه‌ی $\mathbb{E}_{ab}(g)$ و $\tilde{\mathbb{E}}^{ab}(\tilde{g})$ نیاز داریم. همان طور که در انتهای بخش ۳ ذکر شد، در مورد دوگانگی غیرآبلی ساختار پواسون روی گروه G صفر می‌شود، یعنی $\Pi(g)=0$ و به این ترتیب خواهیم داشت که $\mathbb{E}(g)=E_{.}(e)$. در این مثال که با دوگانگی-T غیرآبلی سروکار داریم، جزئیات محاسبه‌ی مدل‌ها در بخش ۴ آورده شده است. ماتریس‌های $E_{.}(e)$ و $\tilde{\mathbb{E}}^{ab}(\tilde{g})$ متناظر به ترتیب با روابط (۳۱) و (۳۹) داده می‌شوند. از همه مهمتر، لازم است که فرمول (۸۲) را در مورد دوگانگی غیرآبلی به صورت زیر ساده‌سازی کنیم

$$\tilde{\mathbb{R}}_a{}^b = -(\tilde{\mathbb{E}})^{-1}_{ac}\, \mathbb{R}^c{}_d\, (\tilde{\mathbb{E}}^T)^{db}. \qquad (۸۳)$$

مطابق با رابطه‌ی (۷۰) شامه‌ی اصلی می‌تواند یک و یا دو جهت نیومن را دربر گیرد. با در نظر گرفتن همه‌ی جهت‌های ممکن برای شامه‌ی اصلی، D-شامه‌ها را در خمینه‌ی گروهی دوگان مطالعه می‌کنیم.

مورد اول: در مورد اول فرض می‌شود که همه‌ی جهت‌های شامه‌ی اصلی دیریکله باشند، یعنی مطابق با رابطه‌ی (۵۴) داریم: $\#N=p+1=0$ و $\#D=d-0=2$، در نتیجه $p=-1$ و به این ترتیب در شامه‌ی اصلی با یک $D_{(-1)}$-شامه روبرو هستیم. به علاوه، چون همه‌ی جهت‌های شامه دیریکله هستند، تصویرگرهای دیریکله و نیومن به ترتیب به صورت $\mathcal{Q}^a{}_b=\delta^a{}_b$ و $\mathcal{N}^a{}_b=0$ داده می‌شوند. بر این اساس، مطابق با (۷۰) ماتریس چسب شامه به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathbb{R}^a{}_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (۸۴)$$

با استفاده از این ماتریس چسب و یک-فرم‌های ناوردای راست در رابطه‌ی (۳۰) و همچنین فرمول (۶۳)، شرط مرزی دیریکله به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$e^{x_1}\,\partial_\tau x_2 = 0, \qquad \partial_\tau x_1 = 0, \qquad (۸۵)$$

که با شرط مرزی در فرمول (۵۲) در توافق است. حال می‌خواهیم ببینیم هر گاه در شامه‌ی اصلی یک $D_{(-1)}$-شامه داشته باشیم، در شامه‌ی دوگان چه اتفاقی می‌افتد؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا ماتریس چسب دوگان را از فرمول (۸۳) محاسبه می‌کنیم. با جای‌گذاری ماتریس پس‌زمینه‌ی دوگان $\tilde{\mathbb{E}}^{ab}(\tilde{g})$ (رابطه‌ی (۳۹)) و ماتریس چسب (۸۴) در فرمول (۸۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{R}}_a{}^b &= (\tilde{\mathbb{E}})^{-1}_{ac}\,(\tilde{\mathbb{E}}^T)^{cb} \\ &= \frac{1}{l^4-\tilde{x}_2^2}\begin{pmatrix} l^4+\tilde{x}_2^2 & 2l^2\tilde{x}_2 \\ 2l^2\tilde{x}_2 & l^4+\tilde{x}_2^2 \end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad (۸۶)$$

به سادگی می‌توان نشان داد $\det\tilde{\mathbb{R}}=1$، که این با شرط $\det\tilde{\mathbb{R}}=\det(-\mathbb{R})$ که بعد از فرمول (۸۲) ذکر شد سازگار است. همان‌طور که در انتهای پیوست ب آورده شده است، زمانی که شامه دربرگیرنده‌ی کل فضا باشد، ماتریس چسب مطابق با رابطه‌ی (ب-۸) داده می‌شود. هر گاه (ب-۸) را برای پس‌زمینه‌ی دوگان در چارچوب جبر لی بنویسیم، به رابطه‌ی (۸۶) می‌رسیم. این نشان می‌دهد که شامه‌ی دوگان در بالا دربرگیرنده‌ی کل فضاست. در این مورد تصویرگرهای دیریکله و نیومن به ترتیب به صورت $\tilde{\mathcal{Q}}_a{}^b=0$ و $\tilde{\mathcal{N}}_a{}^b=\delta_a{}^b$ داده می‌شوند و این بیانگر این است که همه‌ی جهت‌های شامه‌ی دوگان نیومن هستند. به منظور نوشتن شرایط مرزی دوگان، ماتریس چسب (۸۶) و یک-فرم‌های ناوردای راست از رابطه‌ی (۳۷) را در فرمول (۸۱) جایگذاری می‌کنیم، سپس شرط مرزی نویمن به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_2^2\,\partial_\tau\tilde{x}_1 + l^4\partial_\sigma\tilde{x}_1 + l^2\tilde{x}_2(\partial_\tau\tilde{x}_2+\partial_\sigma\tilde{x}_2)=0,\\ &\tilde{x}_2^2\,\partial_\tau\tilde{x}_2 + l^4\partial_\sigma\tilde{x}_2 + l^2\tilde{x}_2(\partial_\tau\tilde{x}_1+\partial_\sigma\tilde{x}_1)=0.\end{aligned} \qquad (۸۷)$$

به این ترتیب، چون $\#N=p+1=2$، پس در خمینه‌ی دوگان

با یک D_1–شامه روبرو هستیم. در نهایت از این مورد نتیجه‌گیری می‌شود که دوگان $D_{(-1)}$–شامه یک D_1–شامه است.

مورد دوم: در این مورد شامه‌ی اصلی یک جهت دیریکه و یک جهت نیومن را دربر می‌گیرد. یعنی، $\#D=1$ و $\#N=p+1=1$، در نتیجه $p=0$ و به این ترتیب در شامه‌ی اصلی با یک D_0–شامه روبرو هستیم. به علاوه، در این مورد تصویرگرهای دیریکله و نیومن به ترتیب به صورت $\mathcal{Q}^a{}_b = diag(0,1)$ و $\mathcal{N}^a{}_b = diag(1,0)$ داده می‌شوند. از همه مهمتر، ماتریس چسب شامه‌ی اصلی با استفاده از رابطه‌ی (۷۰) به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathbb{R}^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (88)$$

در این مورد شرایط مرزی با استفاده از فرمول (۶۳) به صورت

$$\begin{aligned} e^{x_1}\, \partial_\tau x_2 &= 0, \\ \partial_\sigma x_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (89)$$

نتیجه می‌شود که مورد اول به شرط مرزی دیریکله و دومی به نیومن اشاره دارد. با استفاده از روابط (۳۹) و (۸۸)، ماتریس چسب دوگان نیز از (۸۳) به صورت زیر حاصل می‌گردد

$$\tilde{\mathbb{R}} = -\tilde{\mathbb{E}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbb{E}}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (90)$$

برای این ماتریس چسب شرایط مرزی دوگان با استفاده از فرمول (۸۱) به صورت زیر نتیجه می‌شوند

$$\begin{aligned} \partial_\tau \tilde{x}_1 &= 0, \\ \partial_\sigma \tilde{x}_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (91)$$

که به ترتیب به شرایط مرزی دیریکله و نیومن اشاره دارند. بر این اساس، شامه‌ی دوگان نیز مشابه شامه‌ی اصلی با همان تصویرگرهای مشابه یک جهت دیریکه و یک جهت نیومن را دربر می‌گیرد؛ یعنی D_0–شامه تنها با یک D_0–شامه دوگان است.

مورد سوم: هر گاه همه جهت‌های شامه‌ی اصلی نیومن باشند، یعنی شامه دربر گیرنده‌ی کل فضا باشد، خواهیم داشت: $\#N=p+1=2$، که در آن صورت این مورد به یک D_1–شامه اشاره دارد. همچنین در این‌جا تصویرگرها به صورت $\mathcal{Q}^a{}_b = 0$ و $\mathcal{N}^a{}_b = \delta^a{}_b$ درمی‌آیند. به این ترتیب، ماتریس چسب شامه مطابق با فرمول (۷۰) به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\mathbb{R} = \mathbb{E}^{-1}\, \mathbb{E}^T = E_.^{-1}\, E_.^T = E_.^{-1}\, E_. = \mathbb{I}_{2\times 2}, \qquad (92)$$

که در آن $\mathbb{I}_{2\times 2}$ نشان دهنده‌ی ماتریس واحد است. در این مورد شرایط مرزی نیومن به صورت

$$\begin{aligned} e^{x_1}\, \partial_\sigma x_2 &= 0, \\ \partial_\sigma x_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (93)$$

حاصل می‌گردند. سپس ماتریس چسب دوگان متناظر مطابق با رابطه‌ی (۸۳) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\tilde{\mathbb{R}} = -\tilde{\mathbb{E}}^{-1}\, \tilde{\mathbb{E}}^T = -\frac{1}{l^4 - \tilde{x}_2^2} \begin{pmatrix} l^4 + \tilde{x}_2^2 & 2l^2 \tilde{x}_2 \\ 2l^2 \tilde{x}_2 & l^4 + \tilde{x}_2^2 \end{pmatrix}. \qquad (94)$$

چون $\det(-\mathbb{R}) = \det(-\mathbb{I}_{2\times 2}) = 1$ است، نتیجه می‌گیریم که $\det \tilde{\mathbb{R}} = 1$. توجه داشته باشید که بعد از قطری کردن ماتریس $\tilde{\mathbb{R}}$ در رابطه‌ی (۹۴) می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در شامه‌ی دوگان دو حالت ممکن است رخ دهد:

(۱)–همه‌ی جهت‌ها در خمینه‌ی دوگان دیریکله باشند، یعنی $\tilde{\mathbb{R}} = diag(-1,-1) = -\mathbb{I}_{2\times 2}$، که این مورد به یک $D_{(-1)}$–شامه اشاره دارد. از مقایسه $\tilde{\mathbb{R}} = -\mathbb{I}_{2\times 2}$ با (۹۴) خواهیم داشت:

$$-\mathbb{I} = -\tilde{\mathbb{E}}^{-1}\, \tilde{\mathbb{E}}^T, \qquad (95)$$

سپس با کمک از تعریف $\tilde{\mathbb{E}}$ در رابطه‌ی (۲۶) نتیجه می‌گیریم که

$$E_.^T - E_. = 2\tilde{\Pi}(\tilde{g}), \qquad (96)$$

مطابق با (۳۱) ماتریس $E_.$ متقارن است، پس $E_. = E_.^T$، در نتیجه از (۹۶) $\tilde{\Pi}(\tilde{g})$ صفر می‌شود که با (۳۸) در تناقض است. به این ترتیب نتیجه‌گیری می‌شود که D_1–شامه نمی‌تواند دوگان $D_{(-1)}$–شامه باشد.

(۲)–همه‌ی جهت‌ها نیومن باشند، یعنی، در خمینه‌ی دوگان شامه دربرگیرنده کل فضا باشد. در آن صورت $\#N = p+1 = 2$ و با یک D_1–شامه در خمینه‌ی دوگان روبرو هستیم. ماتریس چسب متناظر به صورت $\tilde{\mathbb{R}} = diag(1,1) = \mathbb{I}_{2\times 2}$ خواهد بود. از مقایسه با (۹۴) خواهیم داشت:

$$\mathbb{I} = -\tilde{\mathbb{E}}^{-1}\, \tilde{\mathbb{E}}^T, \qquad (97)$$

سپس با کمک از تعریف $\tilde{\mathbb{E}}$ در رابطه‌ی (۲۶) نتیجه می‌گیریم که

$$E_{0}+E_{0}^{T}=0, \qquad (۹۸)$$

که این نتیجه با (۳۱) در تناقض است. در نهایت ما نتیجه می‌گیریم که D_1–شامه دوگان D_1–شامه نیز نمی‌تواند باشد.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا نشان دادیم که متریک فضای AdS_2 همراه با یک میدان ماکسول و میدان دیلاتون ثابت معادلات حرکت کنش موثر ریسمان دورگه بوزونی را برآورده می‌کند. سپس با استفاده از رهیافت دوگانگی-T پواسون–لی نشان دادیم که مدل سیگمای اصلی روی دوتایی درینفلد نیمه آبلی ۴–بعدی $(A_1,2A_1)$ تنها متریک AdS_2 را دربر می‌گیرد. همچنین نشان داده شد که پس‌زمینه‌ی دوگان توسط یک میدان B و یک متریک که شامل یک تکینگی واقعی است، پشتیبانی می‌شود. با بررسی رفتار متریک دوگان در ناحیه‌ی $r=0$ نشان دادیم که متریک برای r خیلی کوچک همراه با یک میدان دیلاتون غیربدیهی و یک میدان ماکسول معادلات حرکت ریسمان دورگه را برآورده می‌کنند. همچنین، با مطالعه‌ی رفتار مجانبی متریک دوگان در حد $r\to\infty$ دیدیم که متریک به AdS_2 برمی‌گردد، یعنی در حد $r\to\infty$، متریک AdS_2 تحت دوگانگی–T غیرآبلی ناوردا باقی مانده است.

در نهایت با مرور تعاریف و شرایط مرزی دیریکله و نیومن و همچنین شرایط مرزی جهان‌رویه تحت دوگانگی–T پواسون–لی توانستیم D–شامه‌ها و شرایط مرزی جهان‌رویه که توسط یک ماتریس چسب روی مدل سیگمای AdS_2 تعریف شده است، را به دست آوریم. برای این منظور از نگاشت دوگانگی به‌دست‌آمده از توصیف تبدیل کانونیک از دوگانگی-T پواسون–لی برای ماتریس چسب که به‌طور محلی خواصD–شامه‌ها را تعریف می‌کند، استفاده کردیم. ما دیدیم که سه حالت مختلف از ماتریس‌های چسب برای مثال مدل سیگمای AdS_2 و جفت دوگان آن می‌تواند اتفاق بیفتد. در مورد اول نشان داده شد که هر گاه در شامه‌ی اصلی همه‌ی جهت‌ها دیریکله باشند، یعنی یک $D_{(-1)}$–شامه داشته باشیم، آن گاه خمینه‌ی گروهی دوگان می‌تواند یک D_1–شامه را شامل شود. سپس مطابق با مورد دوم نتیجه گرفتیم که D_0–شامه تنها با یک D_0–شامه دوگان است. در نهایت از این مثال نتیجه‌گیری شد که D_1–شامه نمی‌تواند با $D_{(-1)}$–شامه و یا D_1–شامه دوگان باشد.

تشکر و قدردانی

نویسنده از سردبیر و داور محترم به خاطر نظرات و توصیه‌های سازنده‌شان که قطعاً به بهبود خوانایی و کیفیت مقاله کمک کرد، صمیمانه تشکر می‌کند.

پیوست الف: مروری مقدماتی بر تعریف D-شامه‌ها و شرایط مرزی دیریکله و نیومن

یک شئی گسترده شده با p بعد فضایی، D_p–شامه نامیده می‌شود [۴۶]. در نظریه ریسمان بوزونی با ۲۵ بعد فضایی، D_{25}–شامه در برگیرنده کل فضا می‌باشد. در حضور یک D–شامه نقاط انتهایی ریسمان باز بایستی روی شامه قرار بگیرند که این الزام تعدادی شرایط مرزی دیریکله را روی حرکت نقاط انتهایی ریسمان باز تحمیل می‌کند. لازم به ذکر است که همه‌ی اشیای گسترده شده در نظریه‌ی ریسمان D–شامه نیستند. به عنوان مثال، ریسمان‌ها اشیای گسترده شده با یک بعد فضایی هستند، بنابراین از آن‌ها به عنوان ۱–شامه‌ها یاد می‌شود و نه D_1–شامه‌ها. به طور کلی شامه‌ها با p بعد فضایی، p–شامه‌ها نامیده می‌شوند. ۰–شامه یک ذره را توصیف می‌کند که حرکت آن در فضا–زمان جهان خط یک–بعدی ایجاد می‌کند. به این ترتیب، جهان حجم یک p–شامه، $p+1$–بعدی می‌باشد که یک بعد زمان و p بعد باقی‌مانده ابعاد فضایی در نظر گرفته می‌شوند. اگر فرض کنیم که d تعداد کل ابعاد فضایی در نظریه باشد که در نظریه ریسمان $d=25$ است؛ سپس تعداد کل ابعاد فضا–زمان $d+1=26$ خواهد بود. اما چگونه می‌توان مختصات‌های مماس و عمود بر شامه را بر حسب مختصات‌های ریسمان بیان کرد؟

برای پاسخ به سوال بالا مختصات‌های ریسمان را با x^μ، ($\mu=0,1,...,25$) معرفی می‌کنیم. این مختصات‌ها به دو گروه تقسیم می‌شوند: گروه اول مختصات‌های مماس به جهان‌حجم شامه را شامل می‌شوند که زمان و تعداد p تا مختصات فضایی را دربر می‌گیرند، در حالی که گروه دوم، $d-p$ مختصات عمود به جهان‌حجم شامه را شامل می‌شود. به این ترتیب خواهیم داشت:

(الف-۱)
$$\underbrace{x^{p+1}, x^{p+1},...,x^d}_{\text{مختصات‌های عمودی}} \qquad \underbrace{x^0, x^1,...,x^p}_{\text{مختصات‌های مماسی}}$$

چون نقاط انتهایی ریسمان باز روی D_p-شامه قرار می‌گیرد، بنابراین مختصات عمود بر شامه از شرایط مرزی دیریکله تبعیت می کنند

(الف-۲)
$$x^i(\tau,\sigma)_{|\sigma=0} = \bar{x}^i(\tau,\sigma)_{|\sigma=\pi} = \bar{X}^i, \quad i=p+1,...,d.$$

از طرف دیگر اگر نقاط انتهایی ریسمان باز به‌طور آزاد در امتداد جهت‌های مماس به D-شامه حرکت کند، در این حالت مختصات‌های مماس به D-شامه در شرایط مرزی نیومن صدق می‌کنند

(الف-۳)
$$\frac{\partial x^m(\tau,\sigma)}{\partial\sigma}_{|\sigma=0} = \frac{\partial \bar{x}^m(\tau,\sigma)}{\partial\sigma}_{|\sigma=\pi} = 0, \quad m=0,1,...,p.$$

پیوست ب: ساختارها روی D-شامه‌ها

در این پیوست به بررسی ساختارها روی D-شامه‌ها پرداخته می‌شود. با تعریف تصویرگر دیریکله $\mathcal{Q}^\mu{}_\nu$ شروع می‌کنیم. این تصویرگر بردارهای دیریکله را به درون فضای عمود به شامه تصویر می‌کند. این بردارها، ویژه بردارهای ماتریس چسب $\mathbb{R}^\mu{}_\nu$ با ویژه مقادیر ۱− می‌باشند. به این ترتیب شرط (۵۲) از بخش ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

(ب-۱)
$$\mathcal{Q}^\mu{}_\nu\, \partial_\tau x^\nu = 0.$$

از ادغام معادلات (۵۵) و (ب-۱) به سادگی می‌توان نشان داد که

(ب-۲)
$$\mathcal{Q}^\mu{}_\rho\, \mathbb{R}^\rho{}_\nu = \mathbb{R}^\mu{}_\rho\, \mathcal{Q}^\rho{}_\nu = \mathcal{Q}^\mu{}_\nu.$$

علاوه بر این، چون $\mathcal{Q}^\mu{}_\nu$ یک تصویرگر می باشد، پس نتیجه می گیریم که

(ب-۳)
$$(\mathcal{Q}^2)^\mu{}_\rho = \mathcal{Q}^\mu{}_\nu\, \mathcal{Q}^\nu{}_\rho = \mathcal{Q}^\mu{}_\rho.$$

به طور مشابه تصویرگر نیومن $\mathcal{N}^\mu{}_\nu$ را تعریف می‌کنیم که بردارها را به درون فضای مماس به شامه تصویر می‌کند. این بردارها نیز ویژه بردارهای ماتریس $\mathbb{R}^\mu{}_\nu$ با ویژه مقادیر ۱+ می‌باشند. توجه داشته باشید که $\mathcal{N}^\mu{}_\nu$، تصویرگر مکمل برای دیریکله در نظر گرفته می‌شود، یعنی

(ب-۴)
$$\mathcal{N}^\mu{}_\nu := \delta^\mu{}_\nu - \mathcal{Q}^\mu{}_\nu,$$

همچنین با استفاده از روابط (ب-۳) و (ب-۴) می‌توان نشان داد که

(ب-۵)
$$\mathcal{N}^\mu{}_\nu\, \mathcal{Q}^\nu{}_\rho = 0,$$

علاوه بر شرایط بالا، تصویرگر نیومن شرایط مهم زیر را نیز برآورده می‌کند [۴۳]

(ب-۶)
$$\mathcal{N}^\rho{}_\mu\, \varepsilon_{\sigma\rho}(\mathrm{x})\, \mathcal{N}^\sigma{}_\nu - \mathcal{N}^\rho{}_\mu\, \varepsilon_{\rho\sigma}(\mathrm{x})\, \mathcal{N}^\sigma{}_\lambda\, \mathbb{R}^\lambda{}_\nu = 0,$$

(ب-۷)
$$\mathcal{N}^\mu{}_\rho\, G_{\mu\nu}\, \mathcal{Q}^\nu{}_\sigma = 0.$$

ما توجه می‌کنیم که در شرط (ب-۶)، $\varepsilon_{\sigma\rho}(\mathrm{x})$ همان ماتریس پس‌زمینه‌ی مدل سیگمای (۱۳) می‌باشد. همچنین رابطه‌ی (ب-۶) یک شرطی روی قسمت نیومن-نیومن از ماتریس چسب می‌باشد. در مختصات پذیرفته شده برای شامه، شامه‌هایی که در برگیرنده‌ی کل فضا[1] هستند، برای آن‌ها همه‌ی جهت‌ها نیومن می‌باشند، یعنی تصویرگر نیومن به صورت $\mathcal{N}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ است. در این مورد، معادله‌ی (ب-۶) به فرم ساده‌ی زیر نوشته درمی‌آید

(ب-۸)
$$\mathbb{R}^\mu{}_\nu = (\varepsilon^{-1})^{\mu\rho}(\mathrm{x})\, \varepsilon^T{}_{\rho\nu}(\mathrm{x}),$$

در این جا، نماد "T" معرف ترانهاده ماتریس است.

۱. Spacefilling branes

مراجع

1. N Sakai and I Senda, *Prog. Theo. Phys.*, **75** (1986) 692.
2. T H Buscher, *Phys. Lett. B* **194** (1987) 59.
3. T H Buscher, *Phys. Lett. B* **201** (1988) 466.
4. K Kikkawa and M Yamasaki, *Phys. Lett. B* **149** (1984) 357.
5. A Giveon, M. Porrati, and E Rabinovici, *Phys. Rep.*, **224** (1994) 77.
6. E Alvarez, A Alvarez-Gaume and Y Lozano, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **41** (1995) 1.
7. K Sfetsos, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **56** (1997) 302.
8. K Sfetsos, *Nucl. Phys. B* **517** (1998) 549.
9. B E Fridling and A Jevicki, *Phys. Lett. B* **134** (1984) 70.
10. K S Narain, M H Sarmadi, and E Witten, *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 369.
11. X C de la Ossa and F Quevedo, *Nucl. Phys. B* **403** (1993) 377.
12. A Giveon and M Rocek, *Nucl. Phys. B* **42** (1994) 173.
13. E Alvarez, L Alvarez-Gaume, and Y Lozano, *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 155.
14. C. Klimcik and P. Severa, *Phys. Lett. B* **351** (1995) 455.
15. C. Klimcik, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **46** (1996)116-121.
16. M A Jafarizadeh, A Rezaei-Aghdam, *Phys. Lett. B* **458** (1999) 477.
17. L. Snobl and L. Hlavaty, *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 4043.
18. L. Hlavaty and L. Snobl, *Mod. Phys. Lett. A* **17** (2002) 429.
19. M A Lledo and V S Varadarajan, *Lett. Math. Phys.* **45** (1998) 247.
20. S Majid and E J Beggs, *Comm. Math. Phys*. **220** (2001) 455.
21. A Bossard and N Mohammedi, *Nucl. Phys. B* **619** (2001) 128.
22. L Hlavaty and L Snobl, *J. High Energy Phys.* **05** (2004) 010; *J. High Energy Phys*. **10** (2004) 045.
23. A Eghbali and A Rezaei-Aghdam, *Nucl. Phys. B* **899** (2015) 165.
24. A Eghbali, L Mehran-nia and A Rezaei-Aghdam, *Phys. Lett. B* **772** (2017) 791.
25. M Atazadeh, A Eghbali, *Iran. J. Phys*. Res. **18** (2018) 23 (persian).
26. A Eghbali, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 026001.
27. A Eghbali, R Naderi and A Rezaei-Aghdam, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 68.
28. A Eghbali, R Naderi and A Rezaei-Aghdam, *Eur. Phys. J. C* **82** (2022) 580.
29. Y Sakatani and Y Satoh, *J. High Energy Phys.* **01** (2024) 150.
30. A Eghbali and A Rezaei-Aghdam, *J. High Energy Phys.* **09** (2009) 094.
31. A Eghbali and A Rezaei-Aghdam, *J. High Energy Phys.* **01** (2012) 151.
32. A Eghbali and A Rezaei-Aghdam, *Nucl. Phys. B* **866** (2013) 26.
33. A Eghbali and A Rezaei-Aghdam, *J. High Energy Phys.* **07** (2013) 134.
34. A Eghbali, *J. High Energy Phys.* **02** (2015) 025.
35. A Eghbali, *Nucl. Phys. B* **958** (2020) 115110.
36. A Eghbali and A Rezaei-Aghdam, *Eur. Phys. J. C* **84** (2024) 931.
37. A Eghbali, M Hosseinpour-Sadid and A Rezaei-Aghdam, *J. High Energy Phys.* **03** (2024) 040.
38. A Eghbali, M Hosseinpour-Sadid and A Rezaei-Aghdam, *Fortschr. Phys*. **74** (2026) e70056.
39. N Berkovits, M Bershadsky, T Hauer, S Zhukov and B Zwiebach , *Nucl. Phys. B* **567** (2000) 61.
40. D Sorokin, A Tseytlin, L Wulff and K Zarembo, *J. Phys. A: Math. Theor*. **44** (2011) 275401.
41. A Eghbali, *Fortschr. Phys.* **72** (2024) 2400175.
42. C Klimcik and P Severa, *Phys. Lett. B* **376** (1996) 82.
43. C Albertsson and R A Reid-Edwards, *J. High Energy Phys.* **03** (2007) 004.
44. Jeffrey A Harvey, et al., *"String Theory and Quantum Gravity '92"*, Proceedings of the Trieste Spring School and Workshop, ICTP, Trieste, Italy, World Scientific Publishing Company, (1993).
45. M Nakahara, "*Geometry, Topology and Physics*", 2nd Edition, IOP, Bristol and Philadelphia, (2003).
46. B Zweiebach, "*A First Course in String Theory*", Cambridge University Press, (2009).
47.