

بررسی تصحیحات کوانتومی مرتبه‌های بالاتر به تانسور قطبش فوتون در مدل شوئینگر

معصومه قاسم‌خانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، اوین، تهران

پست الکترونیکی: m_ghasemkhani@sbu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۷/۱۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۴/۰۹/۱۴)

چکیده:

در این مقاله، نظریه الکترودینامیک کوانتومی با فرمیون‌های بدون جرم در دو بعد (مدل شوئینگر) را بررسی می‌کنیم. ابتدا کنش مؤثر فوتون را با انتگرال‌گیری بر روی درجات آزادی فرمیونی به دست می‌آوریم. سپس با در نظر گرفتن این کنش و استفاده از رهیافت ماتریس پراکندگی ثابت می‌کنیم تمامی نمودارهایی که به تانسور قطبش فوتون در مرتبه‌های دو و سه-حلقه سهم می‌دهند، برابر صفرند. در ادامه، نشان می‌دهیم که سایر تصحیحات کوانتومی ناشی از مرتبه‌های بالاتر اختلال صفر هستند. بنابراین، تانسور قطبش فوتون و جرم شوئینگر در حد تک-حلقه دقیق هستند. **واژه‌های کلیدی:** الکترودینامیک کوانتومی، شوئینگر، کنش مؤثر، تانسور قطبش فوتون.

۱. مقدمه

کرومودینامیک کوانتومی به عنوان نظریه میدان پیمانه‌ای غیرآبلی به مطالعه برهم‌کنش قوی می‌پردازد. در این مدل که اجزاء آن را کوارک‌ها و گلوئون‌ها تشکیل می‌دهند، شدت ضریب جفت‌شدگی با افزایش انرژی کاهش یافته و در انرژی‌های پایین افزایش می‌یابد. به این ترتیب کوارک‌ها در انرژی بالا آزاد بوده (آزادی مجانبی) و در انرژی پایین به صورت هادرون هستند (حبس‌شدگی). به عبارت دیگر، این مدل در محدوده انرژی‌های پایین به صورت اختلالی حل پذیر نیست.

یکی از روش‌های پیشنهادی برای مطالعه مسائل غیراختلالی نظیر تعیین طیف هادرونی کرومودینامیک کوانتومی، تقلیل ابعاد فضا-زمان از $1+3$ به $1+1$ است. با توجه به این که در دو بعد تعداد درجات آزادی میدان‌ها کمتر و تقارن‌های مسئله بیشتر است، این امر منجر به حل دقیق و تحلیلی معادلات حرکت می‌شود.

در واقع، مدل‌های دو بعدی به نوعی یک مدل بازی^۱ یا آزمایشگاه نظری برای بررسی پدیده‌های مهمی نظیر سازوکار حبس‌شدگی کوارک‌ها است [۱-۳]. اولین مدل دو بعدی توسط شخصی به نام تیرینگ^۲ در سال ۱۹۵۸ ارائه شد که شامل برهم‌کنش دو جریان فرمیونی خالص بود [۴]. سپس، شوئینگر^۳

۱. Toy model

۲. Thirring

۳. Schwinger

برعکس. چنین الگوی رفتاری دقیقاً در کرومودینامیک کوانتومی رخ می‌دهد.

مدل‌های تعمیم یافته شوئینگر نیز بررسی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به مدل شوئینگر دست‌ساز اشاره کرد که در آن فرمیون با میدان پیمانه‌ای خارجی دو نوع برهم‌کنش برداری و شبه‌برداری دارد و طیف آن شامل یک بوزون جرم دار است [۱۲]. در سال‌های اخیر نیز مطالعات دیگری بر روی مدل شوئینگر انجام شده است [۱۶-۱۳].

همچنین به دلیل جذابیت نظری این مدل، نسخه ناجابه‌جایی مدل شوئینگر در مقالات متعددی مطالعه شده است [۱۷-۲۱]. در مقالات [۱۹ و ۲۰] ثابت می‌شود که جرم شوئینگر در مرتبه تک-حلقه هیچ تصحیحی از پارامتر ناجابه‌جایی نمی‌گیرد. نویسندگان مقاله [۲۱]، با استفاده از رهیافت ماتریس پراکندگی و به کمک کنش مؤثر در فضای ناجابه‌جایی^۴ نشان دادند که جرم شوئینگر نه تنها در حد تک-حلقه بلکه در مرتبه‌های بالاتر اختلال نیز تصحیحی از پارامتر ناجابه‌جایی $(\theta_{\mu\nu})$ نمی‌گیرد. در فضای ناجابه‌جایی به دلیل وجود ضرب ستاره^۵ بین میدان‌ها که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) * g(x) \equiv g(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu \bar{\partial}_\mu\right) f(x) \\ = f(x)g(x) + \frac{i}{\hbar} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \bar{\partial}_\nu g(x) + \dots$$

راس‌های برهم‌کنشی جدیدی در لاگرانژی ایجاد می‌شوند که تابع پارامتر ناجابه‌جایی و تکانه میدان‌ها هستند. مدل آبلی الکترومدینامیک کوانتومی در فضای ناجابه‌جایی (NC-QED) به لحاظ ساختاری بسیار شبیه به مدل کرومودینامیک کوانتومی غیر آبلی (QCD) در فضای جابه‌جایی بوده و در محاسبه تانسور خود-انرژی فوتون بایستی سهم راس‌های ۳ تایی و ۴ تایی خود-برهم‌کنشی فوتون و نیز سهم میدان شبجی^۶ را نیز در نظر گرفت. البته جهت سهولت در انجام محاسبات در فضای

در سال ۱۹۶۲ مدلی ارائه کرد که در آن فرمیون‌های بدون جرم با میدان پیمانه‌ای آبلی در دو بعد برهم‌کنش داشتند. او نشان داد که تقارن پیمانه‌ای موضعی، الزاماً بر وجود میدان پیمانه‌ای بدون جرم دلالت نمی‌کند [۵]. در واقع با تولید جرم دینامیکی برای فوتون در دو بعد، ناوردایی پیمانه‌ای از بین نمی‌رود. او به روش غیر/اختلالی نشان داد جرم فوتون در دو بعد مقداری دقیق و کامل است.

از نتایج جالب این مدل، جرم‌دار شدن فوتون در اثر شکست تقارن دست‌ساز سراسری^۱، حبس شدگی فرمیون‌ها و یافتن پاسخ‌های دقیق برای کلیه توابع چند نقطه‌ای فوتون و فرمیون بود [۵-۹]. همچنین در سال ۱۹۷۴، توفت^۲ توانست یک مدل دو بعدی برای طیف مزونی کرومودینامیک کوانتومی ارائه دهد [۱۰].

در این مقاله تمرکز اصلی بر روی مدل شوئینگر خواهد بود. شکل پتانسیل کولنی بر حسب فاصله در دو بعد فضا-زمان مشابه پتانسیل حبس شدگی کوآرک‌ها به صورت خطی است $(V(x) \approx |x|)$. بنابراین فرمیون‌های بدون جرم دو بعدی تشکیل حالت مقید می‌دهند که دینامیک آن با نظریه میدان بوزونی با اسپین صفر توصیف می‌شود که در مبحث بوزونیزاسیون^۳ نیز به آن اشاره شده است [۱۱].

با استفاده از تحلیل ابعادی کمیت‌های فیزیکی، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که رفتار مدل شوئینگر یعنی الکترومدینامیک کوانتومی با فرمیون‌های بدون جرم در دو بعد به نوعی شبیه کرومودینامیک کوانتومی چهار بعدی است. بعد جرمی ضریب جفت شدگی e در دو بعد بر خلاف چهار بعد صفر نبوده و برابر واحد است. جهت سهولت و تصریح در بحث، یک ضریب بدون بعد به نام $\tilde{e}$ در نظر می‌گیریم که به صورت $e = \tilde{e}\Lambda$ تعریف می‌شود که در آن Λ مقیاس انرژی است. به وضوح مشاهده می‌کنیم که با افزایش میزان انرژی $(\Lambda \uparrow)$ شدت ضریب جفت شدگی کاهش می‌یابد $(\tilde{e} \downarrow)$ و

۱. Global chiral symmetry

۲. 'tHooft

۳. Bosonization

۴. Noncommutative space

۵. Star product

۶. Ghost field

۲. مروری بر تانسور قطبش فوتون در مدل شوئینگر

در این بخش پس از معرفی مدل شوئینگر به محاسبه جرم شوئینگر به دو روش اختلالی و غیراختلالی می پردازیم:

۱. روش اختلالی

کنش مدل شوئینگر با فرمیونهای بدون جرم به صورت زیر داده می شود:

$$I = \int d^4x \left[\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right], \quad (1)$$

که در آن $D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie A_\mu \psi$ مشتق هموردا و $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی است. این تانسور در فضا-زمان دو بعدی بر خلاف چهار بعد یک مولفه مستقل غیر صفر دارد، یعنی F_0 که میدان الکتریکی E_x است. از آنجا که تنها یک بعد فضایی داریم عملاً میدان مغناطیسی نداریم، $B = 0$.

نمودار فاینمن مربوط به تصحیح تانسور قطبش فوتون در حد تک- حلقه در شکل ۱ رسم شده است.

دامنه فاینمن این نمودار به صورت زیر است:

$$i\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k})]}{k^2 (p-k)^2}, \quad (2)$$

که در آن p تکانه فوتون ورودی و k تکانه حلقه فرمیونی است. با استفاده از پارامتر بندی فاینمن و روابط مربوط به رد ماتریسهای دیراک در دو بعد

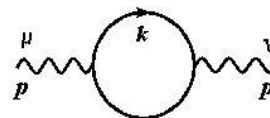
$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) = 0, \quad (3)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu) = 2(\eta^{\mu\rho} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\rho\nu} + \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda}),$$

به عبارت زیر می رسم:

$$i\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = -2e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} \times (2\ell^\mu \ell^\nu + 2x(x-1)p^\mu p^\nu - \ell^2 \eta^{\mu\nu} - x(x-1)p^\nu \eta^{\mu\nu}), \quad (4)$$

که در آن $\ell = k - xp$ و $\Delta = x(x-1)p^2$ است. با اضافه و کم کردن جمله $x(x-1)p^\nu \eta^{\mu\nu}$ داریم:



شکل ۱. نمودار فاینمن تانسور قطبش فوتون در حد تک- حلقه.

ناجابه جایی دو بعدی با انتخاب مختصات مخروط نور^۱ و پیمانه مناسب، یعنی $A_- = 0$ ، راسهای خود-برهم کنشی فوتون حذف و فقط نمودار حلقه فرمیونی را خواهیم داشت [۲۰ و ۲۱]. با وجود این، محاسبه انتگرالهای حلقه فاینمن در فضای ناجابه جایی به دلیل وجود فازهای تابع تکانه و پیمانه انتخاب شده قطعاً پیچیده تر از محاسبات فضای جابه جایی است.

در فضای جابه جایی به دلیل صفر شدن θ ، این فازها همراه با راسهای خود-برهم کنشی فوتون حذف شده و دامنه نمودارها پیچیدگی ناجابه جایی را نخواهد داشت. در این پژوهش، با الهام از شیوه مطرح شده در مقاله [۲۱]، نشان می دهیم برخلاف مدل ناجابه جایی، انتگرالهای حلقه فاینمن بدون نیاز به انتگرال گیری به شکل بسیار ساده تری بررسی می شوند. در واقع، سهم مرتبه های بالاتر مربوط به نمودارهای تانسور خود-انرژی فوتون در فضای جابه جایی صفر شده و بنابراین جرم شوئینگر هیچ تصحیحی از مرتبه های بالاتر اختلال دریافت نمی کند.

در بخش دوم این مقاله، ابتدا با استفاده از محاسبه کوانتومی حلقه، جرم شوئینگر را به روش اختلالی در حد تک-حلقه و سپس به روش غیراختلالی به صورت دقیق به دست می آوریم. سپس در بخش سوم، به معرفی کنش مؤثر این مدل پرداخته و در بخش چهارم نیز رهیافت ماتریس پراکندگی را برای به دست آوردن تصحیحات مرتبه های بالاتر جرم شوئینگر توضیح خواهیم داد. در ادامه، نشان می دهیم که تصحیحات مرتبه های بالاتر تانسور خود-انرژی فوتون به دو دسته نمودارهای با یک حلقه فرمیونی و بیش از یک حلقه فرمیونی دسته بندی می شوند که در نهایت سهم هر یک صفر به دست خواهد آمد. به عبارت دیگر، جرم شوئینگر محاسبه شده مقداری دقیق بوده و هیچ تصحیح کوانتومی نمی پذیرد. در انتها نیز مقایسه ای اجمالی با سایر مدل های دو بعدی ارائه خواهیم کرد.

۱. Light-cone coordinates

شده و مقدار این جرم کامل و دقیق است [۵] که در بخش بعدی به مرور آن می‌پردازیم.

۲.۲. روش غیراختلالی

یکی از برجستگی‌های مدل شوئینگر این بود که وی توانست انتشارگر فوتون و فرمیون را به طور کامل و دقیق به دست آورد [۵]. او حدس زد شکل انتشارگر کامل فرمیون بدون جرم در دو بعد با توجه به معادله حرکت آن، یعنی

$$\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x) = 0, \quad (10)$$

به صورت زیر است:

$$G(x, y) = e^{-ie[\varphi(x) - \varphi(y)]} G_0(x, y), \quad (11)$$

که در آن $\varphi(x)$ تابع ماتریسی و $G_0(x, y)$ انتشارگر فرمیونی آزاد است. انتشارگرهای برهم‌کنشی و آزاد فرمیونی در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y),$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu G_0(x, y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (12)$$

با جایگذاری حدس شوئینگر در معادله حرکت بالا، به رابطه $\gamma^\mu \partial_\mu \varphi(x) = \gamma^\mu A_\mu$ می‌رسیم. سپس با اعمال عملگر $\gamma^\nu \partial_\nu$ و استفاده از جبر ماتریس‌های دیراک در دو بعد

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\varepsilon^{\mu\nu} \gamma^5 \quad (13)$$

خواهیم داشت: $\square \varphi(x) = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu A_\nu$. بنابراین، تابع ماتریسی $\varphi(x)$ برابر است با:

$$\varphi(x) = - \int d^4 y D(x - y) \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu A_\nu(y), \quad (14)$$

که در آن $D(x - y)$ انتشارگر میدان نرده‌ای آزاد بدون جرم بوده و در رابطه $\square D(x - y) = \delta(x - y)$ صدق می‌کند. بنابراین، با استفاده از اتحاد (۱۳) داریم:

$$\varphi(x) = \int d^4 y D(x - y) \frac{1}{4} \left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) \times \partial_\mu A_\nu(y) = \alpha(x) - \beta(x) \gamma^5. \quad (15)$$

که در آن کمیت‌های $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha(x) = - \int d^4 y D(x - y) \partial_\mu A^\mu(y),$$

$$\beta(x) = - \int d^4 y D(x - y) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu(y). \quad (16)$$

$$i\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = -2e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} \left(2\ell^\mu \ell^\nu + 2x(x-1) \times (p^\mu p^\nu - p^\nu \eta^{\mu\nu}) + (x(x-1)p^\nu - \ell^\nu) \eta^{\mu\nu} \right). \quad (5)$$

در نهایت با استفاده از انتگرال‌های فاینمن،

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2}}, \quad (6)$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1}.$$

خواهیم داشت:

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = (p^\nu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Pi_{(0)}(p), \quad (7)$$

که در آن $\Pi_{(0)}(p)$ تابع قطبش نرده‌ای فوتون در حد تک-

حلقه است. مقدار این تابع در دو بعد برابر $\Pi_{(0)}(p) = \frac{e^2}{\pi p^2}$

است که دارای واگرایی مادون قرمز در حد $p^2 \rightarrow 0$ است. از طرفی شکل انتشارگر فوتون همراه با تصحیحات کوانتومی در حد تک-حلقه به صورت زیر است:

$$D_{(0)}^{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 (1 - \Pi_{(0)}(p))}. \quad (8)$$

با جایگذاری مقدار تابع قطبش نرده‌ای داریم:

$$D_{(0)}^{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 - \frac{e^2}{\pi}}. \quad (9)$$

رابطه (۹) نشان می‌دهد که انتشارگر فوتون در حد تک-حلقه دارای یک قطب غیر صفر است که در سطح کلاسیکی (درختی) وجود نداشت. این قطب غیر صفر که ناشی از تصحیحات کوانتومی تک-حلقه است، جرم شوئینگر $\mu = \frac{e}{\sqrt{\pi}}$ نام دارد.

افزون بر این، رابطه (۷) در اتحاد وارد نیز صدق می‌کند $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$. به عبارت دیگر، همزمان با برقراری ناوردایی پیمانه‌ای در حد تک-حلقه، فوتون نیز جرم دار شده و این دو منافاتی با هم ندارند. درحالی‌که در چهار بعد، شکل قطبش نرده‌ای فوتون کاملاً متفاوت بوده و هیچ گونه قطب غیر صفری برای انتشارگر فوتون در هیچ یک از مرتبه‌های اختلال ایجاد نمی‌شود.

شوئینگر برای اولین بار به روش کاملاً غیراختلالی و بدون هیچ گونه محاسبه حلقه‌ای نشان داد که فوتون در دو بعد جرم دار

بنابراین فوتون به اندازه $\mu = \frac{e}{\sqrt{\pi}}$ جرم دار شده است که با نتیجه محاسبه اختلالی در حد تک-حلقه برابر است. با توجه به انطباق کامل نتایج محاسبات در بخش‌های ۱.۲ و ۲.۲، انتظار داریم در روش اختلالی تمامی تصحیحات کوانتومی ناشی از مرتبه‌های بالاتر اختلال (دو-حلقه و بالاتر) به جرم شوئینگر صفر باشد. در واقع تمرکز اصلی این مقاله بر محاسبه نمودارهایی است که به تانسور قطبش فوتون در مرتبه‌های بالاتر سهم می‌دهند. در نهایت نشان می‌دهیم که سهم‌های مزبور در دو بعد فضا-زمانی صفر بوده و در نتیجه جرم شوئینگر هیچ‌گونه تصحیحی نخواهد گرفت.

۳. کنش مؤثر فوتون در مدل شوئینگر

در این بخش ابتدا شکل کلی کنش مؤثر فوتون را به دست آورده و سپس با استفاده از رهیافت ماتریس پراکندگی S به بررسی نمودارهایی که در مرتبه‌های بالاتر اختلال به قطبش فوتون سهم می‌دهند، خواهیم پرداخت. این کنش با انتگرال‌گیری روی میدان‌های فرمیونی در حد تک-حلقه به دست می‌آید:

$$e^{i\Gamma[A]} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{I_f}, \quad (23)$$

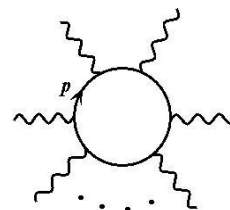
که در آن I_f شامل جمله جنبشی و برهم‌کنشی میدان فرمیونی با فوتون و $\Gamma[A]$ کنش مؤثر فوتون است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma[A] = \ln \frac{\det(i\not{\partial} - eA)}{\det(i\not{\partial})} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{i\not{\partial}} \right) (-ieA) \right]^n. \quad (24)$$

نتیجه بالا با فرض صفر بودن جرم فرمیون است. البته $\Gamma[A]$ را می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد:

$$\Gamma[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \int \prod_{i=1}^n d^4x_i A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \times \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1, \dots, x_n), \quad (25)$$

که در آن $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$ نشان دهنده تابع چند-نقطه ای فوتون است که شامل یک حلقه فرمیونی با n پای خارجی فوتونی است (شکل ۲).



شکل ۲. نمودار مربوط به جمله عمومی سری رابطه (۱۲).

با انتخاب پیمانه لورنتس، رابطه (۱۵) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\varphi(x) = -\beta(x)\gamma^0 = \gamma^0 \varepsilon^{\mu\nu} \int d^4y D(x-y) \partial_\mu A_\nu(y). \quad (17)$$

یا به عبارت دیگر، میدان فوتون در پیمانه لورنتس به شکل $A^\mu(x) = -\varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \beta(x)$ خواهد بود. با در نظر گرفتن رابطه بالا، انتشارگر کامل فرمیون بر حسب تابع β به دست می‌آید:

$$G(x, y) = e^{ie[\beta(x) - \beta(y)]\gamma^0} G_0(x, y). \quad (18)$$

سپس شوئینگر با استفاده از روش جداسازی نقطه‌ای پیمانه‌ناوردا، جریان برهم‌کنشی را به صورت زیر نوشت [۲۲ و ۲۳]:

$$J^\mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x + \varepsilon) \exp[ie \int_x^{x+\varepsilon} d\xi_\lambda A^\lambda(\xi)] \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{tr}(\gamma^\mu G(x + \varepsilon, x) \exp[ie \int_x^{x+\varepsilon} d\xi_\lambda A^\lambda(\xi)]). \quad (19)$$

با قرار دادن مقدار انتشارگر کامل در رابطه (۱۹) خواهیم داشت:

$$J^\mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{tr}(\gamma^\mu e^{-ie[\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)]} G_0(x + \varepsilon, x) \\ \times \exp[ie \int_x^{x+\varepsilon} d\xi_\lambda A^\lambda(\xi)]). \quad (20)$$

به کمک روابط زیر

$$G_0(\varepsilon) = -\frac{i}{2\pi} \frac{\varepsilon_\nu \gamma^\nu}{\varepsilon^2}, \quad \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0) = -2\varepsilon^{\mu\nu}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_\mu}{\varepsilon^2} = 0. \quad (21)$$

جریان به شکل ساده $J^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} A^\mu(x)$ نوشته می‌شود. با جایگذاری آن در جمله برهم‌کنشی لاگرانژی، یعنی $-eJ^\mu(x)A_\mu(x)$ ، در نهایت به رابطه زیر می‌رسیم:

$$L_{\text{int}} = -\frac{e^2}{2\pi} A_\mu A^\mu. \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{r,s} \int \prod_{j=1}^r d^4 x_j \int \prod_{\ell=1}^s d^4 y_\ell T[A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_r}(x_r) A_{\nu_1}(y_1) \dots A_{\nu_s}(y_s)] \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_r}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) \Gamma^{\nu_1 \dots \nu_s}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s) + \dots$$

جمله دوم این رابطه، دارای یک حلقه فرمیونی و جملات بعدی نیز شامل بیش از یک حلقه فرمیونی هستند. بنابراین برای بررسی دقیق و شفاف، بهتر است محاسبه نمودارهای مورد نظر در دو بخش جداگانه مورد مطالعه قرار گیرد: (الف) نمودارهای با یک حلقه فرمیونی، و (ب) نمودارهای با چند حلقه فرمیونی.

(الف) نمودارهای با یک حلقه فرمیونی

سهم نمودارهای با یک حلقه فرمیونی در تانسور قطبش فوتون، یعنی جمله $n=1$ در سری رابطه (۲۸)، برابر است با:

$$S^{(1)} = i \sum_{r=1}^{\infty} S^{(1,r)}, \quad (30)$$

که شمارنده r بیانگر تعداد پاهای خارجی فوتون است. با استفاده از رابطه (۲۵) به شکل زیر داده می‌شود:

$$S^{(1,r)} = \int \prod_{i=1}^r d^4 x_i T[A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_r}(x_r)] \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_r}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r). \quad (31)$$

چون به دنبال نمودارهایی هستیم که به تانسور خودانرژی فوتون سهم می‌دهند، پس بررسی را از جمله $r=2$ شروع می‌کنیم. اما این جمله، با اعمال قضیه ویک^۳، نمودار حبابی^۴ بدون پای خارجی فوتون ایجاد می‌کند که مد نظر ما نیست. مقادیر فرد r نیز در نهایت به دلیل برقراری قضیه فری^۵ در الکترودینامیک کوانتومی به دامنه صفر منجر می‌شود. بنابراین، به بررسی جمله بعدی، یعنی $r=4$ ، می‌پردازیم:

$$S^{(1,4)} = \int \prod_{j=1}^4 d^4 x_j T[A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2) A_{\rho}(x_3) A_{\sigma}(x_4)] \times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4). \quad (32)$$

با اعمال قضیه ویک، داریم:

$$S^{(1,4)} = \int \prod_{j=1}^4 d^4 x_j : [A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2) A_{\rho}(x_3) A_{\sigma}(x_4) + \text{all possible contractions}] : \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4), \quad (33)$$

شکل صریح تانسور $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$ عبارت است از:

$$\delta(\sum_i k_i) e^{-i \sum_i k_i \cdot x_i} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} = -\frac{e^n}{n} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \times \Xi^{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_{n-1}), \quad (26)$$

که در آن $\delta(\sum_i k_i)$ اشاره به قانون پایستگی تکانه-انرژی در هر راس دارد و $\Xi^{\mu_1 \dots \mu_n}$ به نوعی همان تابع چند-نقطه‌ای فوتون در فضای تکانه است:

$$\Xi^{\mu_1 \dots \mu_n} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 (p+k_1)^2 (p+k_1+k_2)^2 \dots (p+\sum_{i=1}^{n-1} k_i)^2} \times \text{tr}[\gamma^{\mu_1}(\not{p}+K_1) \gamma^{\mu_2}(\not{p}+K_1+K_2) \gamma^{\mu_3} \dots (\not{p}+\sum_{i=1}^{n-1} K_i) \gamma^{\mu_n}(\not{p})]. \quad (27)$$

در این جا، k_i ها تکانه‌های مربوط به پاهای فوتونی خارجی و p تکانه حلقه فرمیونی است.

۴. رهیافت ماتریس پراکندگی برای کنش مؤثر

$$\Gamma[A]$$

یکی از مباحث مهم در نظریه میدان‌های کوانتومی مربوط به ماتریس پراکندگی^۱ است که در بخش اندرکنش میدان‌ها نقش اساسی دارد [۲۴]. ماتریس S در واقع مقدار حدی عملگر تحول زمانی در زمان‌های بسیار دور گذشته و آینده است. این ماتریس برای کنش مؤثر $\Gamma[A]$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$S = T e^{i\Gamma[A]} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} = \frac{i^n}{n!} T(\Gamma[A])^n. \quad (28)$$

اندیس n در واقع شمارنده تعداد حلقه‌های فرمیونی و نماد T نیز بیانگر عملگر ترتیب زمانی^۲ است که روی ضرب میدان‌های پیمانه‌ای اثر می‌کند. با توجه به رابطه (۲۵)، عبارت بالا را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$S = 1 + i \sum_r \int \prod_{j=1}^r d^4 x_j T[A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_r}(x_r)] \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_r}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) \quad (29)$$

۱. Scattering matrix

۲. Time-ordering operator

۳. Wick's theorem

۴. Bubble diagram

۵. Furry's theorem

$$S_{(c)}^{(1,\tau)} = \frac{-ie^{\tau}}{\tau} \int \frac{d^{\tau}q}{(\tau\pi)^{\tau}} \frac{d^{\tau}\ell}{(\tau\pi)^{\tau}} : \tilde{A}_{\mu}(q) \tilde{A}_{\sigma}(-q) : \frac{1}{\ell^{\tau}} \tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma}, \quad (37)$$

که در آن $\tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\rho} = \eta_{\nu\sigma} \Xi_{(b)}^{\mu\nu\rho\sigma}$ ، $\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Xi_{(a)}^{\mu\nu\rho\sigma}$ و $\tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma} = \eta_{\nu\rho} \Xi_{(c)}^{\mu\nu\rho\sigma}$ برابر هستند با:

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\nu} &= \int \frac{d^{\tau}p}{(\tau\pi)^{\tau}} \frac{\text{tr}(\gamma^{\mu}(\not{p} + \not{q})\gamma^{\nu}(\not{p} + \not{q} + \not{\ell})\gamma_{\rho}(\not{p} + \not{q})\gamma^{\nu}\not{p})}{(p+q)^{\tau}(p+q+\ell)^{\tau}p^{\tau}}, \\ \tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\rho} &= \int \frac{d^{\tau}p}{(\tau\pi)^{\tau}} \frac{\text{tr}(\gamma^{\mu}(\not{p} + \not{q})\gamma^{\nu}(\not{p} + \not{q} + \not{\ell})\gamma^{\rho}(\not{p} + \not{\ell})\gamma_{\nu}\not{p})}{(p+q)^{\tau}(p+q+\ell)^{\tau}(p+\ell)^{\tau}p^{\tau}}, \\ \tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma} &= \int \frac{d^{\tau}p}{(\tau\pi)^{\tau}} \frac{\text{tr}(\gamma^{\mu}(\not{p} + \not{q})\gamma^{\sigma}\not{p}\gamma_{\nu}(\not{p} + \not{\ell})\gamma^{\nu}\not{p})}{(p+q)^{\tau}(p+\ell)^{\tau}p^{\tau}}. \end{aligned} \quad (38)$$

در رابطه بالا، q تکانه میدان پیمانه‌ای خارجی، و ℓ و p نیز به ترتیب تکانه‌های مربوط به میدان پیمانه‌ای داخلی و میدان فرمیونی داخلی هستند. اکنون، به محاسبه صورت کسر عبارت اول در رابطه (۳۸) پرداخته و نشان می‌دهیم که مقدار آن‌ها در دو بعد برابر صفر است. به عنوان نمونه، صورت کسر $\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\nu}$ را در نظر می‌گیریم:

$$N_a^{\mu\nu} \equiv \text{tr}[\gamma^{\mu}(\not{p} + \not{q})\gamma^{\rho}(\not{p} + \not{q} + \not{\ell})\gamma_{\rho}(\not{p} + \not{q})\gamma^{\nu}\not{p}]. \quad (39)$$

چون بعد جرمی ضریب جفت شدگی e در الکترودینامیک کوانتومی دو بعدی برابر یک است، مدل مزبور ابربازبهنجارپذیر بوده و نمودارهای حلقه آن فاقد واگرایی فرابنفش است. بنابراین می‌توان از ابتدا محاسبه را به طور صریح به ازای $d=2$ انجام داده و شکل ماتریسی عبارت $N_a^{\mu\nu}$ را به دست آورد. بدین منظور با استفاده از شکل ماتریس‌های دیراک در دو بعد،

$$\gamma^{\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

شکل ماتریسی $\not{p}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\not{p} = p_{\circ}\gamma^{\circ} + p_1\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & p_{-} \\ p_{+} & 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

که در آن $p_{\pm} = p_{\circ} \pm p_1$ است. برای یافتن شکل ماتریسی $\not{p}\gamma^{\mu}$ ، ماتریس (۴۱) را در γ° و γ^1 ضرب می‌کنیم. بنابراین، داریم:

$$\gamma^{\circ}\not{p} = \begin{pmatrix} p_{+} & 0 \\ 0 & p_{-} \end{pmatrix}, \quad \gamma^1\not{p} = \begin{pmatrix} -p_{+} & 0 \\ 0 & p_{-} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

که در آن علامت “:” بیانگر ترتیب نرمال^۱ در نظریه میدان کوانتومی است، و $\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ نیز به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_{\tau}) &= -\frac{e^{\tau}}{\tau} \int \prod_{j=1}^{\tau} \frac{d^{\tau}k_j}{(\tau\pi)^{\tau}} (\tau\pi)^{\tau} \delta(\sum_{j=1}^{\tau} k_j) \\ &\times e^{i\sum_{j=1}^{\tau} k_j \cdot x_j} \Xi^{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4). \end{aligned} \quad (34)$$

شکل صریح $\Xi^{\mu\nu\rho\sigma}$ با استفاده از رابطه (۲۷) به دست می‌آید. در رابطه (۳۳)، همه ادغام‌های ممکن موجود هستند اما ادغام‌هایی انتخاب می‌شوند که در نهایت دو پای آزاد فوتون باقی بماند. نمودارهای فاینمن مربوط به این ادغام‌ها در شکل ۳ رسم شده است. این نمودارها دقیقاً همان نمودارهای مرتبه e^4 در ماتریس S مربوط به QED هستند که به انتشارگر فوتون در مرتبه دو-حلقه سهم می‌دهند. جملات ماتریس S مربوط به این نمودارها به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} S_{(a)}^{(1,\tau)} &= \int \prod_{j=1}^{\tau} d^{\tau}x_j : A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_{\tau}) : D_{\rho\sigma}^{(\circ)}(x_{\tau}, x_1) \\ &\times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_{\tau}), \\ S_{(b)}^{(1,\tau)} &= \int \prod_{j=1}^{\tau} d^{\tau}x_j : A_{\mu}(x_1) A_{\rho}(x_{\tau}) : D_{\nu\sigma}^{(\circ)}(x_{\tau}, x_1) \\ &\times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_{\tau}), \\ S_{(c)}^{(1,\tau)} &= \int \prod_{j=1}^{\tau} d^{\tau}x_j : A_{\mu}(x_1) A_{\sigma}(x_{\tau}) : D_{\nu\rho}^{(\circ)}(x_{\tau}, x_1) \\ &\times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_{\tau}), \end{aligned} \quad (35)$$

که در آن زیرنویس‌های (a)، (b) و (c) به ترتیب به نمودارهای (الف)، (ب) و (ج) شکل ۳ اشاره دارند، و تبدیل فوریه انتشارگر آزاد فوتون به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \iint d^{\tau}x d^{\tau}y D_{\mu\nu}^{(\circ)}(x-y) e^{i(q \cdot x + \ell \cdot y)} &= \tilde{D}_{\mu\nu}^{(\circ)}(q, \ell) \\ &= (\tau\pi)^{\tau} \delta^{(\tau)}(q + \ell) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^{\tau}}. \end{aligned} \quad (36)$$

با استفاده از روابط (۳۴) و (۳۶) و تبدیل فوریه میدان پیمانه‌ای، روابط (۳۵) به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} S_{(a)}^{(1,\tau)} &= \frac{-ie^{\tau}}{\tau} \int \frac{d^{\tau}q}{(\tau\pi)^{\tau}} \frac{d^{\tau}\ell}{(\tau\pi)^{\tau}} : \tilde{A}_{\mu}(q) \tilde{A}_{\nu}(-q) : \frac{1}{\ell^{\tau}} \tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\nu}, \\ S_{(b)}^{(1,\tau)} &= \frac{-ie^{\tau}}{\tau} \int \frac{d^{\tau}q}{(\tau\pi)^{\tau}} \frac{d^{\tau}\ell}{(\tau\pi)^{\tau}} : \tilde{A}_{\mu}(q) \tilde{A}_{\rho}(-q) : \frac{1}{\ell^{\tau}} \tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\rho}, \end{aligned}$$

$$S^{(1,\epsilon)} = \int \prod_{j=1}^{\epsilon} d^4 x_j T[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) A_\sigma(x_4) A_\lambda(x_5) A_\eta(x_6)] \\ \times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}(x_1, \dots, x_6). \quad (49)$$

مشابه مورد قبل، با اعمال قضیه ویک داریم:

$$S^{(1,\epsilon)} = \int \prod_{j=1}^{\epsilon} d^4 x_j : [A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) A_\sigma(x_4) A_\lambda(x_5) \\ A_\eta(x_6) + \text{all possible contractions}] : \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}(x_1, \dots, x_6), \quad (50)$$

که تابع ۶-نقطه‌ای $\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\int \prod_{j=1}^{\epsilon} \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} (\gamma\pi)^4 \delta(\sum_{j=1}^{\epsilon} k_j) \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}(x_1, \dots, x_6) = -\frac{e^6}{\epsilon} \\ \times e^{i \sum_{j=1}^{\epsilon} k_j \cdot x_j} \Xi^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}, \quad (51)$$

به طور مشابه، $\Xi^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}$ با جایگذاری $n=6$ در رابطه (۲۷) تعریف می‌شود. از آنجایی که علاقمند به بررسی تصحیحات کوانتومی تانسور خودانرژی فوتون هستیم، کافی است تنها جملات با دو ادغام را در نظر بگیریم. نمودارهای فاینمن به‌دست آمده پس از ادغام در شکل ۴ رسم شده‌اند. این نمودارها دقیقاً همان نمودارهای مرتبه e^6 در ماتریس S مربوط به QED هستند که به انتشارگر فوتون در مرتبه سه-حلقه سهم می‌دهند. البته نمودارهای دیگری نیز در این مرتبه وجود دارند که شامل دو حلقه فرمیونی بوده و در بخش بعدی بررسی می‌شوند. جملات ماتریس S متناظر با این نمودارهای فاینمن برابرند با:

$$S_{(a)}^{(1,\epsilon)} = \int \prod_{j=1}^{\epsilon} d^4 x_j : A_\mu(x_1) A_\sigma(x_2) : D_{\rho\lambda}^{(c)}(x_3, x_5) D_{\nu\eta}^{(c)}(x_4, x_6) \\ \times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}(x_1, \dots, x_6), \\ S_{(b)}^{(1,\epsilon)} = \int \prod_{j=1}^{\epsilon} d^4 x_j : A_\mu(x_1) A_\sigma(x_2) : D_{\nu\lambda}^{(c)}(x_3, x_5) D_{\rho\eta}^{(c)}(x_4, x_6) \\ \times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}(x_1, \dots, x_6), \\ S_{(c)}^{(1,\epsilon)} = \int \prod_{j=1}^{\epsilon} d^4 x_j : A_\mu(x_1) A_\sigma(x_2) : D_{\nu\rho}^{(c)}(x_3, x_4) D_{\lambda\eta}^{(c)}(x_5, x_6) \\ \times \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}(x_1, \dots, x_6), \quad (52)$$

که در آن زیرنویس‌های (a)، (b) و (c) به ترتیب به نمودارهای (الف)، (ب) و (ج) شکل ۴ اشاره دارند. با استفاده از روابط (۳۶) و (۵۱)، و نیز تبدیل فوریه میدان پیمانه‌ای، روابط (۵۲)

با معرفی دو بردار نور-گونه u^μ و $\bar{u}^\mu$ به صورت زیر

$$u^\mu = (1, 1), \quad \bar{u}^\mu = (1, -1). \quad (43)$$

خواهیم داشت:

$$\gamma^\mu \not{p} = \begin{pmatrix} \bar{u}^\mu p_+ & 0 \\ 0 & u^\mu p_- \end{pmatrix}. \quad (44)$$

با توجه به متریک مینکوفسکی در دو بعد، $\eta_{00}=1$ ، $\eta_{11}=-1$ ،

بردارهای u_μ و $\bar{u}_\mu$ به صورت زیر خواهند بود:

$$u_\mu = (1, -1), \quad \bar{u}_\mu = (1, 1). \quad (45)$$

بنابراین $\gamma_\mu \not{p}$ به شکل ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$\gamma_\mu \not{p} = \begin{pmatrix} \bar{u}_\mu p_+ & 0 \\ 0 & u_\mu p_- \end{pmatrix}. \quad (46)$$

در نهایت، با استفاده از روابط (۴۴) و (۴۶)، شکل ماتریسی

$N_a^{\mu\nu}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$N_a^{\mu\nu} = \text{tr} \begin{pmatrix} \beta_+ \bar{\theta}^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \beta_- \theta^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

که در آن $\theta^{\mu\nu} \equiv u^\mu u^\nu u^\rho u_\rho$ ، $\bar{\theta}^{\mu\nu} \equiv \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu \bar{u}^\rho \bar{u}_\rho$ و ضرایب β_+ و β_- نیز برابرند با:

$$\beta_+ \equiv (p+q)_+ (p+q+\ell)_+ (p+q)_+ p_+, \\ \beta_- \equiv (p+q)_- (p+q+\ell)_- (p+q)_- p_-. \quad (48)$$

با توجه به نرم صفر دو بردار نورگونه $u^\rho u_\rho = \bar{u}^\rho \bar{u}_\rho = 0$ ، نتیجه می‌گیریم $\bar{\theta}^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} = 0$ و صرف‌نظر از ضرایب β_+ و β_- خواهیم داشت: $N_a^{\mu\nu} = 0$. به طور مشابه، می‌توان نشان داد صورت کسر عبارات دوم و سوم رابطه (۳۸) نیز صفر است، یعنی $N_b^{\mu\rho} = 0$ ، $N_c^{\mu\sigma} = 0$. پس داریم:

$$\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\rho} = 0, \quad \tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma} = 0.$$

پس دامنه کل نمودارهای در حد دو-حلقه صفر بوده و تانسور قطبش فوتون هیچ گونه تصحیحی نمی‌گیرد. بنابراین، انتشارگر فوتون در حد دو-حلقه تصحیحی نگرفته و در نتیجه جرم شوئینگر همان مقدار به‌دست آمده در حد تک-حلقه،

$$\mu = \frac{e}{\sqrt{\pi}}.$$

به عنوان نمونه‌ای دیگر از نمودارهای سهم دهنده به تانسور خودانرژی فوتون با یک حلقه فرمیونی، مورد $r=6$ را در رابطه (۳۱) در نظر می‌گیریم:

به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$S_{(a)}^{(\nu,\epsilon)} = \frac{-ie^\epsilon}{\epsilon} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} : \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\sigma(-q) : \frac{1}{k^\nu \ell^\sigma} \tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\sigma},$$

$$S_{(b)}^{(\nu,\epsilon)} = \frac{-ie^\epsilon}{\epsilon} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} : \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\sigma(-q) : \frac{1}{k^\nu \ell^\sigma} \tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\sigma},$$

$$S_{(c)}^{(\nu,\epsilon)} = \frac{-ie^\epsilon}{\epsilon} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} : \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\sigma(-q) : \frac{1}{k^\nu \ell^\sigma} \tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma}, \quad (53)$$

که q تکانه ورودی میدان پیمانه‌ای خارجی، p تکانه حلقه فرمیونی، و k و ℓ تکانه فوتون‌های ادغام شده (داخلی) هستند. همچنین $\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\sigma}$ ، $\tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\sigma}$ ، $\tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\sigma} = \eta_{\nu\eta} \eta_{\rho\lambda} \Xi_{(a)}^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}, \quad \tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\sigma} = \eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\eta} \Xi_{(b)}^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}$$

$$\tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma} = \eta_{\nu\rho} \eta_{\eta\lambda} \Xi_{(c)}^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\eta}. \quad (54)$$

شکل صریح این سه کمیت تانسوری به صورت زیر است:

$$\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\sigma} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}(\gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\rho (\not{p} + \not{q} + \not{\ell}) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} + \not{\ell} + \not{k}) \gamma^\sigma (\not{p} + \not{\ell} + \not{k}) \gamma_\nu (\not{p} + \not{\ell}) \gamma_\rho \not{p})}{p^\nu (p+q)^\nu (p+q+\ell)^\nu (p+q+k+\ell)^\nu (p+k+\ell)^\nu (p+\ell)^\nu},$$

$$\tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\sigma} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}(\gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\rho (\not{p} + \not{q} + \not{\ell}) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} + \not{\ell} + \not{k}) \gamma^\sigma (\not{p} + \not{\ell} + \not{k}) \gamma_\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\rho \not{p})}{p^\nu (p+q)^\nu (p+q+\ell)^\nu (p+q+k+\ell)^\nu (p+k+\ell)^\nu (p+k)^\nu},$$

$$\tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}(\gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho (\not{p} + \not{q} + \not{\ell}) \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu \not{p})}{p^\nu (p+q)^\nu (p+q+\ell)^\nu (p+\ell)^\nu (p+q)^\nu (p+k)^\nu}. \quad (55)$$

با کمک روابط (۴۲) الی (۴۶)، صورت کسر اول در رابطه بالا برابر است با:

$$N_a^{\mu\sigma} = \text{tr} \begin{pmatrix} \alpha_+ \bar{\omega}^{\mu\sigma} & 0 \\ 0 & \alpha_- \omega^{\mu\sigma} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

که در آن $\omega^{\mu\sigma} \equiv u^\mu u^\rho u^\nu u^\sigma u_\nu u_\rho$ ، $\bar{\omega}^{\mu\sigma} \equiv \bar{u}^\mu \bar{u}^\rho \bar{u}^\nu \bar{u}^\sigma \bar{u}_\nu \bar{u}_\rho$ بوده و ضرایب α_+ و α_- نیز برابرند با:

$$\alpha_+ \equiv (p+q)_+ (p+q+\ell)_+ (p+q+\ell+k)_+ (p+\ell+k)_+ (p+\ell)_+ p_+,$$

$$\alpha_- \equiv (p+q)_- (p+q+\ell)_- (p+q+\ell+k)_- (p+\ell+k)_- (p+\ell)_- p_-. \quad (57)$$

با توجه به این که $u^\rho u_\rho = \bar{u}^\rho \bar{u}_\rho = 0$ بنابراین $\bar{\omega}^{\mu\sigma} = \omega^{\mu\sigma} = 0$ و

α_- خواهیم داشت: $N_a^{\mu\sigma} = 0$. به طور مشابه، می‌توان نشان داد صورت کسر عبارت‌های دوم و سوم رابطه (۵۵) نیز صفر است: $N_b^{\mu\sigma} = N_c^{\mu\sigma} = 0$. پس داریم:

$$\tilde{\Xi}_{(a)}^{\mu\sigma} = \tilde{\Xi}_{(b)}^{\mu\sigma} = \tilde{\Xi}_{(c)}^{\mu\sigma} = 0. \quad (58)$$

یعنی دامنه کل نمودارهای در حد سه-حلقه نیز صفر بوده و تانسور قطبش فوتون دوباره هیچ‌گونه تصحیحی نمی‌گیرد. بنابراین انتشارگر فوتون در حد سه-حلقه هم تصحیح نشده و جرم شوئینگر همان مقدار به دست آمده در حد تک-حلقه، $\mu = \frac{e}{\sqrt{\pi}}$ ، باقی می‌ماند. به همین ترتیب، اگر جمله $r=8$ را در رابطه (۳۱) در نظر بگیریم، نمودارهایی در مرتبه چهار-حلقه خواهیم داشت. دقیقاً مشابه موارد قبلی به راحتی می‌توان نشان داد که دامنه کل این نمودارها نیز صفر است. بنابراین در بخش نمودارهای با یک حلقه فرمیونی غیر از مرتبه تک-حلقه بقیه مرتبه‌ها هیچ سهمی در تانسور قطبش فوتون و جرم شوئینگر ندارند. در بخش بعد به بررسی نمودارهای با بیش از یک حلقه فرمیونی خواهیم پرداخت.

(ب) نمودارهای با بیش از یک حلقه فرمیونی

سهم نمودارهای با چند حلقه فرمیونی در تانسور قطبش فوتون با در نظر گرفتن $n \geq 2$ در رابطه (۲۸) به دست می‌آید. به ازای $n=2$ داریم:

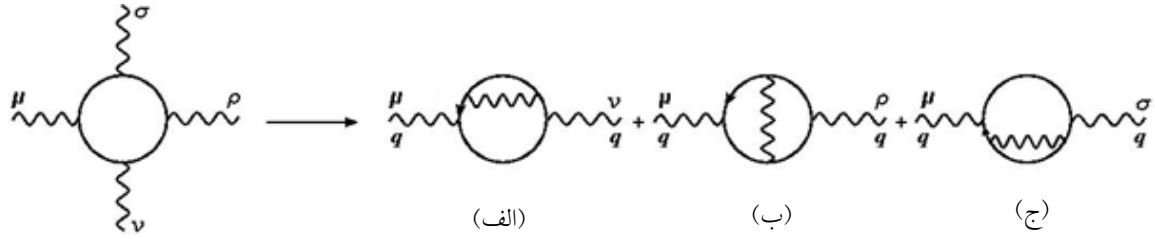
$$S^{(\nu)} = - \frac{1}{\gamma} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} S^{(\nu,r,s)}. \quad (59)$$

که در آن r, s ، شمارنده تعداد پاهای خارجی فوتون در هر حلقه است. به عنوان مثال به ازای $s=2$ ، $r=4$ داریم:

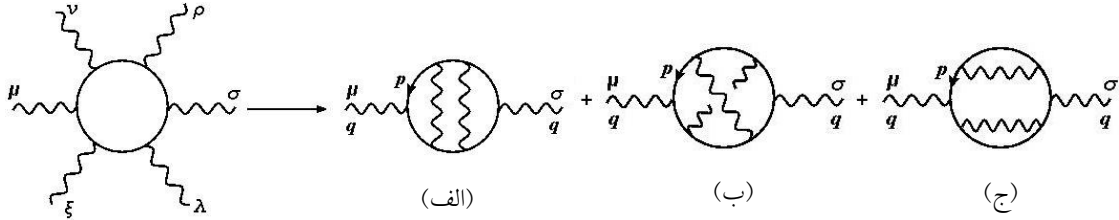
$$S^{(\nu,4,2)} = - \frac{1}{\gamma} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i \int \prod_{j=1}^2 d^4 y_j T[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) A_\sigma(x_4) A_\lambda(y_1) A_\eta(y_2)] \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_4) \Gamma^{\lambda\eta}(y_1, y_2). \quad (60)$$

با استفاده از قضیه ویک، عبارت (۶۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

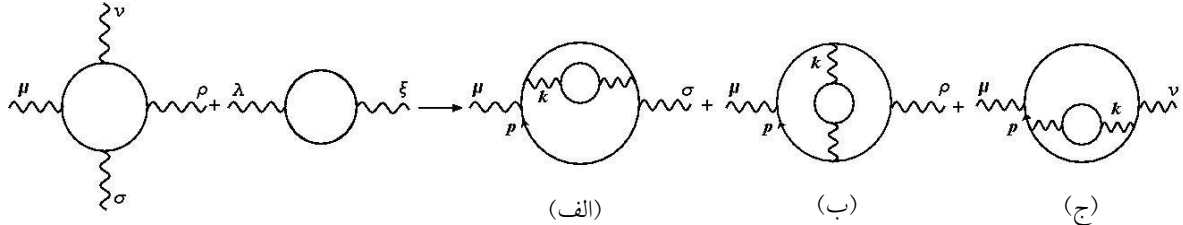
$$S^{(\nu,4,2)} = - \frac{1}{\gamma} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i \int \prod_{j=1}^2 d^4 y_j : [A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) A_\sigma(x_4) A_\lambda(y_1) A_\eta(y_2) + \text{all possible contractions}] : \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_4) \Gamma^{\lambda\eta}(y_1, y_2), \quad (61)$$



شکل ۳. نمودارهای فاینمن مربوط به تانسور قطبش فوتون در حد دو-حلقه.



شکل ۴. نمودارهای فاینمن مربوط به تانسور قطبش فوتون در حد سه-حلقه با یک حلقه فرمیونی.



شکل ۵. نمودارهای فاینمن مربوط به تانسور قطبش فوتون در حد سه-حلقه با دو حلقه فرمیونی.

در واقع $D_{\sigma\rho}^{(1)}$ ، همان انتشارگر تصحیح یافته فوتون در حد تک-حلقه است که در رابطه (۹) به صورت

$$D_{(1)}^{\sigma\rho}(p) = \frac{-i\eta^{\sigma\rho}}{p^2 - \frac{e^2}{\pi}}$$

به دست آمد. به عنوان نمونه، دامنه نمودار (ج) در شکل ۵ متناسب با عبارت زیر است:

$$M_c^{\mu\nu} \propto \text{tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k}) \gamma^\rho \not{p}] D_{\sigma\rho}^{(1)}(k)$$

که به دلیل وجود ضریب متریک $(\eta^{\sigma\rho})$ در انتشارگر بالا، نرم بردارهای نورگونه ظاهر شده و مشابه محاسبات بخش (الف)، می توان مشاهده کرد که سهم نمودارهای شکل ۵ در تانسور خودانرژی فوتون صفر است. به طور کلی برای حالت $n > 2$ نیز داریم:

$$S^{(n)} = \frac{i^n}{n!} \sum_{r_1, \dots, r_n} S^{(n, r_1, \dots, r_n)}, \quad (64)$$

نمودارهای فاینمن حاصل از $S^{(2,2,2)}$ ، با در نظر گرفتن ادغام های مناسبی که به تانسور قطبش فوتون سهم می دهند، در شکل ۵ رسم شده اند. عبارت های متناظر با سه نمودار شکل ۵ به ترتیب به صورت زیر نوشته می شوند:

$$S_{(a)}^{(2,2,2)} = -\frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^2 d^4 x_i \int \prod_{j=1}^2 d^4 y_j : A_\mu(x_i) A_\sigma(x_r) : \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_r) D_{\nu\rho}^{(1)},$$

$$S_{(b)}^{(2,2,2)} = -\frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^2 d^4 x_i \int \prod_{j=1}^2 d^4 y_j : A_\mu(x_i) A_\rho(x_r) : \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_r) D_{\nu\sigma}^{(1)},$$

$$S_{(c)}^{(2,2,2)} = -\frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^2 d^4 x_i \int \prod_{j=1}^2 d^4 y_j : A_\mu(x_i) A_\nu(x_r) : \Gamma^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1, \dots, x_r) D_{\sigma\rho}^{(1)}, \quad (62)$$

که در آن زیرنویس های (a)، (b) و (c) به ترتیب به نمودارهای (الف)، (ب) و (ج) شکل ۵ اشاره دارند، و کمیت های $D_{\sigma\rho}^{(1)}$ و $D_{\nu\sigma}^{(1)}$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} D_{\nu\rho}^{(1)} &= D_{\nu\lambda}^{(0)}(x_r - y_1) \Gamma^{\lambda\xi}(y_1, y_r) D_{\xi\rho}^{(0)}(y_r - x_r), \\ D_{\nu\sigma}^{(1)} &= D_{\nu\lambda}^{(0)}(x_r - y_1) \Gamma^{\lambda\xi}(y_1, y_r) D_{\xi\sigma}^{(0)}(y_r - x_r), \\ D_{\sigma\rho}^{(1)} &= D_{\sigma\lambda}^{(0)}(x_r - y_1) \Gamma^{\lambda\xi}(y_1, y_r) D_{\xi\rho}^{(0)}(y_r - x_r). \end{aligned} \quad (63)$$

برای n های بزرگتر، ملاحظه می‌کنیم که جرم شوئینگر در تمام مرتبه‌های بالاتر اختلال نیز تصحیحی نمی‌پذیرد. بنابراین انتشارگر کامل فوتون، یعنی

$$D_{Full}^{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 - \frac{e^2}{\pi}},$$

در واقع همان انتشارگر در مرتبه تک-حلقه است چرا که تمام تصحیحات کوانتومی مرتبه دو-حلقه و بالاتر صفرند و این دقیقاً همان نتیجه شوئینگر است که با روش غیراختلالی به دست آورده بود [۵].

در مدل شوئینگر، غیر از تصحیح پای فوتونی، تصحیح پای فرمیونی یا خودانرژی فرمion هم داریم که در نهایت منجر به تصحیح انتشارگر فرمion می‌شود. بررسی خودانرژی فرمion در مرتبه‌های بالاتر اختلال موضوع کار حاضر نیست، اما می‌توان مشاهده کرد که تمامی نمودارهای دو-حلقه، سه-حلقه و بالاتر که در این مقاله بررسی شدند در واقع به عنوان بخشی از یک نمودار فاینمن مربوط به خودانرژی فرمion در مرتبه‌های بالاتر اختلال هستند.

سه نمونه از این نمودارها در شکل ۷ رسم شده‌اند. از آن‌جا که پیش‌تر نشان دادیم که دامنه این نوع نمودارها با حلقه فرمیونی صفر است، بدون انجام هیچ محاسبه‌ای نتیجه می‌شود که نمودارهای شکل ۷، سهمی در خودانرژی فرمیونی ندارند.

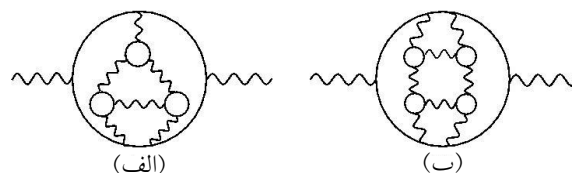
۵. مقایسه مدل شوئینگر با دو مدل راریتا-شوئینگر و الکترودینامیک نرده‌ای دو بعدی

الف) حالت بدون جرم

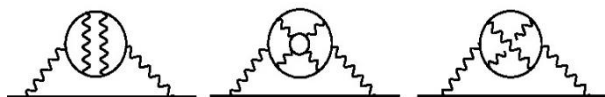
در بخش‌های قبل تصحیحات کوانتومی تانسور قطبش فوتون در مرتبه‌های بالاتر اختلال بررسی شد و نشان دادیم که تانسور قطبش فوتون در مدل شوئینگر در حد تک-حلقه مقداری دقیق و کامل است:

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} \Big|_{QED} = \frac{e^2}{\pi p^2} (p^\nu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu). \quad (66)$$

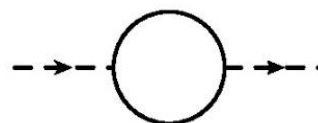
به عبارت دیگر، شکل تانسور قطبش فوتون برهم‌کنشی با ذره اسپین ۱/۲ در حد تک-حلقه به صورت رابطه بالا است. حال



شکل ۶. نمودارهای فاینمن مربوط به تانسور قطبش فوتون با چهار و پنج حلقه فرمیونی.



شکل ۷. نمونه‌ای از نمودارهای فاینمن مربوط به خودانرژی فرمion در مرتبه‌های بالاتر.



شکل ۸. نمودار فاینمن خودانرژی میدان نرده‌ای در مدل یوکاوا.

که در آن $(r_1, \dots, r_n)$ تعداد پاهای خارجی فوتون در n تا حلقه هستند. رابطه بالا را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$S^{(n)} = \frac{i^n}{n!} \sum_{r_1, \dots, r_n} \int \prod_{i=1}^n d^4 x_i \dots \int \prod_{i=1}^n d^4 x_i T [(A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n)) \dots (A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_n}(z_n))] \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \dots \Gamma^{\lambda_1 \dots \lambda_n}. \quad (65)$$

به عنوان مثال اگر حالت

$n=4, r_1=5, r_2=3, r_3=3, r_4=3$ را در نظر بگیریم، در این صورت $S^{(4,5,3,3,3)}$ شامل نموداری با چهارحلقه فرمیونی خواهد بود و هر حلقه به ترتیب دارای ۵، ۳، ۳ و ۳ پای خارجی فوتون است که با کمک قضیه ویک به نمودار فاینمن شکل ۶. الف) منجر می‌شود. همچنین به عنوان مثالی دیگر، به ازای مقادیر $n=5, r_1=6, r_2=3, r_3=3, r_4=3, r_5=3$ ، کمیت $S^{(5,6,3,3,3,3)}$ نموداری با چهار حلقه فرمیونی خواهد بود که با ادغام مناسب پاهای فوتون شکل ۶. ب) را خواهیم داشت.

اگر دامنه فاینمن نمودارهای شکل ۶ را بنویسیم، به راحتی می‌توان دید مشابه محاسبات انجام شده در قسمت دو حلقه، سهم این نمودارها نیز در تانسور خودانرژی فوتون صفر است. همچنین با محاسبه دامنه فاینمن نمودارهای با بیش از پنج حلقه فرمیونی نیز می‌توان نشان داد که این نمودارها سهمی در تانسور خودانرژی فوتون ندارند. به عبارت دیگر، با تعمیم این نتیجه

مدل در مقاله [۲۸] بررسی شده و عبارت تانسور قطبش فوتون در حد تک-حلقه به صورت زیر است:

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} \Big|_{SQED} = \frac{e^2}{\pi p^2} (p^\mu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \left[\frac{u}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) - 1 \right], \quad (70)$$

که در آن $u = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}$ است. به وضوح مشاهده می‌کنیم که عبارت به‌دست آمده به ازای $m \neq 0$ متناهی بوده اما در حد $m \rightarrow 0$ ، واگراست. از مقایسه این سه مدل نتیجه می‌گیریم که ساختار تانسوری قطبش فوتون برای همه یکسان بوده و اتحاد وارد طبق انتظار برقرار است. با این حال، چون جزئیات راس برهم‌کنشی فوتون با ماده بسته به نوع اسپین ذره متفاوت است، نتیجه نهایی نیز می‌تواند متفاوت باشد.

در انتهای این بخش جالب است که برهم‌کنش بوزون اسپین صفر با فرمیون بدون جرم در دو بعد را بررسی کنیم. جمله برهم‌کنشی این مدل که یوکاوا نام دارد به صورت $L_{int}^{Yukawa} = \lambda \bar{\psi} \phi \psi$ است که بسیار شبیه به جمله برهم‌کنشی فرمیون با فوتون $L_{int}^{QED} = e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ است. اگر عبارت خودانرژی بوزون ϕ را در حد تک-حلقه حساب کنیم، داریم:

$$\Sigma_\phi = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon} + finite, \quad (71)$$

که بر خلاف مدل QED ، در دو بعد واگراست.

ب) حالت جرم دار

برای تکمیل این بحث به حالت جرم دار این سه مدل دو بعدی نیز اشاره می‌کنیم که در مقاله [۲۶] بررسی شده‌اند:

$$\begin{aligned} \Pi_{(0)}^{\mu\nu} \Big|_{QED} &= \frac{-e^2}{6\pi m^2} (p^\mu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu), \\ \Pi_{(0)}^{\mu\nu} \Big|_{RSQED} &= \frac{-2g^2}{\pi m^2} (p^\mu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu), \\ \Pi_{(0)}^{\mu\nu} \Big|_{SQED} &= \frac{-e^2}{12\pi m^2} (p^\mu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu). \end{aligned} \quad (72)$$

نتایج بالا در حد انرژی‌های پایین $p^2 \ll m^2$ محاسبه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم مشابه حالت قبل، ساختار تانسوری سازگار با اتحاد وارد در سه مدل وجود دارد اما

اگر اسپین ماده برهم‌کنشی تغییر کند، آیا این ساختار تانسوری نیز تغییر می‌کند؟ قطعاً پاسخ این پرسش منفی است زیرا در هر صورت بایستی تقارن پیمانه‌ای در حد محاسبات حلقه به ازای هر نوع اسپین ماده برهم‌کنشی حفظ گردد تا اتحاد وارد برقرار باشد. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع، دو مدل الکترودینامیک کوانتومی راریتا-شوئینگر و نرده‌ای را بررسی می‌کنیم:

در مدل الکترودینامیک کوانتومی راریتا-شوئینگر، یک ذره‌ای با اسپین ۳/۲ با فوتون برهم‌کنش می‌کند [۲۵]. لازم به ذکر است انتشارگر این ذره در حالت بدون جرم بر خلاف انتشارگر ذره اسپین ۱/۲ به صورت زیر است:

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{p^2} (\eta^{\mu\nu} \not{p} - \frac{\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu}{d-2}), \quad (67)$$

که در آن d بعد فضا-زمان است. همچنین ضریب راس برهم‌کنشی این ذره با فوتون نیز به شکل زیر است:

$$\Lambda^{\mu\nu\rho} = ig(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\rho \eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu \eta^{\mu\rho}), \quad (68)$$

که در آن g ضریب جفت شدگی فرمیون اسپین ۳/۲ با فوتون است. حال اگر با استفاده از دو رابطه بالا دامنه نمودار فاینمن قطبش فوتون را در حد تک-حلقه نوشته و انتگرال‌های مربوطه را به روش منظم‌سازی ابعادی حل کنیم، در حالت بدون جرم در دو بعد به عبارت زیر می‌رسیم [۲۶]:

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} \Big|_{RS-QED} = \frac{g^2}{\pi p^2} (p^\mu \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu), \quad (69)$$

که دقیقاً منطبق با تانسور قطبش فوتون برهم‌کنشی با ذره اسپین ۱/۲ بوده، یعنی رابطه (۶۶)، و فوتون به اندازه جرم شوئینگر $\mu = \frac{g}{\sqrt{\pi}}$ جرم‌دار می‌شود. به عبارت دیگر، قطب انتشارگر فوتون در حد تک-حلقه در دو مدل شوئینگر و راریتا-شوئینگر دو بعدی (با فرمیون‌های بدون جرم) یکسان است. این‌که آیا جرم تولید شده در مدل راریتا-شوئینگر در مرتبه‌های بالاتر اختلال تصحیح می‌شود یا خیر، موضوع پژوهش‌های آینده است [۲۷].

اکنون مدل الکترودینامیک نرده‌ای دو بعدی را در نظر می‌گیریم که شامل برهم‌کنش فوتون با ذره باردار بدون اسپین است. این

ضرایب عددی که متأثر از ضریب راس برهم‌کنشی هستند، متفاوت هستند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل الکترودینامیک کوانتومی دوبعدی با فرمیون‌های بدون جرم را بررسی کردیم. تانسور خودانرژی فوتون در حد تک-حلقه به صورت اختلالی محاسبه و جرم شوئینگر به صورت $\mu = \frac{e}{\sqrt{\pi}}$ حاصل شد. سپس کنش موثر فوتون را با انتگرال‌گیری روی درجات آزادی فرمیونی به دست آوردیم. با در نظر گرفتن کنش موثر در رهیافت ماتریس پراکندگی توانستیم به راحتی نمودارهای با یک-حلقه و بیش از یک حلقه فرمیونی را به صورت واضحی دسته‌بندی و محاسبه کنیم. از آنجایی که مدل شوئینگر ابر بازبهنجارپذیر بوده و فاقد واگرایی فرابنفش است، با روش محاسباتی که شرح داده شد ثابت کردیم دامنه تمامی نمودارهای دو-حلقه و بالاتر (که شامل انتشارگر فوتونی هستند) همگی صفر می‌شوند. در واقع، تانسور

۶. مراجع

قطبش فوتون و جرم شوئینگر در حد تک-حلقه دقیق و کامل بوده که این نتیجه با جواب غیراختلالی شوئینگر نیز سازگار بود. در انتها نیز به مقایسه مدل شوئینگر با سایر مدل‌های دو بعدی نظیر مدل راریتا-شوئینگر و الکترودینامیک کوانتومی نرده‌ای پرداختیم. در هر سه نظریه، اگرچه میدان فوتونی مشترک است، اما اسپین ماده برهم‌کنشی متفاوت است. پس انتظار داشتیم که ساختار تانسوری قطبش فوتون همچنان سازگار با اتحاد وارد باشد که برآورده شد. تفاوت ضرایب عددی در تانسور قطبش هر مدل ناشی از راس برهم‌کنشی متفاوت بود. عبارت قطبش مدل راریتا-شوئینگر با فرمیون بدون جرم به صورت محدود و برای الکترودینامیک نرده‌ای نامحدود شد. در حالت بدون جرم، قطب فیزیکی انتشارگر فوتون در دو مدل شوئینگر و راریتا-شوئینگر در حد تک-حلقه به یک اندازه تصحیح شد اما در حالت جرم‌دار نتایج متفاوت بود. این که آیا جرم تولید شده برای فوتون در مدل راریتا-شوئینگر در مرتبه‌های بالاتر تصحیح می‌شود یا خیر، همچنان در دست بررسی است [۲۷].

1. G't Hooft, *Nucl. Phys. B* **75** (1974) 461.
2. Y Frishman and J Sonnenschein, *Phys. Rept.* **223** (1993) 309.
3. A Armoni, Y Frishman, and J Sonnenschein, *Nucl. Phys. B* **596** (2001) 459.
4. W Thirring, *Ann. Phys.* **3** (1958) 91.
5. J S. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962) 2425.
6. J H. Lowenstein and J A. Swieca, *Annals Phys.* **68** (1971) 172.
7. A Casher, J B. Kogut, and L Susskind, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 732.
8. L S. Brown, *Nuovo Cimento.* **29** (1963) 617.
9. A Casher, J B. Kogut, and L Susskind, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 792.
10. G 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **75** (1974) 461.
11. E Abdalla, M C. B. Abdalla, and K D. Rothe, World Scientific, 1991.
12. S Yasmin, *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) 199.
13. W Jong, et al., *Phys. Rev. D* **106** (2022) 08394.
14. R Belyansky, S Whitsitt, et al., *Phys. Rev. Lett.* **132** (2024) 2307.
15. L Fraser-Taliente, C P. Herzog, and A Shrestha, *JHEP* **06** (2025) 252.
16. L Batini, L Kuhn, et al., *Phys. Rev. D* **110** (2024) 2406.
17. H Grosse and J Madore, *Phys. Lett. B* **283** (1992) 218.
18. H Grosse and P Presnajder, *Lett. Math. Phys.* **46** (1998) 61.
19. F Ardalan, M Ghasemkhani and N Sadooghi, *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1606.
20. M Ghasemkhani, *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) 2921.
21. M Ghasemkhani, A A. Varshovi and R Bufalo, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 065005.
22. D Schwinger, *Phys. Rev. Letters* **3** (1959) 296.

23. C Adam, R A. Bertlmann and P Hofer, *Riv. Nuovo Cim.* **16**N8 (1993) 1.
24. M E. Peskin and D V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”, Addison-Wesley, (1995).
25. W Rarita, J Schwinger, *Phys. Rev.* **60** (1941) 61.
26. M Ghasemkhani, G Soleimani, A Soto, and R Bufalo, *Eur. Phys. J. C* **84** (2024) 1281.
27. M Ghasemkhani, G Soleimani, On higher-order corrections to the Schwinger mass in two-dimensional Rarita-Schwinger model, work in progress.
28. F T. Brandt, A k. Das, and J Frenkel, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 067701.