

جاذب هتروکلینیک در شبکه سه جمعیتی نوسانگرهای کوراموتو

احسان بوالحسنی^{۱*} و سید حامد ابوطالبی^{۲,۳}

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲. آزمایشگاه ملی ماده چگال، پژوهشگاه دانشهای بنیادی، تهران

۳. پژوهشکده فیزیک کوانتوم و ماده، پژوهشگاه دانشهای بنیادی، تهران

پست الکترونیکی: ehsan.bolhasani@gmail.com

(دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۵/۲۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۴/۰۹/۱۵)

چکیده:

چرخه‌های هتروکلینیک، به عنوان الگویی برای توصیف تغییر حالت متوالی گذرا و انعطاف‌پذیر سامانه، در شبکه‌های عصبی و مدارهای ژنتیکی، نوسانگرهای شیمیایی و لیزرها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و برای توصیف حالت‌های شبه‌پایدار و بررسی دینامیک اطلاعات به کار می‌روند. در این مطالعه، شبکه‌ای سه‌جمعیتی از نوسانگرهای فازي نوع کوراموتو را در تقریب نزدیک به خوشه در نظر گرفته و با فرض کاهش روی خمینه اوت-آنتونسن، دینامیک آن به دستگاهی از نوع لوتکا-ولترا نگاشته می‌شود. این نگاشت امکان استخراج شرط‌های لازم و کافی صریح، برای وجود چرخه هتروکلینیک در جهت مشخص بین تعادل‌های مرزی را فراهم می‌کند. شرط‌هایی که مستقیماً به ضرایب جفت‌شدگی، اختلاف‌فازها و جابه‌جایی فاز جمعیت‌های نوسانی تکیه دارند. به منظور بررسی اعتبار این شرط‌ها، کل فضای اختلاف‌فاز قفل شده نمونه‌برداری و نواحی دارای چرخه مورد نظر مشخص شده‌اند. شبیه‌سازی مسیرهای فضای فاز، وجود دینامیک چرخه هتروکلینیک را تایید می‌کند. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهند که افزایش ثابت جابه‌جایی فاز، در بازه محدودی از پارامترهای بررسی شده، موجب کاهش نواحی اختلاف‌فازهایی می‌شود که از دینامیک چرخه هتروکلینیک پشتیبانی می‌کند. این نتایج، معیارهایی قابل آزمون برای طراحی شبکه‌هایی کنترل‌پذیر با دینامیک گذرای انعطاف‌پذیر فراهم می‌کند و پلی روشن بین الگوهای فیزیکی نوسانگرها و کارکردهای عصبی مغز، تولید آهنگ‌های چند مرحله‌ای در زیست سامانه‌ها و نیز کاربردهای الهام‌گرفته از مغز در هوش مصنوعی ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: نوسانگر کوراموتو، دینامیک لوتکا-ولترا، چرخه هتروکلینیک، رقابت بدون برنده، دینامیک گذرا

[۱-۴]. الگوی کوراموتو، یکی از پایه‌ای‌ترین الگوهای

نوسانگرهای فازي جفت‌شده است که ابتدا توسط یوشیکی

کوراموتو^۱ در سال ۱۹۷۵ معرفی شد [۵]. این الگو رفتار جمعی

نوسانگرهای جفت‌شده، از جمله همگام‌سازی^۲، حالت‌های

کایمری^۳ و چرخه‌های هتروکلینیک^۴ را توصیف می‌کند [۶-۹].

در این چارچوب، قفل‌شدگی فاز، همگام‌سازی و تغییر حالت

۱. مقدمه

الگوسازی نوسانگرهای فازي جفت‌شده، روش مرسوم برای

مطالعه پدیده‌های نوسانی و هماهنگ است و در علوم مختلفی،

از شیمی، فیزیک تا بررسی چگونگی کارکرد مراکز ایجاد

الگوهای حرکتی و مطالعه شبکه‌های شناختی مغز، به کار می‌رود

۱. Yoshiki Kuramoto

۲. Synchronization

۳. Chimera

۴. Heteroclinic cycles

متوالی^۱ میان حالت‌های شبه‌پایدار، از سازوکارهای اساسی هستند که بسیاری از کارکردهای محاسباتی را تبیین می‌کنند [۱۰، ۱۱].

از سوی دیگر، چرخه‌های هتروکلینیک به‌عنوان الگویی برای توصیف تغییر حالت متوالی گذرا و انعطاف‌پذیر سامانه، در شبکه‌های عصبی و مدارهای ژنتیکی تا نوسانگرهای شیمیایی و لیزرها اهمیت ویژه‌ای دارند و برای توصیف حالت‌های شبه‌پایدار و بررسی دینامیک اطلاعات به‌کار می‌روند. شناخته‌شده‌ترین نمونه از دینامیک چنین سامانه‌هایی، الگوی کلاسیک سه‌گونه‌ای می‌لئونارد است که نمونه مشهوری از ظهور دینامیک چرخه‌های هتروکلینیک است [۱۲]. در این مثال نواحی مشخصی از فضای پارامتر، هیچ مدار حدی^۲ ای ندارد و جریان دینامیکی روی وجوه سیمپلکس، به‌صورت چرخه‌ای میان نقاط تعادل رأس‌های آن جابه‌جا می‌شود. تحلیل نسخه نامتقارن همین الگو نیز شرایط لازم و کافی روشنی برای وجود و جهت این چرخه هتروکلینیک ارائه می‌دهد [۱۳]. افزون بر این، اثبات شده است که چرخه‌های هتروکلینیک در حضور اغتشاشات تناوبی کوچک می‌توانند به دینامیک‌های پیچیده‌تر، از جمله چنبره تا آشوب، منجر شوند [۲، ۱۴، ۱۵].

رابطه بین این دو موضوع، یعنی نوسانگرهای فازی و سامانه‌های رقابتی، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. این دینامیک با استفاده از کاهش‌های تحلیلی مبتنی بر خمینه اوت-آنتونسن^۳ روشن‌تر بیان شده است [۹]. بیک^۴ نشان داد که در تقریب نزدیک به خوشه^۵، دینامیک سه جمعیت از نوسانگرهای کوراموتو را می‌توان به دستگاهی از نوع لوتکا-ولترا برای متغیر انحراف از نظم کامل، کاهش داد [۱۶]. این نتیجه امکان انتقال بسیاری از نتایج کلاسیک الگوهای لوتکا-ولترا، از جمله وجود چرخه‌های هتروکلینیک، به زبان شبکه‌های نوسانگر را فراهم می‌کند.

تحلیل چرخه‌های هتروکلینیک در شبکه‌های سه‌جمعیتی

کوراموتو، به‌ویژه با بهره‌گیری از روش کاهش اوت-آنتونسن، در سال‌های اخیر موضوع مطالعات متعددی بوده است [۱۷-۲۰]. برای نمونه، مارتنز و همکاران حالت‌های کایمری پایدار نوع SDS و DSD را در یک شبکه مثلثی سه‌جمعیتی تحلیل کردند و نشان دادند که این سامانه از دوشاخگی دوگانه^۶ پشتیبانی می‌کند [۱۷]. بیک و مارتنز این تحلیل را به شبکه‌های بزرگ‌تر گسترش دادند و به تغییر حالت متوالی هتروکلینیک در حضور جفت‌شدگی‌های مرتبه بالاتر پرداختند [۱۸]. در سال‌های اخیر دینامیک‌های پیچیده‌تری نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای مثال، بیک و همکاران به مطالعه چرخه‌های هتروکلینیک در شش جمعیت جفت‌شده پرداخته‌اند [۲۰]. مطالعه دیگری نیز به بررسی دوشاخگی‌های سراسری برای کایمرای ضعیف در سه جمعیت متقارن پرداخته است [۲۱]. پژوهش‌های دیگر نیز به بررسی چرخه‌های هتروکلینیک در سامانه‌های چهار نوسانگر [۲۲]، گذارهای ناهنجار به همگام‌سازی با تعاملات مرتبه بالاتر [۲۳]، رویکرد بهنجارسازی گروه به اتصالات هوموکلینیک یا هتروکلینیک [۲۴]، پایداری نوسانات در الگوی می-لئونارد گسترده [۲۵]، گذار از کایمرای به آشوب گسترده در شبکه‌های ناهمگن [۲۶] و دینامیک روی چنبره‌های ناورداناشی از شکست تقارن اجباری [۲۷] پرداخته‌اند. با این حال، این مطالعات عمدتاً بر تحلیل‌های ریاضی متمرکز بوده یا نمایش‌های محدودی نظیر نمودارهای دوشاخگی یا مسیرهای فضای فاز ساده ارائه کرده‌اند و فضای فاز اختلاف‌فاز نوسانگرها برای شناسایی نواحی وقوع چرخه هتروکلینیک به‌صورت نظام‌مند کاوش نشده است [۲۸-۳۲].

تحلیل چرخه‌های هتروکلینیک در یک شبکه سه‌جمعیتی کوراموتو، به دلیل توانایی الگوسازی سامانه دینامیکی گذرای انعطاف‌پذیر دارای اهمیت ویژه‌ای است. این شبکه‌ها ساده‌ترین تقریب گسسته برای حلقه‌های پیوسته‌ای از نوسانگرها هستند و به‌عنوان الگویی پایه برای درک رفتارهای پیچیده در

۱. Sequential switching

۲. Limit cycle

۳. Ott-Antonsen

۴. Bick

۵. Near-cluster state

۶. Hopf bifurcation

پرداخته و نتیجه گیری بیان می شود.

۲. الگو

در این بخش از مقاله، به منظور مطالعه تأثیر قفل شدگی فاز نوسانگرها بر پیدایش دینامیک انعطاف پذیر چرخه هتروکلینیک، الگوی شامل سه جمعیت از نوسانگرهای کوراموتو در نظر گرفته می شود. سپس با استفاده از تقریب نزدیک به حالت خوشه ای، الگوی کاهش یافته ای به شکل سه معادله لوتکا-ولترای جفت شده با ضرایب ثابت به دست می آید. در ادامه، شرایط لازم برای وجود چرخه های هتروکلینیک در این چارچوب بررسی می شوند.

۲.۱. نوسانگرهای سه جمعیتی با قفل شدگی تقریبی فاز

به منظور توصیف دینامیک سامانه، سه جمعیت جفت شده از نوسانگرهای فاز در چارچوب الگوی کوراموتو در نظر گرفته می شوند. هر جمعیت با شاخص $\sigma = 1, 2, 3$ مشخص می شود و شامل N نوسانگر با بسامد زاویه ای یکسان است. فاز نوسانگر k ام در جمعیت σ ، با نماد θ_k^σ نمایش داده می شود. تغییر حالت هر نوسانگر با زمان بر اساس معادله زیر تعیین می شود:

$$\dot{\theta}_k^\sigma = \omega_\sigma + \sum_{\tau=1}^3 \frac{K_{\sigma\tau}}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j^\tau - \theta_k^\sigma - \alpha_{\sigma\tau}) \quad (1)$$

که در آن، ω_σ بسامد طبیعی نوسانگرهای جمعیت σ ، $K_{\sigma\tau}$ نمایانگر شدت تأثیر جفت شدگی نوسانگرهای جمعیت τ بر نوسانگرهای جمعیت σ است، و $\alpha_{\sigma\tau}$ تاخیر فاز بین این دو جمعیت را تعیین می کند.

در ساختار جفت شده، فرض می شود که شدت جفت شدگی بین نوسانگرهای درون یک جمعیت قوی تر از شدت جفت شدگی بین نوسانگرهای جمعیت های مجزا است. به ویژه:

$$K_{\sigma\tau} < K_{\sigma\sigma} \quad \text{for} \quad \tau \neq \sigma \quad (2)$$

این پیکربندی بیانگر حالتی است که در آن سه جمعیت به صورت ضعیف با یکدیگر برهم کنش می کنند و چارچوبی ساده برای مطالعه خوشه هایی با فازهای تقریباً قفل شده فراهم می کند.

سامانه های واقعی، مانند شبکه های عصبی (برای الگوسازی حافظه و تصمیم گیری) یا سامانه های زیستی (مانند رقابت گونه ها در بوم شناسی) یا عامل های سرکوبگر^۱ (در ژنتیک) عمل می کنند [۲، ۱۰، ۱۱، ۳۳].

با این حال، یک شکاف کلیدی در ادبیات موجود وجود دارد: شرایط لازم و کافی صریح برای وجود چرخه های هتروکلینیک برحسب پارامترهای قفل شدگی فاز، همراه با اعتبارسنجی این شرایط تاکنون ارائه نشده است. این شکاف به ویژه در کاربردهایی مانند پیش بینی رفتار تغییرات حالت متوالی در شبکه های عصبی و طراحی سامانه های مصنوعی با دینامیک هتروکلینیک، اهمیت فراوانی دارد [۳۴-۳۶].

در این مطالعه به این پرسش پاسخ می دهیم که تحت چه شرایطی بر حسب اختلاف فازها، متغیرهای جفت شدگی و نقاط تعادل مرزی، یک شبکه سه جمعیتی کوراموتو می تواند چرخه های هتروکلینیک پایدار را پشتیبانی کند، و چگونه می توان این شرایط را به صورت عددی در فضای فاز تایید کرد؟ برای تحلیل دقیق و قابل محاسبه، از تقریب نزدیک به خوشه و کاهش روی خمینه اوت-آنتونسن استفاده می کنیم که اجازه می دهد دینامیک جمعیتی به دستگاهی از نوع لوتکا-ولترا کاهش یابد. دستاوردهای اصلی این پژوهش عبارتند از: (الف) شرایط بسته ای برای پیش بینی چرخه های هتروکلینیک بر اساس مقادیر قفل شدگی فاز جمعیت های نوسانی به صورت تحلیلی ارائه می شود. (ب) تصویرسازی عددی جامعی برای اعتبارسنجی معرفی می گردد و امکان آزمون عملی سامانه های واقعی را فراهم می کند و به این ترتیب انتقال نتایج از الگوهای رقابتی به الگوهای نوسانگری را تسهیل می کند.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش بعد، الگوی کوراموتو و کاهش آن به دستگاه لوتکا-ولترا معرفی و نگاشت ضرایب ارائه می شود. سپس، شرایط لازم و کافی برای تشکیل چرخه های هتروکلینیک به صورت تحلیلی استخراج می شود. در ادامه، روش عددی مش بندی فضای فاز و نتایج عددی نمایش داده می شوند. در نهایت، بخش پایانی به بحث پیرامون پایداری چرخه و مقایسه با کارهای قبلی و کاربردهای احتمالی

۲.۲. کاهش به معادله لوتکا-ولترا

برای تحلیل دینامیک هم‌زمان سه جمعیت در تقریب نزدیک به خوشه‌ای، ابتدا متغیر نظم هر جمعیت به صورت پارامتر نظم کوراموتو تعریف می‌شود:

$$z_{\sigma}(t) = \rho_{\sigma}(t) e^{i\phi_{\sigma}(t)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\theta_k^{\sigma}(t)}, \quad (3)$$

$$\sigma = 1, 2, 3,$$

که در آن پارامتر نظم و ϕ_{σ} فاز متوسط جمعیت σ است. با فرض توزیع تقریباً یکنواخت بسامدهای طبیعی در هر جمعیت و استفاده از کاهش اوتو-آنتونسن، معادلات (۳) به معادلاتی که روی خمینه $\rho_{\sigma}, \phi_{\sigma}$ بسته است، تبدیل می‌شوند. در تقریب نزدیک به حالت خوشه‌ای، یعنی $\rho_{\sigma}(t) \approx 1$ و انحراف کوچک

$$R_{\sigma}(t) = 1 - \rho_{\sigma}(t), \quad 0 \leq R_{\sigma} < 1, \quad (4)$$

دینامیک R_{σ} ها تا مرتبه دوم استخراج می‌شود. با صرف نظر کردن از جملات کوچک مرتبه‌های بالاتر (شامل ضرب سه گانه $R_{\sigma} R_{\tau} R_{\nu}$)، معادلات حاکم بر دینامیک به شکل

$$\dot{R}_{\sigma} = R_{\sigma} \left[-(\hat{Y}_{\sigma} + Y_{\sigma\sigma}) + \frac{1}{\gamma} (\hat{Y}_{\sigma} + 3Y_{\sigma\sigma}) R_{\sigma} + \sum_{\tau \neq \sigma} Y_{\sigma\tau} R_{\tau} \right], \quad (5)$$

به دست می‌آیند، که در آن

$$Y_{\sigma\tau} = K_{\sigma\tau} \sin(\phi_{\tau} - \phi_{\sigma} + \alpha_{\sigma\tau}), \quad (6)$$

$$\hat{Y}_{\sigma} = \sum_{\tau \neq \sigma} Y_{\sigma\tau}. \quad (7)$$

با تعریف ضرایب مناسب، معادلات (۵) را می‌توان به شکل استاندارد دستگاه سه بعدی لوتکا-ولترا از نوع رقابتی نوشت:

$$\dot{R}_{\sigma} = R_{\sigma} \left(s_{\sigma} - p_{\sigma} R_{\sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} r_{\sigma\tau} R_{\tau} \right), \quad (8)$$

که در آن

$$s_{\sigma} = -(\hat{Y}_{\sigma} + Y_{\sigma\sigma}),$$

$$p_{\sigma} = -\frac{1}{\gamma} (\hat{Y}_{\sigma} + 3Y_{\sigma\sigma}), \quad (9)$$

$$r_{\sigma\tau} = -Y_{\sigma\tau}, \quad (\tau \neq \sigma).$$

در این نگاشت، حالت رقابتی متناظر با $s_{\sigma} > 0$ ، $p_{\sigma} > 0$ و

$r_{\sigma\tau} > 0$ است، که به ترتیب معادل با شرایط

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\sigma} + Y_{\sigma\sigma} &< 0, \\ \hat{Y}_{\sigma} + 3Y_{\sigma\sigma} &< 0, \\ Y_{\sigma\tau} &< 0 \end{aligned} \quad (10)$$

هستند. این چارچوب به طور مستقیم امکان استفاده از نتایج کلاسیک الگوهای لوتکا-ولترا (مانند معیارهای می-لئونارد و چی-هسو-وو^۱) را برای بررسی شرایط لازم و کافی وجود چرخه‌های هتروکلینیک فراهم می‌کند. مزیت این نگاشت آن است که امکان استفاده از تجزیه و تحلیل کلاسیک لوتکا-ولترا برای استنتاج شرایط هتروکلینیک را فراهم می‌کند، و پارامترهای فیزیکی الگو مستقیماً در ضرایب لوتکا-ولترا ظاهر می‌شوند.

۳. تحلیل شرایط وجود چرخه هتروکلینیک

به منظور محاسبه نقاط تعادل، سمت چپ مجموعه معادلات (۵) برابر با صفر قرار داده می‌شود:

$$0 = R_{\sigma} \left(s_{\sigma} - p_{\sigma} R_{\sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} r_{\sigma\tau} R_{\tau} \right), \quad (11)$$

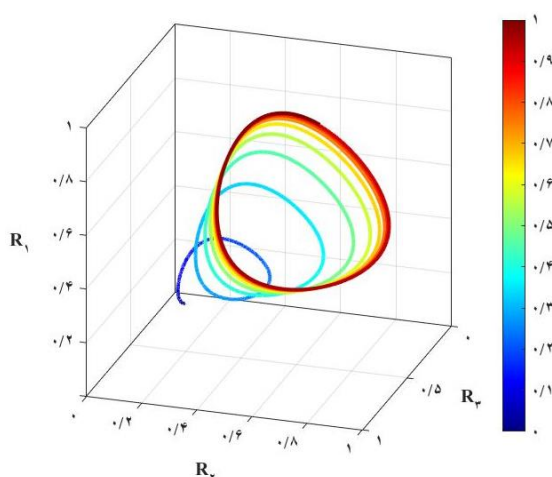
چهار حالت کلی (معادل با هشت نقطه تعادل) برای پاسخ‌های این معادله می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0), \\ (R_{\sigma}^*, R_{\sigma}^*, R_{\sigma}^*), \\ (0, R_{\sigma}^*, R_{\sigma}^*), \quad (R_{\sigma}^*, 0, R_{\sigma}^*), \quad (R_{\sigma}^*, R_{\sigma}^*, 0), \\ E_{\sigma=1,2,3} = (R_{\sigma}^*, 0, 0), \quad (0, R_{\sigma}^*, 0), \quad (0, 0, R_{\sigma}^*) \end{aligned} \quad (12)$$

در این جا، R_{σ}^* جواب معادله

$$0 = \left(s_{\sigma} - p_{\sigma} R_{\sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} r_{\sigma\tau} R_{\tau} \right), \quad (13)$$

است. این پاسخ‌ها به ترتیب متناظر با حالت‌های فاقد مؤلفه صفر، دارای تنها یک مؤلفه صفر، دارای تنها یک مؤلفه غیرصفر و فاقد مؤلفه غیرصفر هستند. با در نظر گرفتن روش تحلیل‌های انجام شده در مراجع [۱۲، ۱۳]، سه نقطه E_{σ} ، برای $\sigma = 1, 2, 3$ ، نقاط تعادل زینی با یک جهت ناپایدار و دو جهت پایدار هستند. سه نقطه تعادل زینی این معادله در شکل ۱ نمایش داده شده است. در این شکل بردارهای آبی رنگ اطراف نقطه زینی $(0, 0, R_3^*)$ ، نمایانگر پایداری در جهت‌های R_1 و



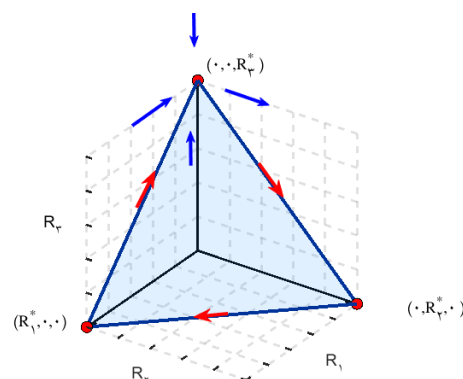
شکل ۲. نمایش سه بعدی مسیر حالت سامانه در فضای فاز، برای سامانه‌ای با دینامیک تغییر حالت‌های متوالی (نزدیک به چرخه هتروکلینیک). کل زمان تحول سامانه به یک بهنجار شده و تغییر رنگ گذشت زمان را مشخص می‌کند.

بنابراین، قیده‌های (۱۶) به همراه (۱۵)، شرایط لازم و کافی برای وجود چرخه هتروکلینیک $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1$ خواهند بود.

۳. تحلیل عددی

به منظور ارزیابی صحت معادلات به دست آمده و بررسی رفتار دینامیکی سامانه سه جمعیتی کوراموتوی کاهش یافته به لوتکا-ولترای دارای قفل‌شدگی فاز، شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از روش ODE45 در نرم‌افزار MATLAB انجام شد. پارامترهای شامل ضرایب جفت‌شدگی $k = 0.1$ و $\alpha = 0.02$ و شرایط اولیه $(R_1, R_2, R_3) = (0.1, 0.11, 0.51)$ بودند که در بازه زمانی صفر تا ۲۰۰۰ حل شدند.

همه شبیه‌سازی‌ها در زمان بی‌بعد انجام شده‌اند. این مجموعه از پارامترها طوری انتخاب شدند که شرایط (۱۵) و (۱۶) برای آن برقرار باشد. شکل ۲، مسیر سامانه را در فضای فاز سه بعدی برای این مجموعه پارامترها نشان می‌دهد. در این شکل، رنگ مسیر بر اساس زمان بهنجار شده تغییر می‌کند و مسیر تحول سامانه را از شرایط اولیه تا جاذب هتروکلینیک به خوبی نشان می‌دهد. این مسیر به صورت یک حلقه متناوب بین نقاط تعادل مرزی (نقاط زینی) ظاهر می‌شود و با ویژگی‌های چرخه‌های هتروکلینیک در الگوی می-لئونارد همخوانی دارد.



شکل ۱. نمایش نقاط تعادل زینی در فضای فاز سه بعدی سامانه. بردارهای آبی دو جهت پایدار در امتداد R_1 و R_2 و یک جهت ناپایدار در امتداد R_3 را نشان می‌دهند. بردارهای قرمز رنگ جهت چرخه هتروکلینیک از اتصال نقاط زینی را نشان می‌دهد.

R_3 و ناپایداری در جهت R_2 است. به این ترتیب، سه تعادل مرزی E_σ وجود دارد که R_σ^* در آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_\sigma^* = \frac{s_\sigma}{p_\sigma} = \frac{2s_\sigma}{s_\sigma - 2Y_{\sigma\sigma}} \quad (14)$$

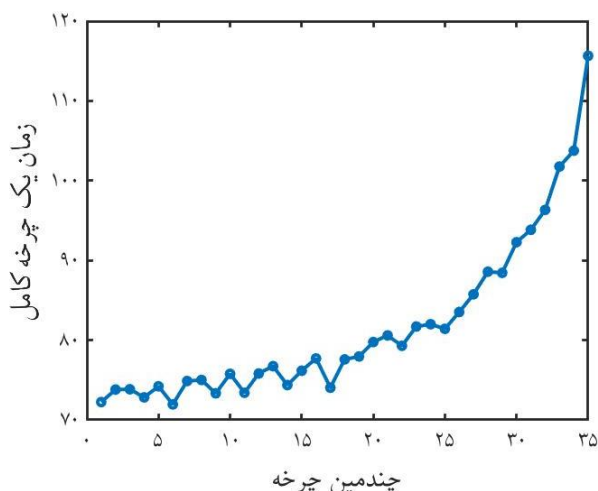
برای آن‌که این نقاط از نظر فیزیکی قابل قبول باشند، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} s_\sigma &> 0, \\ s_\sigma - 2Y_{\sigma\sigma} &> 0, \quad \Rightarrow \quad 0 < R_\sigma^* \leq 1 \\ s_\sigma &\leq -2Y_{\sigma\sigma} \end{aligned} \quad (15)$$

برای تشکیل چرخه هتروکلینیک جهت‌دار $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1$ ، نقطه زینی E_σ باید یک جهت ناپایدار به سمت $E_{\sigma+1}$ و یک جهت پایدار به سمت $E_{\sigma-1}$ داشته باشد (جهت‌های قرمز رنگ اطراف نقطه زینی E_σ در شکل ۱ را مشاهده کنید).

خطی‌سازی دستگاه در همسایگی هر نقطه زینی نشان می‌دهد که این شرط دقیقاً معادل برقراری شش نامساوی زیر است (برای جزئیات، به مراجع [۱۲، ۱۳] مراجعه شود):

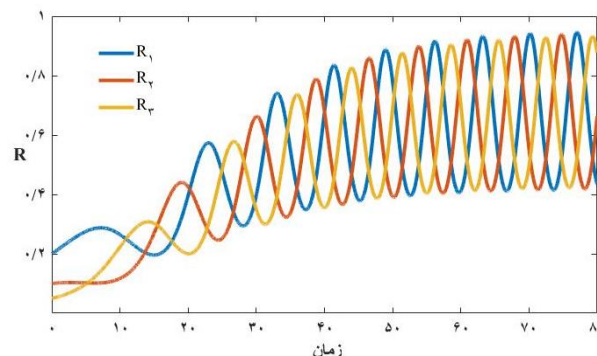
$$\begin{aligned} s_1 + Y_{11} \frac{2s_1}{s_1 - 2Y_{11}} &> 0, \quad s_3 + Y_{31} \frac{2s_1}{s_1 - 2Y_{11}} < 0, \\ s_2 + Y_{22} \frac{2s_2}{s_2 - 2Y_{22}} &> 0, \quad s_1 + Y_{12} \frac{2s_2}{s_2 - 2Y_{22}} < 0, \\ s_3 + Y_{33} \frac{2s_3}{s_3 - 2Y_{33}} &> 0, \quad s_2 + Y_{23} \frac{2s_3}{s_3 - 2Y_{33}} < 0, \end{aligned} \quad (16)$$



شکل ۴. تغییرات زمان یک چرخه کامل نسبت به شماره چرخه هتروکلینیک. این نمودار افزایش تدریجی دوره‌های نوسانی را نشان می‌دهد که ناشی از نزدیک شدن سامانه به جاذب هتروکلینیک در الگوی کاهش یافته لوتکا-ولترا است. پارامترها در این شکل عبارتند از: $\alpha = 0.02$, $k = 0.1$ با شرایط اولیه $R_1 = 0.1$, $R_2 = 0.11$ و $R_3 = 0.51$.

شده است (شکل ۵). برای رسیدن به این هدف فضای فاز ϕ_3 بر حسب ϕ_3 از $-\pi$ تا π مش بندی شد و هر نقطه‌ای که شرط وجود چرخه هتروکلینیک را ارضا می‌کرد، برای دو مقدار مختلف پارامتر α ، با رنگ قرمز مشخص شد. در شکل ۵ (الف)، دو حالت حدی $\alpha = 0$ و $\alpha = 1/4$ نمایش داده شده‌اند. این دو حالت به دلیل نقض شرایط فیزیکی مسئله، از جمله تقریب نزدیک به حالت خوشه‌ای ($\alpha = 1/4$) و R_σ^* محدود ($\alpha = 0$) که تحقق پیدا نمی‌کند، مورد قبول نیستند. این دو نقطه به عنوان نقاط حدی برای α در نظر گرفته شده‌اند.

در نمودارهای شکل ۵ (ب)، ۵ (ج) و ۵ (د)، با افزایش مقدار α در بازه محدود بررسی شده بین صفر تا 0.7 ، مساحت ناحیه فضای قفل‌شدگی که شرایط لازم برای تشکیل چرخه هتروکلینیک را برآورده می‌کند، افزایش می‌یابد.



شکل ۳. نمودار زمانی تغییرات مرتبه‌های جمعیتی در سامانه سه‌جمعیتی کوراموتو، نشان‌دهنده رفتار نوسانی با دوره تناوبی است که با گذشت زمان بزرگتر می‌شود. چنین پدیده‌ای تأییدی بر وجود چرخه‌های هتروکلینیک است. زمان، بی بعد در نظر گرفته شده است.

نتایج این شبیه‌سازی‌ها نشان‌دهنده ظهور الگوهای چرخه‌ای هتروکلینیک در فضای فاز است که با رفتار تغییر حالت متوالی بین حالت‌هایی که هر جمعیت غالب است سازگار است.

شکل ۳، متغیرهای R_1 ، R_2 و R_3 را بر حسب زمان، برای همین مثال نمایش می‌دهد. نوسان‌های دوره‌ای و تغییر حالت بین نقاط زینی، وجود چرخه هتروکلینیک را تایید می‌کند. این الگو با افزایش زمان، به یک رفتار پایدار چرخه‌ای نزدیک می‌شود که دوره آن با تعداد چرخه‌ها رشد می‌کند.

در شکل ۴، تغییرات زمان یک چرخه کامل نسبت به عدد چندمین چرخه نشان داده شده است. این شکل افزایش تدریجی دوره‌ها، به دلیل نزدیک شدن سامانه به جاذب هتروکلینیک را آشکار می‌سازد. این نتایج اولیه نشان می‌دهند که کاهش اوت-آنتونسن به درستی دینامیک رقابتی لوتکا-ولترا را در این سامانه بازتولید کرده و شرایط لازم برای ظهور چرخه‌های هتروکلینیک را فراهم می‌کند.

در پایان شرط وجود چرخه هتروکلینیک در تمامی نقاط فضای فاز، برای حالت‌های متقارن ($\alpha = 0$) و نامتقارن ($\alpha = 1/4$) و مقادیر بزرگ ($\alpha = 0.1, 0.5, 0.7$) بررسی

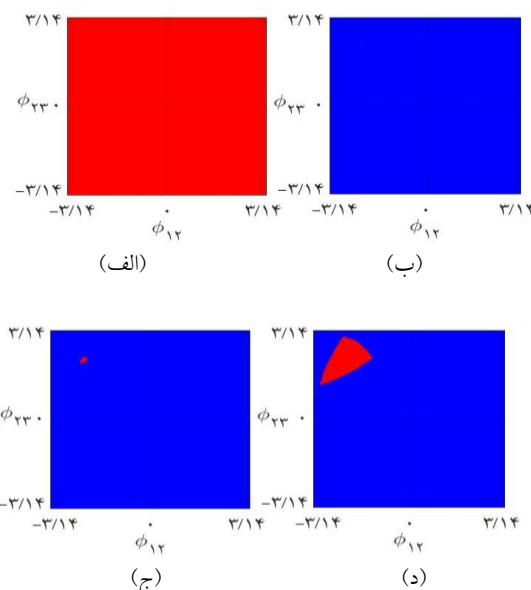
استخراج و به صورت فیزیکی تفسیر شد (به قیدهای (۱۵) و (۱۶) رجوع کنید).

نقشه‌های پارامتری فضای اختلاف فازهای قفل شده ترسیم شدند تا نواحی دارای تغییر حالت متوالی را با ارزیابی قیدهای (۱۵) و (۱۶) پیش‌بینی کنند. این پیش‌بینی‌ها با شبیه‌سازی‌های فضای فاز و تحول زمانی سامانه (شکل‌های ۲ تا ۴) و سنجش افزایش تدریجی دوره نوسان هنگام نزدیک شدن به چرخه تأیید شد. تمام نتایج بر حسب زمان بی‌بعد گزارش شده‌اند.

اثر جابه‌جایی فاز α نقشه‌ها نشان می‌دهند که در بازه پارامترهای محدود بررسی شده، افزایش α ، اندازه نواحی اختلاف فازهایی را که دارای چرخه هتروکلینیک هستند کاهش می‌دهد. از این رو، جابه‌جایی فاز می‌تواند به عنوان پارامتر فیزیکی قابل کنترل برای تضعیف یا خاموش کردن تغییر حالت‌های گذرای متوالی به کار رود.

تحلیل حاضر بر جمعیت‌های نسبتاً همگن و جفت‌شدگی‌های ساده ایستا تکیه دارد و نوفه، ناهمگنی بسامدها، توپولوژی‌های پیچیده، تاخیر زمانی و جفت‌شدگی‌های مرتبه‌های بالاتر را به صورت صریح در نظر نمی‌گیرد. بسط‌های طبیعی شامل: (الف) وارد کردن ناهمگنی و نوفه و بررسی پایداری چرخه تحت اغتشاش، (ب) مطالعه شبکه‌های بزرگ‌تر و تعاملات مرتبه بالاتر برای نقشه‌های پارامتری غنی‌تر، و (ج) افزودن تاخیر و مقایسه با کاهش‌های مبتنی بر الگوی کوراموتو دارای تاخیر از جمله پیشنهادات برای پژوهش‌های آینده است.

پژوهش حاضر معیارهای قابل طراحی و آزمون برای مهندسی رفتار تغییر حالت متناوب در سامانه‌های فیزیکی و زیستی فراهم می‌کند و مسیری عملی به سوی بهره‌گیری از دینامیک هتروکلینیک در محاسبات الهام‌گرفته از مغز و ساخت آهنگ‌های چندمرحله‌ای پیشنهاد می‌دهد. همچنین، نشان می‌دهد چگونه پارامترهای فیزیکی قابل کنترل α می‌توانند به صورت نظام‌مند، در محدوده‌های مشخص، احتمال وقوع چرخه را تنظیم و کنترل کنند.



شکل ۵. نقشه نواحی دارای چرخه هتروکلینیک در فضای اختلاف فازهای قفل شده برای چندین مقدار مختلف جابه‌جایی فاز α . هر نقطه شبکه بر اساس قیدهای تحلیلی (۱۵) و (۱۶) ارزیابی شده است. نقاط قرمز بیانگر برقراری همزمان این دو قید و وجود چرخه مورد نظر هستند. چهار نمودار مقادیر مختلف α را نشان می‌دهند: نمودار (الف) $\alpha = 1/4$ و صفر که کاملاً شبیه به یکدیگرند. (ب) مربوط به جابه‌جایی فاز $\alpha = 0.01$ ، (ج) مربوط به جابه‌جایی فاز $\alpha = 0.1$ و (د) مربوط به جابه‌جایی فاز $\alpha = 0.7$ است.

۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، چارچوب تحلیلی و در عین حال فشرده برای توضیح ظهور چرخه هتروکلینیک در شبکه سه جمعیتی کوراموتو ارائه کردیم. با اتکا به تقریب نزدیک به خوشه و کاهش روی خمینه اوت-آنتونسن، دینامیک شبکه به یک دستگاه رقابتی لوتکا-ولترا نگاشته شد که در آن می‌توان رفتار انتقال متوالی را به صورت شفاف تحلیل کرد. دستاوردهای اصلی به اختصار چنین‌اند:

شرط‌های لازم و کافی صریح برای وجود چرخه هتروکلینیک با جهت مشخص بین تعادل‌های مرزی، بر حسب ضرایب جفت‌شدگی مؤثر، اختلاف فازهای قفل شده و جابه‌جایی فاز α

مراجع

1. K J Friston, *Neuroimage*, 5 (1997) 164.
2. M Rabinovich, et al., *Physical review letters*, 87 (2001) 068102.

3. S H Strogatz, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **143** (2000) 1.
4. J A Acebrón, et al., *Reviews of modern physics*, **77** (2005) 137.
5. Y Kuramoto, "International symposium on mathematical problems in theoretical physics", kyoto university, kyoto/Japan. (2005).
6. D Hansel, G Mato, and C Meunier, *Neural computation*, **7** (1995) 307.
7. A S Pikovsky, et al., *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **104** (1997) 219.
8. P Ashwin, and J W Swift, *Journal of Nonlinear Science*, **2** (1992) 69.
9. E Ott, and TM Antonsen, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **18** (2008) 3.
10. M I Rabinovich, et al., *Reviews of modern physics*, **78** (2006) 1213.
11. S Smale, *Journal of Mathematical Biology*, **3** (1976) 5.
12. R M May, and W J Leonard, *SIAM journal on applied mathematics*, **29** (1975) 243.
13. C W Chi, L I Wu, and S B Hsu, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **58** (1998) 211.
14. V S Afraimovich, S B Hsu, and H E Lin, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(2001) 435.
15. V S Afraimovich, M I Rabinovich, and P Varona, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **14** (2004) 1195-1208.
16. I S Aranson, et al., *Advances in Dynamics, Patterns, Cognition: Challenges in Complexity*. Springer. (2017).
17. E A Martens, *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **82** (2010) 016216.
18. E A Martens, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **20** (2010).
19. S Lee, and K Krischer, *Physical Review E*, **107** (2023) 054205.
20. P Ashwin, and C Bick, *Journal of Nonlinear Science*, **35** (2025) 45.
21. P Ashwin, and O Burylko, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **25** (2015).
22. A E Emelin, E A Grines, and T A Levanova, *Regular and Chaotic Dynamics*, **29** (2024) 205-217.
23. I León, et al., *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **34** (2024) 1.
24. P Guo, Y Lan, and J Qiao, Renormalization group based implicit function approach to connecting orbits. *arXiv preprint arXiv* (2025) 2507.00749.
25. I Sorin, A Nepomnyashchy, and V Volpert, *arXiv preprint arXiv* (2025) 2502.18048.
26. P Floriach, J Garcia-Ojalvo, and P Clusella, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **35** (2025).
27. C Bick, J Mujica, and B Rink, *arXiv preprint arXiv*:2408.02119, (2024).
28. C R Laing, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **238** (2009) 1569.
29. O E Omel'chenko, *Nonlinearity*, **31** (2018) 121.
30. M Breakspear, S Heitmann, and A Daffertshofer, *Frontiers in human neuroscience*, **4** (2010) 190.
31. D M Abrams, and S H Strogatz, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **16** (2006) 21.
32. C Bick, and S von der Gracht, *Journal of Complex Networks*, **12** (2024) cnae009.
33. I Potapov, B Zhurov, and E Volkov, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **22** (2012).
34. V O Munyayev, et al., *Physical Review Letters*, **130** (2023) 107201.
35. P Ashwin, C Bick, and O Burylko, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, **2** (2016) 7.
36. A M Arefey, E A Grines, and G V Osipov, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **33** (2023).