

گذار فازهای توپولوژیکی در الگوی کیتائف تعمیم یافته با پتانسیل شیمیایی مستقل از زمان و واداشته تناوبی

جلیل ناجی^{۱*}، سعید انصاری^۲، و روح... جعفری^۳

۱. گروه فیزیک، دانشگاه ایلام، ایلام

۲. گروه علوم مهندسی و فیزیک، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا

۳. دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: j.naji@ilam.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۳/۰۲ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۴/۱۰/۲۳)

چکیده:

سامانه‌های دور از تعادل واداشته، در مقایسه با سامانه‌های مستقل از زمان، می‌توانند حالت‌های توپولوژیکی غنی‌تری از خود نشان دهند. به‌ویژه، درحالتی که وابستگی زمانی تناوبی است، فازهای توپولوژیکی بروز می‌دهند که نمونه مشابه آن‌ها در سامانه‌های در حال تعادل مشاهده نشده است. در این مقاله، گذار فازهای توپولوژیکی در الگوی تعمیم یافته کیتائف با پتانسیل شیمیایی وابسته به زمان دوره‌ای را بررسی می‌کنیم. ابتدا نمودار فاز سامانه را در حالت تعادل بررسی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که تحریک سامانه، با اعمال پتانسیل شیمیایی مستقل از زمان وابسته به زمان تناوبی، بر فازهای توپولوژیکی و طیف انرژی الگو تأثیر می‌گذارد و نمودار فاز آن را تغییر می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های دور از تعادل تناوبی، فازهای توپولوژیکی، الگوی کیتائف

۱. مقدمه

همبستگی قوی در سال‌های اخیر پیشرفت چشم‌گیری داشته

است [۱۲ و ۱۱]. از بین چندین رهیافت ممکن برای تحریک

چنین سامانه‌هایی، تحریک‌های تناوبی به بروز پدیده‌های جالبی منجر می‌شوند که، به‌جز احتمالاً در سامانه‌های شبه‌تناوبی [۱۳-۱۵]، هیچ همتایی در سامانه‌های متناظر در حال تعادل ندارند [۱۶ و ۱۷].

از آن‌جا که سامانه‌های واداشته ویژگی‌های توپولوژیکی غنی‌تری نسبت به سامانه‌های مستقل از زمان دارند، زمینه جدیدی را برای مطالعه حالت‌های توپولوژیکی ماده فراهم می‌کنند. از بین آن‌ها، سامانه‌های وابسته به زمان (واداشته)

در سال‌های اخیر، مطالعه فازهای ماده با منشأ توپولوژیکی توجه زیادی را در حوزه فیزیک حالت جامد به خود جلب کرده است [۷-۱]. در ابررساناهای توپولوژیکی، این فازها منجر به برانگیختگی‌های بنیادی با آمار غیر-آبلی^۱ می‌شوند [۸ و ۹]. اصل تناظر توده-مرز^۲ نشان می‌دهد که تفاوت‌های بین توپولوژی‌های توده موجب به‌وجود آمدن حالت‌های لبه‌ای می‌شود که در مرزها جابجایی شده‌اند [۱۰]. مطالعه دینامیک غیرتعادلی سامانه‌های کوانتومی الکترونی با

۱. Non-Abelian

۲. Bulk-boundary correspondence

تناوبی به دلیل شباهت‌های زیادی که با سامانه‌های ایستا دارند به طور ویژه مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱۸-۲۳]. ویژه‌حالت‌های فلوکه^۱ و شبه‌انرژی‌ها^۲ مشابه حالت‌های ویژه و انرژی‌های سامانه‌های ایستا هستند، اما تناوب طیف شبه‌انرژی ویژگی‌های توپولوژیکی جدیدی را معرفی می‌کند که منحصر به سامانه‌های واداشته دوره‌ای است و در سامانه‌های در حال تعادل مشاهده نمی‌شوند [۲۴-۲۷]. در واقع، برای توصیف کامل توپولوژی یک هامیلتونی وابسته به زمان، باید در جستجوی ناوردهای توپولوژیکی جدید بود [۲۸-۳۰].

از دیدگاه نظری، سامانه‌های کوانتومی واداشته‌ی تناوبی (فلوکه)، پیشینه طولانی در زمینه مطالعه پدیده‌های مختلفی نظیر جایگزینی دینامیکی [۱۶، ۱۷، ۳۱-۳۶]، اتلاف کوانتومی [۳۷] و آشوب کوانتومی [۳۸] دارند. با توجه به ماهیت تناوب زمانی هامیلتونی و خطی بودن معادله شرودینگر، می‌توان نظریه فلوکه را برای تحلیل چنین سامانه‌هایی به کار برد. این امر نتیجه بنیادی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و معادل زمانی نظریه بلوخ در فیزیک حالت جامد است. این قیاس که تأثیر قابل توجهی در فهم مسائل مرتبط با سامانه‌های بس‌ذره‌ای کوانتومی واداشته داشته است [۳۹]، با معرفی هامیلتونی فلوکه مؤثر، بیش از پیش مورد مطالعه و استفاده قرار گرفته است. هامیلتونی فلوکه مؤثر H_{eff} ، از طریق عملگر تحول زمانی در طول یک دوره $\exp(-iH_{\text{eff}}T) \equiv U(T, \circ)$ تعریف می‌شود که در آن T دوره تناوب محرک است.

علاوه بر این، ویژه توابع هامیلتونی مؤثر اطلاعاتی در مورد حالت‌های پایدار بلندمدت چنین سامانه‌های واداشته ارائه می‌دهند [۴۰-۴۲]. البته محاسبه هامیلتونی فلوکه در این دسته از سامانه‌های واداشته چالش مهمی است. در بسامدهای محرک بزرگ می‌توان از بسط ماگنوس^۳ استفاده نمود و هامیلتونی فلوکه را محاسبه کرد [۴۳]. چندین شکل از این بسط مورد استفاده محققان قرار گرفته است [۴۴ و ۴۵]، اما با این حال همه

آن‌ها در بسامدهای محرک کوچک و متوسط (شرایطی که در آن بسامد محرک تقریباً با مقیاس‌های انرژی سامانه برابر است) کارآمد نیستند. علاوه بر این، تعیین شعاع همگرایی در چنین بسطی خود چالش نظری بزرگی است [۴۶ و ۴۷]. در مواردی که بسامد محرک گسسته است (مانند پالس مربعی)، به نظر می‌رسد می‌توان از تکرار جمع این سری‌های ماگنوس با به‌کارگیری ترفند نسخه‌های تکثیرشده^۴ استفاده کرد [۴۸]. با این وجود، این روش برای پدیده‌هایی که در آن‌ها بسامد محرک مقدار پیوسته دارد به سادگی قابل انجام نیست. روش دیگری که برای محاسبه هامیلتونی فلوکه در سامانه‌های واداشته مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش معادله شارش^۵ است که در بسامدهای متوسط نتایج بسیار بهتری نسبت به بسط ماگنوس می‌دهد [۴۹]؛ اما پایداری نقاط ثابت^۶ که از این روش به دست می‌آیند را نمی‌توان برای سامانه‌هایی که در محدوده بسامدهای پایین تحریک شده‌اند، تعیین کرد. بنابراین، برای بسامدهای محرک پایین یا متوسط، حل تحلیلی هامیلتونی فلوکه دشوار به نظر می‌رسد. تقریب ضربه بی‌دررو را می‌توان در مورد رده‌ای از الگوی‌های انتگرال‌پذیر به کار برد [۵۰]. اما این دسته از تقریب‌ها تعمیم مشخصی به سامانه‌های برهم‌کنشی انتگرال‌ناپذیر ندارند.

البته کاربرد هامیلتونی مؤثر صرفاً به موارد خاصی نظیر بسامدهای محرک بزرگ محدود می‌شود [۵۱-۵۳] که در آن جذب انرژی ناچیز است. در مسائلی که بسامد محرک بزرگ نیست باید فراتر از هامیلتونی فلوکه مؤثر رفت [۴۸ و ۵۵]. روش‌های عددی مبتنی بر قطری‌سازی عملگر تحول امکان دست‌یابی به اطلاعات کامل ویژه‌حالت‌ها و ویژه‌مدهای فلوکه را فراهم می‌کند اما معمولاً به سامانه‌های با اندازه بسیار کوچک محدود می‌شود.

در این مقاله، الگوی کیتائف تعمیم‌یافته را مطالعه می‌کنیم که در آن عامل فاز به پارامترهای جفت‌شدگی اضافه شده است.

۱. Floquet

۲. Quasi-energy

۳. Magnus expansion

۴. Replica trick

۵. Flow equation

۶. Fixed points

۲.۱. پتانسیل شیمیایی ثابت

ابتدا فرض می‌کنیم که پتانسیل شیمیایی مقدار ثابت μ داشته باشد. می‌توان نشان داد که در حد ترمودینامیک، گاف انرژی در

$$\tau_c(k=\circ) = -w \pm \sqrt{\mu^\dagger + \Lambda^\dagger + \Delta^\dagger - 2\Lambda\Delta \cos(2\theta)} \quad (3)$$

$$\tau_c(k=\pi) = w \pm \sqrt{\mu^\dagger + \Lambda^\dagger + \Delta^\dagger + 2\Lambda\Delta \cos(2\theta)},$$

بسته می‌شود که این اتفاق در مرزهای فاز توپولوژیکی رخ

می‌دهد. با استفاده از تبدیل فوریه $c_m^{A,B} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{imk} c_k^{A,B}$ و

معرفی عملگر چهار-مولفه‌ای $\Gamma^\dagger = (c_k^{A\dagger}, c_k^{B\dagger}, c_{-k}^{A\dagger}, c_{-k}^{B\dagger})$ می‌توانیم هامیلتونی معادله (۲) را به شکل بوگولیوف-دوژن نمایش دهیم. در فضای تکانه خواهیم داشت:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \Gamma^\dagger H(k) \Gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mu & p_k & \circ & q_k \\ p_k^* & -\mu & -q_{-k} & \circ \\ \circ & -q_{-k}^* & -\mu & -p_{-k}^* \\ q_k^* & \circ & -p_{-k} & -\mu \end{pmatrix}, \quad (4)$$

که در آن $q_k = -(\Delta e^{-i\theta} + \Lambda e^{-i(\theta-k)})$ ، $p_k = -(w + \tau e^{-ik})$ و

$k = \pm(2j+1)\pi/N$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) است. در غیاب

پتانسیل شیمیایی سامانه دارای تقارن وارونی زمانی^۱، تقارن زیرشبکه^۲ و تقارن ذره-حفره^۳ است [۵۹]. در حضور پتانسیل

شیمیایی، تقارن وارونی زمان $\mathbf{T}H(k)\mathbf{T}^{-1} = H(-k)$

$\mathbf{U}_L H(k) \mathbf{U}_L^{-1} = -H(k)$ و تقارن زیرشبکه^۲ ($\mathbf{T} = \mathbf{U}_T \mathbf{K}$)

شکسته می‌شوند و تنها تقارن ذره-حفره باقی می‌ماند که در آن

$\mathbf{K}$ عملگر مزدوج مختلط است و

$$\mathbf{U}_T = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \end{pmatrix}, \mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

عملگر ذره-حفره با $\mathbf{P} = \mathbf{U}_p \mathbf{K}$ تعریف می‌شود که در آن

$$\mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad (6)$$

است. می‌توان نشان داد که هامیلتونی شرط

همچنین سامانه تحت تأثیر پتانسیل شیمیایی ثابت و وابسته به زمان تناوبی قرار دارد. ابتدا پتانسیل شیمیایی را ثابت فرض کرده و نمودار فاز و طیف انرژی الگوی کیتائف تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم. سپس تأثیر وجود بی‌نظمی در پتانسیل را بر روی طیف انرژی الگوی مطالعه می‌کنیم. در نهایت، پتانسیل محرک را نوسانی واداشته در نظر می‌گیریم و طیف انرژی آن را تعیین می‌کنیم.

۲. الگوی کیتائف تعمیم یافته واداشته

سامانه فلوکه‌ای که مد نظر ما است، ترکیبی از الگوی‌های سو-شریفر-هیگر (SSH) [۵۶] و کیتائف [۵۷] یک بعدی تعمیم یافته وابسته به زمان تناوبی است که در آن سامانه تحت تأثیر پتانسیل شیمیایی محرک تابع زمان $\mu(t)$ قرار دارد. هامیلتونی این سامانه با رابطه زیر داده می‌شود [۵۸]:

$$H = - \sum_{n=1}^N \left[\mu(t) \left(c_{n-1}^\dagger c_{n-1} + c_n^\dagger c_n \right) + \left(w c_{n-1}^\dagger c_n + \tau c_n^\dagger c_{n+1} + \text{H.C.} \right) + \left(\Delta e^{-i\theta} c_{n-1}^\dagger c_n^\dagger + \Lambda e^{i\theta} c_n^\dagger c_{n+1}^\dagger + \text{H.C.} \right) \right], \quad (1)$$

که در آن $c_n^\dagger$ و c_n ، به ترتیب عملگرهای خلق و فنا فرمیونی

در موقعیت n در شبکه هستند، w و τ پارامترهای تونل زنی،

Δ و Λ پارامترهای جفت شدگی ابررسانایی (همگی با بعد

انرژی) و $e^{i\theta}$ فاز جفت شدگی است. با معرفی A و B که

نشان دهنده نمایه‌های (شاخص) زیرشبکه‌اند و به ترتیب برای

جایگاه‌های فرد و زوج به صورت $c_n^B \equiv c_{2n}$ و $c_n^A \equiv c_{2n-1}$

تعریف می‌شوند، هامیلتونی به شکل

$$H = - \sum_{n=1}^N \left[\mu(t) \left(c_n^{A\dagger} c_n^A + c_n^{B\dagger} c_n^B \right) + \left(w c_n^{A\dagger} c_n^B + \tau c_n^{B\dagger} c_{n+1}^A + \text{H.C.} \right) + \left(\Delta e^{-i\theta} c_n^{A\dagger} c_n^{B\dagger} + \Lambda e^{i\theta} c_n^{B\dagger} c_{n+1}^A + \text{H.C.} \right) \right], \quad (2)$$

در می‌آید. در حالتی که $\mu = \circ, w = \tau, \Delta = \Lambda$ باشد، هامیلتونی

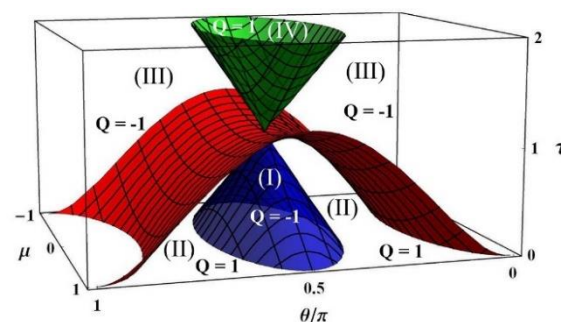
به الگوی کیتائف تقلیل می‌یابد و برای $\mu = \circ, \Delta = \Lambda = \circ$ به

الگوی SSH استاندارد تبدیل می‌شود.

۱. Time-reversal

۲. Sublattice symmetry

۳. Particle-hole



شکل ۱. نمودار فاز الگوی کیتائف تعمیم یافته در حضور پتانسیل شیمیایی $\mu \in [-1, 1]$ با پارامترهای هامیلتونی $w=1, \Delta=1, \Lambda=1$ (همگی با بعد انرژی). در ناحیه (I) داخل مخروط پایینی، سامانه فاز کیتائف-مانند دارد. در منطقه زیر سطح منحنی و خارج از مخروط پایینی (II) و همچنین داخل مخروط بالایی (IV)، عدد توپولوژیکی برابر ۱ و بنابراین سامانه غیرتوپولوژیکی است. در ناحیه بین بالای سطح منحنی و مخروط بالایی (III)، $Q=-1$ و در نتیجه سامانه در فاز توپولوژیکی قرار دارد.

را برآورده می کند. بنابراین، الگو در $\mathbf{PH}(k)\mathbf{P}^{-1} = -H(-k)$ رده تقارنی D با شاخص توپولوژیکی $\mathbb{Z}_2$ است. با توجه به تعریف عملگر تقارن ذره-حفره $\mathbf{P}$ و یک تابع کمکی، که به صورت $W(k) = H_{\text{BdG}}\mathbf{P}$ تعریف می شود، خواهیم داشت: $W(k)^T = -W(-k)$ برای تکانه متقارن ذره-حفره $k \in [0, \pm\pi]$ در منطقه بریلوئن داریم $W(0)^T = -W(0)$ و $W(\pi)^T = -W(\pi)$ که هر دو ماتریس های پادمقارن هستند. توپولوژی الگوی کیتائف تعمیم یافته را می توان توسط فافین^۱ هامیلتونی در $k=0$ و $k=\pi$ مشخص کرد که $Q = \text{sgn}[Pf(W(0))Pf(W(\pi))]$ یک عدد ناوردای توپولوژیکی است. ناوردای توپولوژیکی بودن Q به این معناست که تا زمانی که گاف انرژی در $k=0$ و π بسته نشده باشد، علامت آن تحت تغییر شکل تغییر نخواهد کرد. در این صورت $Q = -1$ (+۱) به ترتیب نشان دهنده فاز توپولوژیکی غیربدیهی (بدیهی) است [۶۰]. فافین به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} Pf(W(0)) &= (\tau + w)^2 - \Delta^2 - \Lambda^2 - \mu^2 + 2\Delta\Lambda\cos(2\theta) \\ Pf(W(\pi)) &= (\tau - w)^2 - \Delta^2 - \Lambda^2 - \mu^2 - 2\Delta\Lambda\cos(2\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

به سادگی می توان نشان داد که بسته شدن گاف انرژی به نقاطی بستگی دارد که در آن ها علامت ناوردای توپولوژیکی تغییر می کند. طر ح واره س ه بعدی نمودار فاز الگوی کیتائف تعمیم یافته

در شکل ۱ نمایش داده شده است. طبق نتیجه به دست آمده، عدد توپولوژیکی در منطقه داخل مخروط پایینی (ناحیه I) برابر ۱- که نشان دهنده فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند است. فضای خارج از مخروط ها به دو بخش تقسیم می شود: ناحیه (II) که در آن $Q=1$ غیرتوپولوژیکی است و ناحیه (III) فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند دارد. همچنین ناحیه داخل مخروط بالایی (ناحیه IV) که $Q=1$ است، غیرتوپولوژیکی است.

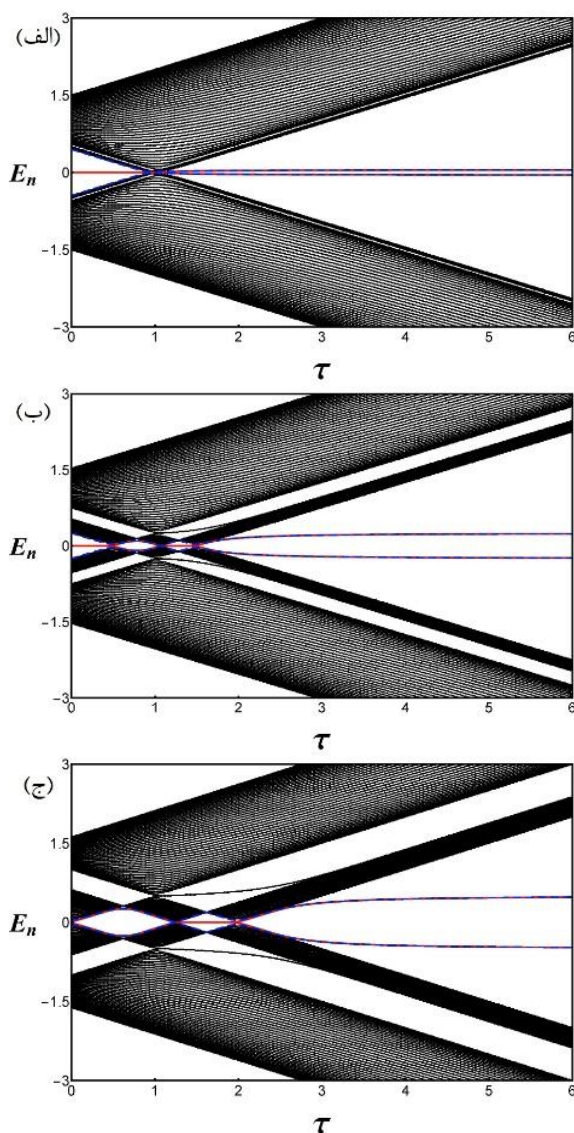
حال مدهای صفر در زنجیره با طول متناهی را با استفاده از معادلات بوگولیوف-دوژن (BdG) با شرایط مرزی باز بررسی می کنیم. به طور کلی، هامیلتونی معادله (۱) به جز حالتی که دامنه جفت شدگی موج p صرفاً موهومی باشد، یعنی $\theta = \pi/2$ ، تقارن پاریته-زمان ندارد [۶۱ و ۶۲]. با معرفی عملگر $4N$ -مولفه ای $C^\dagger = (c_1^\dagger, \dots, c_{N/2}^\dagger, c_1, \dots, c_{N/2})$ می توان هامیلتونی معادله (۱) را به شکل معادله BdG، $H = \frac{1}{2} C^\dagger H_{\text{BdG}} C$ ، نوشت که در آن

$$H_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & -A \end{pmatrix}, \quad (8)$$

یک ماتریس $4N \times 4N$ است، و A و B ماتریس های $2N \times 2N$ هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

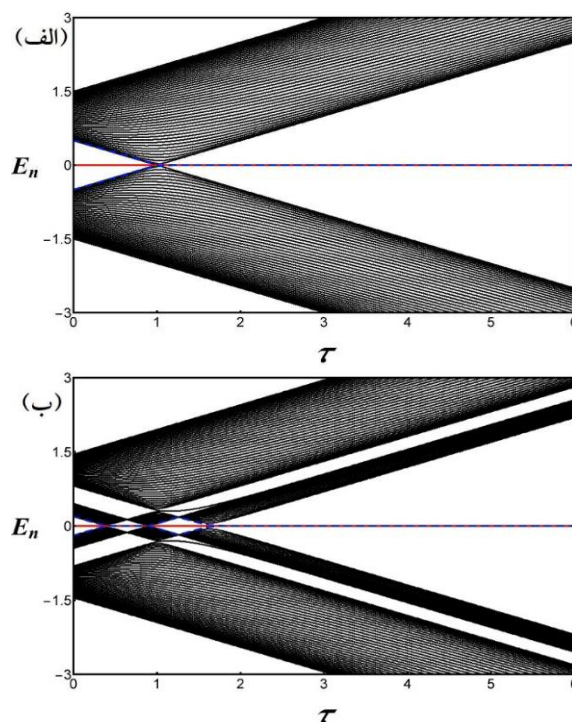
$$\begin{aligned} A_{l,m} &= \begin{cases} -w\delta_{l,m+1} - \tau\delta_{l,m-1} - \mu\delta_{l,m} & (\text{odd } l), \\ -w\delta_{l,m-1} - \tau\delta_{l,m+1} - \mu\delta_{l,m} & (\text{even } l), \end{cases} \\ B_{l,m} &= \begin{cases} -\Delta e^{-i\theta}\delta_{l,m-1} - \Lambda e^{i\theta}\delta_{l,m+1} & (\text{odd } l), \\ -\Delta e^{-i\theta}\delta_{l,m+1} - \Lambda e^{i\theta}\delta_{l,m-1} & (\text{even } l). \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

با حل معادله شرودینگر $H_{\text{BdG}}\Psi_n = E_n\Psi_n$ ، طیف انرژی و ویژه بردارهای هامیلتونی BdG به دست می آید. هامیلتونی BdG تقارن ذره-حفره را حفظ می کند. بنابراین، به غیر از مد با انرژی صفر، ترازهای انرژی باید به صورت زوج $\pm E_n$ باشند. وجود نقص های نقطه ای توپولوژیکی در الگوی یک بعدی، حالت های انرژی صفر را به دام می اندازد و باعث می شود حداکثر یک مد انرژی صفر در هر انتهای زنجیره باز، القاء گردد. وجود حالت های جایگزیده انرژی صفر را می توان به عنوان نشانه مدهای مایورانا تفسیر کرد.



شکل ۳. طیف انرژی زنجیره متناهی به طول $N = 50$ برحسب تابعی از τ برای مقادیر $w = 1, \Delta = 1, \Lambda = 1, \theta / \pi = 0/5$ (الف) و $\mu = 0/1$ (ب) و $\mu = 0/5$ (ج) و $\mu = 1$.

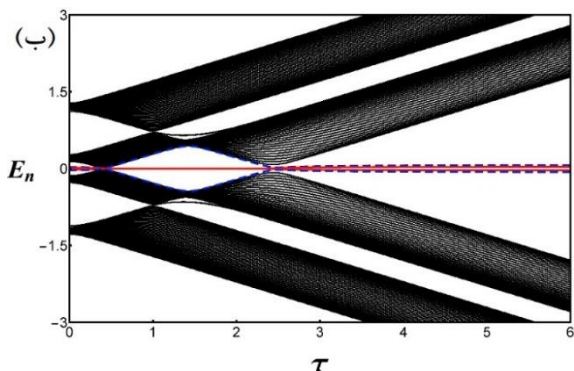
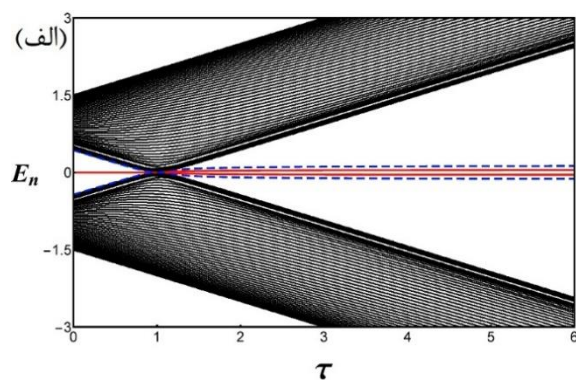
این شکل‌ها دیده می‌شود، بر اساس نمودار فاز، سامانه در نواحی (I) و (III) در فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند با دو مد (خطوط ممتد قرمز) قرار دارد که مدهای لبه‌ای با انرژی صفر در فاز SSH-مانند ناپدید می‌شوند. در شکل ۴، طیف انرژی بر حسب پتانسیل شیمیایی برای مقادیر $\theta / \pi = 0/5$ ، $\theta / \pi = 0/25$ و مقادیر مختلف τ رسم شده است. همان‌طور که مشخص است دو مد لبه‌ای با انرژی صفر که با خطوط آبی مشخص شده‌اند، در فاز کیتائف-مانند ظاهر می‌شوند اما این دو مد در فاز غیرتوپولوژیکی بین مدهای لبه‌ای گاف به وجود می‌آیند.



شکل ۲. طیف انرژی زنجیره باز متناهی با طول $N = 50$ در غیاب پتانسیل شیمیایی. پارامترهای هامیلتونی برابر $w = 1, \Delta = 1, \Lambda = 1$ (همگی با بعد انرژی)، (الف) $\theta / \pi = 0/5$ و (ب) $\theta / \pi = 0/4$ هستند.

موضوع جالب توجه دیگر، بررسی چگونگی تغییرات در طیف انرژی الگوی کیتائف تعمیم یافته در حضور پتانسیل شیمیایی است. در حالتی که پتانسیل شیمیایی وجود ندارد، مطابق شکل ۲، فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند (SSH-مانند) وجود دارد [۳۷]. همان‌طور که مشاهده می‌شود سامانه در فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند دو مد لبه‌ای انرژی صفر (خطوط ممتد قرمز) با شاخص دست‌وار ۱، و در فاز توپولوژیکی SSH-مانند چهار مد لبه‌ای انرژی صفر با شاخص دست‌وار ۲ دارد (دو خط قرمز و دو خط-چین آبی). اما درحالتی که پتانسیل شیمیایی به سامانه اضافه می‌شود فاز توپولوژیکی SSH-مانند به فاز غیرتوپولوژیکی تغییر می‌کند. به عبارت دیگر، سامانه کیتائف تعمیم یافته یک فاز توپولوژیکی (فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند) و یک فاز غیرتوپولوژیکی دارد.

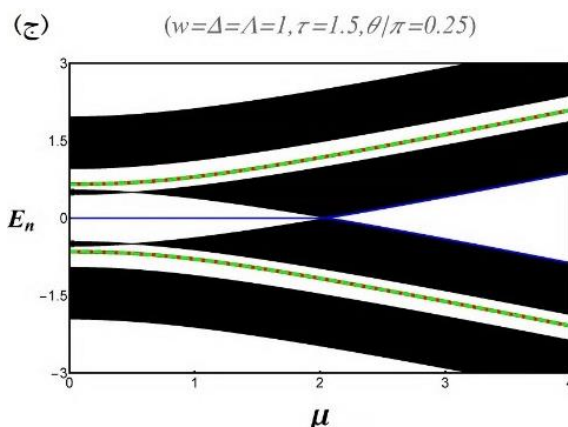
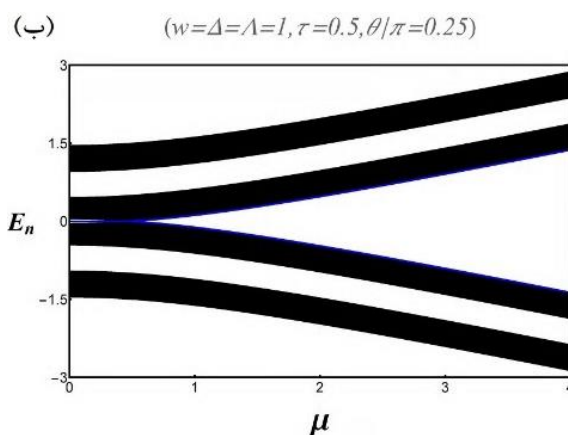
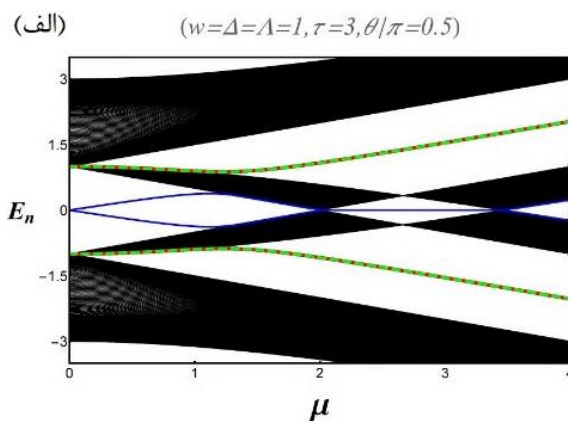
برای درک بهتر تأثیر حضور پتانسیل شیمیایی، در شکل‌های ۳ (الف) تا ۳ (ج)، طیف انرژی سامانه متناهی به طول $N = 50$ به صورت تابعی از τ برای $\theta = \pi/2$ و با فرض $\omega = 1, \Delta = 1, \Lambda = 1$ برای انرژی پتانسیل با بزرگی‌های $\mu = 0/1, \mu = 0/5$ و $\mu = 1$ رسم شده‌اند. همان‌طور که در



شکل ۵. طیف انرژی زنجیره متناهی در حضور بی‌نظمی تصادفی در پتانسیل برحسب تابعی از τ . در این جا، ۵. (الف) مربوط به شکل ۳. (الف) و ۵. (ب) مربوط به شکل ۳. (ب) است. حالت‌های انرژی صفر در مد کیتائف-مانند مقاوم و در مد SSH-مانند حساس به بی‌نظمی در پتانسیل است.

بی‌نظم قرار دارد. همان‌طور که اشاره شد در غیاب پتانسیل شیمیایی، سامانه دارای تقارن‌های وارونی زمان، زیر شبکه و ذره-حفره است. از آن‌جا که حضور پتانسیل شیمیایی تقارن وارونی زمان و زیر شبکه [۵۹] را می‌شکند، با د نظر گرفتن پتانسیل شیمیایی بی‌نظم در نقاط شبکه^۱ (

$\sum_n \mu_n (c_{\tau n-1}^\dagger c_{\tau n-1} + c_{\tau n}^\dagger c_{\tau n})$) نیز این دو تقارن نیز حفظ نمی‌شوند، درحالی‌که تقارن ذره-حفره همچنان برقرار باقی می‌ماند. بنابراین انتظار داریم که در حضور پتانسیل شیمیایی بی‌نظم گاف انرژی بین حالت‌های انرژی صفر در فاز توپولوژیکی SSH-مانند ایجاد شود و در نتیجه فاز توپولوژیکی ناپدید گردد. در صورتی‌که، در فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند حتی پتانسیل شیمیایی بی‌نظم قوی نیز نمی‌تواند مدهای لبه‌ای انرژی صفر را تحت تأثیر قرار دهد؛ بنابراین، فاز همچنان توپولوژیکی باقی می‌ماند. طیف انرژی مربوط به شکل‌های ۲.



شکل ۴. طیف انرژی زنجیره متناهی به طول $N=50$ برحسب تابعی از پتانسیل شیمیایی μ برای مقادیر $w=1, \Delta=1, \Lambda=1$ (همگی با بعد انرژی)، با فرض: (الف) $\theta/\pi=0/5$ و $\tau=3$ ، (ب) $\theta/\pi=0/25$ و $\tau=0/5$ ، (ج) $\theta/\pi=0/25$ و $\tau=1/5$.

۲.۲. بی‌نظمی تصادفی در پتانسیل شیمیایی

یکی از پدیده‌هایی که بررسی آن به شناخت بیشتر رفتار سامانه کمک می‌کند، در نظر گرفتن وجود بی‌نظمی است. از جمله می‌توان فرض کرد سامانه تحت تأثیر پتانسیل شیمیایی

تعیین می‌شوند: $|\psi_n(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi_n(t_0)\rangle$.

در حالتی که سامانه به صورت تناوبی با دوره تناوب $T = 2\pi / \omega$ تحریک شده باشد، می‌توان عملگر تحول را برای زمان‌های $t = nT$ ($n \in \mathbb{Z}$) برحسب هامیلتونی فلوکه (مؤثر)

H_F مستقل از زمان به صورت $U(t, nT, t_0) = \exp(-iH_F[t_0]nT / \hbar)$ نوشت. این شکل از

عملگر تحول نتیجه تناوبی بودن سامانه تحریک شده است و مستقل از جزئیات سامانه است. جهت سهولت می‌توان تحول در یک دوره تناوب را در نظر گرفت و آن را به صورت

$U(t_0 + T, t_0) = \exp(-iH_F[t_0]T / \hbar)$ تعریف کرد. از آنجا که

انتخاب زمان اولیه یک انتخاب پیمانه‌ای و کاملاً اختیاری است، می‌توان مقدار مناسبی برای t_0 در نظر گرفت که در آن

هامیلتونی فلوکه $H_F[t_0]$ به شکل ساده‌تری نوشته می‌شود. این حالت معمولاً وقتی که t_0 نقطه تقارن محرک باشد رخ می‌دهد.

برای مثال اگر میدان محرک به شکل $\cos(\omega t)$ باشد اغلب بهتر است که $t_0 = 0$ انتخاب کنیم و در نتیجه

$U(T, 0) = \exp(-iH_F[t=0]T / \hbar)$ است. برای ذره‌ای که در

پتانسیل شبکه بلوری حرکت می‌کند، طیف فلوکه (شبه‌انرژی) به صورت نوارهایی است که مشابه با نوارهای یک سامانه بدون

محرک است. همان‌طور که در سامانه‌های حالت جامد، برای ذره در یک پتانسیل تناوبی، ناحیه بریلوئن تکانه بلوری تعریف

می‌شود، در این‌جا تمام پاسخ‌های معادله شرودینگر را می‌توان بر اساس مقادیر شبه‌انرژی دسته‌بندی کرد به گونه‌ای که همه

انرژی‌ها به طور منحصربه‌فرد در یک ناحیه بریلوئن فلوکه واحد با عرض $\hbar\omega$ تعیین می‌شوند، یعنی $E_i \leq E < E_i + \hbar\omega$.

در به کارگیری بسط ماگنوس [۶۵]، که یک روش تقریب نمایی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی است، عملگر تحول زمانی

به شکل $U(t, 0) = \exp(\Omega(t))$ نوشته می‌شود. عملگر $\Omega(t)$ بسط نامتناهی به شکل

$\Omega(t) = \Omega_1(t) + \Omega_2(t) + \Omega_3(t) + \dots$ دارد و شامل جابه‌جایی‌های تو در تو به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\Omega_1(t) &= \int_0^t dt_1 \tilde{H}(t_1) \\ \Omega_2(t) &= \frac{1}{i} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [\tilde{H}(t_1), \tilde{H}(t_2)] \\ \Omega_3(t) &= \frac{1}{i^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 ([\tilde{H}_1, [\tilde{H}_2, \tilde{H}_3]] + [\tilde{H}_2, [\tilde{H}_1, \tilde{H}_3]] + [\tilde{H}_3, [\tilde{H}_1, \tilde{H}_2]])\end{aligned}\quad (12)$$

(الف) و ۲. (ب)، در حضور پتانسیل شیمیایی بی‌نظم در شکل‌های ۵. (الف) و ۵. (ب) رسم شده‌اند که در آن شدت بی‌نظمی پتانسیل تصادفی μ_m به ترتیب در محدوده $[-0.1, 0.1]$ و $[-0.3, 0.3]$ قرار دارد.

همان‌طور که مشخص است با اعمال پتانسیل شیمیایی بی‌نظم، بین مدهای لبه‌ای انرژی صفر در فاز SSH-مانند گاف انرژی ایجاد می‌شود و بنابراین فاز غیرتوپولوژیکی به وجود می‌آید.

۳. نظریه فلوکه

در گام نخست، نظریه فلوکه را به اختصار مرور می‌کنیم.

در حالتی که هامیلتونی یک سامانه کوانتومی به صورت تناوبی به زمان بستگی داشته باشد، یعنی $H(t) = H(t+T)$ که در آن

$T = 2\pi / \omega$ دوره تناوب و ω بسامد محرک است، حل معادله شرودینگر وابسته به زمان را می‌توان برحسب نظریه فلوکه

بررسی کرد [۶۳]. بر اساس نظریه فلوکه که مشابه نظریه بلوخ در سامانه‌های حالت جامد است، معادله شرودینگر مربوط به

هامیلتونی با بستگی زمانی تناوبی دارای حالت‌های مانای تعمیم یافته $|\psi(t)\rangle$ است که حالت‌های فلوکه نامیده می‌شوند

[۶۴]. این حالت‌ها جواب‌های معادله شرودینگر وابسته به زمان

$$i\hbar d_t |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad \text{به شکل} \quad |\psi_n(t)\rangle = |u_n(t)\rangle \exp(-iE_n^q t / \hbar) \quad \text{هستند.}$$

حالت‌های فلوکه، ویژه‌حالت‌های عملگر تحول زمانی در یک دوره تناوب به شکل

$$U(t_0 + T, t_0) |\psi_n(t_0)\rangle = \exp(-iE_n^q T / \hbar) |\psi_n(t_0)\rangle \quad (10)$$

هستند که در آن عملگر تحول زمانی $U(t, t_0)$ از زمان t_0 تا زمان t توسط رابطه

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right] \quad (11)$$

داده می‌شود. در این‌جا، $\mathcal{T}$ نشاندهنده عملگر ترتیب زمانی است. ویژه مقادیر $\exp(-iE_n^q T / \hbar)$ از t_0 ، که زمان شروع

تحول در یک دوره تناوب است، مستقل هستند. بنابراین می‌توان با استفاده از t_0 دلخواه، طیف شبه‌انرژی را با محاسبه و

قطری کردن $U(t_0 + T, t_0)$ به دست آورد. حالت‌های فلوکه وابسته به زمان $|\psi_n(t)\rangle$ نیز با به کار بردن عملگر تحول زمانی

در هامیلتونی فلوک H_{eff} عبارتند از [۶۷-۶۹]:

$$\begin{aligned} \langle \langle \{n_l\}, m' | c_j^\dagger c_k | \{n_l\}, m \rangle \rangle &= \\ \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp \{ i \int_{-\infty}^t dt' [\mu_k(t') - \mu_j(t')] - i(m' - m)\omega t \}, \\ \langle \langle \{n_l\}, m' | c_j^\dagger c_k | \{n_l\}, m \rangle \rangle &= \\ \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp \{ i \int_{-\infty}^t dt' [-\mu_k(t') - \mu_j(t')] - i(m' - m)\omega t \}, \\ \langle \langle \{n_l\}, m' | c_j c_k | \{n_l\}, m \rangle \rangle &= \\ \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp \{ i \int_{-\infty}^t dt' [\mu_k(t') + \mu_j(t')] - i(m' - m)\omega t \}, \end{aligned} \quad (15)$$

در ماتریس بالا، بلوک قطری هامیلتونی فلوک $H_{\text{eff}}^{(m,m)}$ ، منطقه بریلوین m -ام انرژی است. بلوک‌های غیرقطری $H_{\text{eff}}^{(m',m)}$ تعیین‌کننده برهم‌کنش بین منطقه‌های بریلوین مختلف هستند [۷۰]. هنگامی که پتانسیل محرک $\mu(x,t)$ به‌طور نسبی کوچک باشد و همچنین شرط بی‌درو $J \ll \hbar\omega$ برآورده شود، در این صورت برهم‌کنش بین مناطق بریلوین مختلف ناچیز بوده و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. در این حالت رفتار سامانه واداشته مشابه با سامانه ایستا است که در آن $\mu(x,t) = \mu_0$ فرض شده است. اگر دامنه پتانسیل محرک را افزایش یا بسامد محرک را کاهش دهیم، باید برهم‌کنش بین منطقه‌های بریلوین مختلف را در نظر بگیریم. با وجود این که به‌کارگیری هامیلتونی مؤثر در شناخت ویژگی‌های سامانه‌ها مناسب است، اما محاسبه H_{eff} در حضور برهم‌کنش مشکل خواهد بود و در عمل عموماً از روش بسط برای یافتن هامیلتونی مؤثر استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها، بسط ماگنوس است که فقط در بسامدهای بالا کاربرد دارد و در حالت کلی همگرا نیست. در واقع این بسط‌ها از نوع بسط‌های مجانبی هستند که تابع یک حد قطع بهینه هستند و این حد مانع از رسیدن به حوزه بسامدهای پایین‌تر می‌شود. شرط بزرگ بودن بسامد به این معنی است که انرژی $\hbar\omega$ از مقیاس انرژی پارامترهای جفت‌شدگی در سامانه خیلی بزرگ‌تر باشد.

۳.۱. پتانسیل شیمیایی تناوبی

فرض می‌کنیم پتانسیل شیمیایی تناوبی مستقل از مکان و صرفاً تابعی تناوبی از زمان به علاوه یک مقدار ثابت μ_0 باشد:

که در آن $\tilde{H}(t) = -i\hbar H(t)$ و به اختصار $\tilde{H}(t_i) \equiv \tilde{H}_i$ در نظر گرفته شده است. از آن‌جا که فرض بر تناوبی بودن هامیلتونی است، بنابراین در این بسط، جملات مرتبه بالاتر شامل توان‌های بالاتر از وارون بسامد تحریک، $\Omega_n(t) \propto \omega^{-n}$ ، هستند. اگر هامیلتونی در زمان‌های متفاوت جابه‌جاپذیر باشد در این صورت تمام روابط جابه‌جایی صفر می‌شوند و تنها جمله $\Omega_1(t)$ غیر صفر است. بدیهی است که این شرط در مورد هامیلتونی مستقل از زمان صدق می‌کند. همچنین نشان داده شده است که در معادله شرودینگر با هامیلتونی تابع زمان می‌توان بسط ماگنوس بدون جابه‌جاگر را به‌کار برد که در آن از انتشار زمانی استفاده می‌شود [۶۶].

حالت‌های فلوک $|u_n(t)\rangle$ برای سامانه‌های کوانتومی وابسته به زمان با حل معادله ویژه‌مقداری $H_{\text{eff}} |u_n(t)\rangle = \varepsilon_n |u_n(t)\rangle$ به‌دست می‌آیند ($H_{\text{eff}} = H - i\hbar\partial_t$). در فیزیک حالت جامد شبه‌تکانه‌ها تا ضریبی از یک بردار شبکه وارون و شبه‌انرژی‌ها تا مضرب صحیحی از $\hbar\omega$ تعریف می‌شوند که در این صورت $|u_n(t)\rangle \exp(im\omega t)$ ویژه‌پاسخ تناوبی با شبه‌انرژی جابه‌جاشده $\varepsilon_n + m\hbar\omega$ است که در آن $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ منطقه‌های بریلوین مختلف را مشخص می‌کنند.

به دلیل جفت‌شدگی بین درجه آزادی فضایی و درجه آزادی زمانی، مناسب‌تر است که پایه‌های فلوک را به صورت زیر تعریف کنیم [۶۷-۶۹]:

$$|\{n_i\}, m\rangle = |\{n_i\}\rangle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \sum_i \mu_i(t') n_i + im\omega t \right\}, \quad (13)$$

که در آن $|\{n_i\}\rangle$ حالت فوک i با n_i ذره در مکان i -ام را نشان می‌دهد و $|\{n_i\}, m\rangle$ شامل توابع تناوب زمانی با ضرب عددی

$$\langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \cdot | \cdot \rangle, \quad (14)$$

است. انتخاب پایه‌های فلوک در رابطه (۱۳) این امکان را می‌دهد که در صورت وجود برهم‌کنش‌های بیش از دو-نقطه‌ای بین فرمیون‌ها، هامیلتونی مؤثر همچنان قابل محاسبه باشد [۶۷]. طیف انرژی با محاسبه عناصر ماتریس H_{eff} در پایه‌های (۱۳) و با توجه به ضرب عددی (۱۴) به‌دست می‌آید. عناصر ماتریس

$$\begin{aligned}
\langle \langle \{n_l\}, m' | c_j^\dagger c_k | \{n_l\}, m \rangle \rangle &= \delta_{m,m'} \\
\langle \langle \{n_l\}, m' | c_j^\dagger c_k^\dagger | \{n_l\}, m \rangle \rangle &= \\
\frac{1}{T} \int_0^T dt \exp \{ i \frac{\gamma \mu_1}{\omega} \sin \omega t - i(m' - m + \frac{\gamma \mu_0}{\omega}) \omega t \}, \\
\langle \langle \{n_l\}, m' | c_j c_k | \{n_l\}, m \rangle \rangle &= \\
\frac{1}{T} \int_0^T dt \exp \{ i \frac{\gamma \mu_1}{\omega} \sin \omega t - i(m' - m - \frac{\gamma \mu_0}{\omega}) \omega t \}, \quad (17)
\end{aligned}$$

که انتگرال‌های بالا را می‌توان به صورت تابعی از $\gamma \mu_1 / \omega$ در نظر گرفت. در حالتی که $\gamma \mu_0 / \omega$ عدد صحیح باشد، جواب انتگرال‌ها توابع بسل مرتبه صحیح به شکل $J_{l+\gamma \mu_1/\omega}(-\gamma \mu_1/\omega)$ خواهد بود که در آن $l = m' - m$ بلوک‌های قطری $H_{\text{eff}}^{(m,m')}$ و غیرقطری $H_{\text{eff}}^{(m,m')}$ به ترتیب به شکل $H_{\text{eff}}^{(\circ)} + m\hbar\omega$ و $H_{\text{eff}}^{(m,m')}$ هستند. بنابراین H_{eff} در فضای حقیقی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & H_{\text{eff}}^{(\circ)} & H_{\text{eff}}^{(\circ)} & H_{\text{eff}}^{(\circ)} & \dots \\ \dots & H_{\text{eff}}^{(-)} & H_{\text{eff}}^{(\circ)} + \hbar\omega & H_{\text{eff}}^{(\circ)} & \dots \\ \dots & H_{\text{eff}}^{(-)} & H_{\text{eff}}^{(-)} & H_{\text{eff}}^{(\circ)} + \gamma \hbar\omega & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (18)$$

۳.۲. هامیلتونی مؤثر الگوی کیتائف تعمیم یافته فلوک

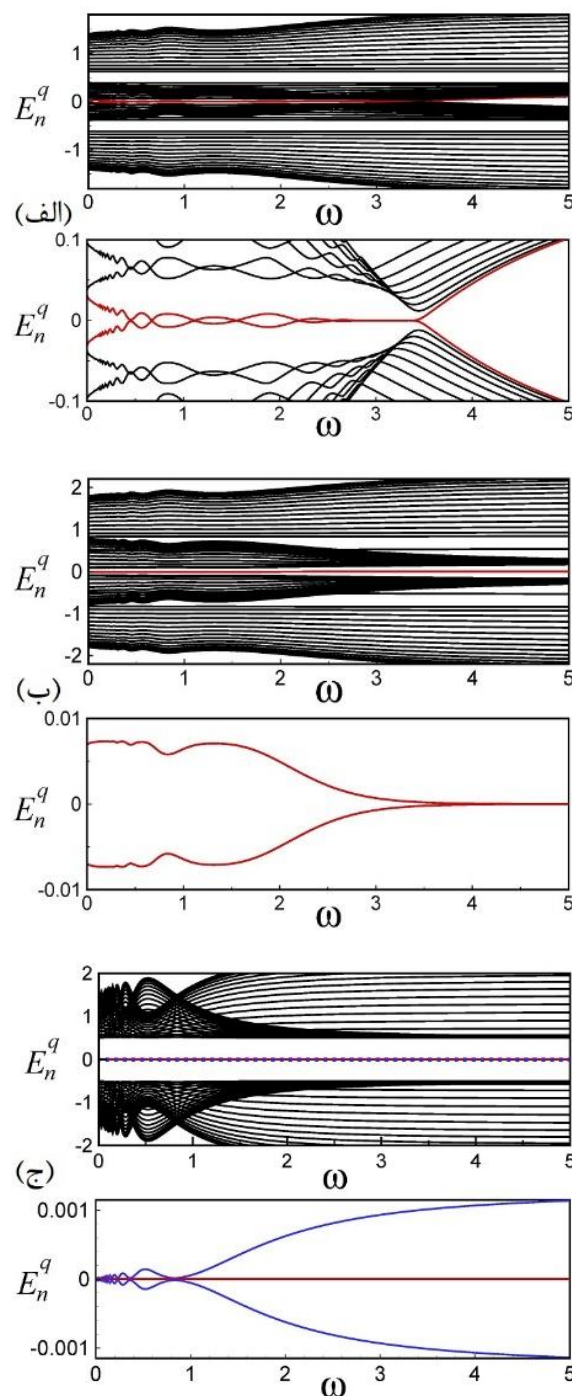
با فرض این که $\gamma \mu_0 / \omega$ یک عدد صحیح باشد، می‌توان عناصر H_{eff} را بر حسب توابع بسل مرتبه صحیح به شکل زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}}^{(\circ)} &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{\mu_0}{\gamma} (c_{\gamma n-1}^\dagger c_{\gamma n} + c_{\gamma n}^\dagger c_{\gamma n-1}) \right. \\
&\left. \left(w c_{\gamma n-1}^\dagger c_{\gamma n} + \tau c_{\gamma n}^\dagger c_{\gamma n+1} + J_{\gamma \mu_1/\omega} \left(-\frac{\gamma \mu_1}{\omega} \right) \Delta e^{-i\theta} c_{\gamma n-1}^\dagger c_{\gamma n}^\dagger \right. \right. \\
&\left. \left. + J_{-\gamma \mu_1/\omega} \left(\frac{\gamma \mu_1}{\omega} \right) \Delta e^{i\theta} c_{\gamma n}^\dagger c_{\gamma n+1}^\dagger + \text{H.C.} \right) \right], \quad (19)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}}^{(l)} &= \sum_{n=1}^N \left(J_{l+\gamma \mu_1/\omega} \left(-\frac{\gamma \mu_1}{\omega} \right) \Delta e^{-i\theta} c_{\gamma n-1}^\dagger c_{\gamma n}^\dagger \right. \\
&\left. + J_{l-\gamma \mu_1/\omega} \left(\frac{\gamma \mu_1}{\omega} \right) \Delta e^{i\theta} c_{\gamma n}^\dagger c_{\gamma n+1}^\dagger + \text{H.C.} \right), \quad (20)
\end{aligned}$$

که در آن $l = m' - m$ است. در بلوک قطری ماتریس هامیلتونی فلوک (۱۷)، انرژی $-m$ -امین منطقه بریلوئن است و بلوک‌های غیرقطری $H_{\text{eff}}^{(l)}$ ($m' - m \neq 0$) جفت‌شدگی بین



شکل ۶. طیف انرژی زنجیره متناهی بر حسب تابعی از بسامد محرک ω با فرض $\mu_0 = \mu_1 = 1$ و $w = 1, \Delta = 1, \Lambda = 1, \theta / \pi = 0.5$ برای مقادیر مختلف τ : (الف) $\tau = 0.8$ ، (ب) $\tau = 1/6$ و (ج) $\tau = 2$. شکل‌های ردیف دوم بزرگ‌نمایی شکل‌های ردیف اول هستند.

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 \cos \omega t, \quad (16)$$

که در آن μ_1 دامنه محرک و ω بسامد محرک است. با استفاده از رابطه بالا می‌توان روابط (۱۵) را به صورت زیر ساده کرد:

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، الگوی کیتائف تعمیم یافته واداشته را در نظر گرفتیم که در آن پارامترهای تونل زنی و جفت شدگی دارای عامل فاز هستند. از سوی دیگر، فرض کردیم که این سامانه توسط عامل خارجی، برای مثال پتانسیل شیمیایی، تحریک شده است. حضور پتانسیل شیمیایی موجب شکسته شدن تقارن وارونی زمان و تقارن زیر شبکه می شود، درحالی که تقارن ذره-حفره همچنان برقرار باقی می ماند.

در حالتی که پتانسیل شیمیایی مقدار ثابتی داشته باشد توپولوژی الگو را می توان با استفاده از ناوردای توپولوژیکی تعریف شده توسط فافین مشخص کرد. ناحیه های بسته شدن گاف انرژی همان نقاطی هستند که عدد توپولوژیکی تغییر می کند. وجود پتانسیل شیمیایی همچنین منجر به تغییر طیف انرژی در الگو می شود به نحوی که چهار مایورانای انرژی صفر در فاز توپولوژیکی SSH-مانند (که در غیاب پتانسیل شیمیایی وجود دارند) از بین رفته و فاز غیرتوپولوژیکی ایجاد می شود. در حضور یک پتانسیل شیمیایی ضعیف و تصادفی نیز تقارن زیر شبکه شکسته می شود، اما تقارن ذره-حفره همچنان حفظ می شود. بنابراین، در حضور پتانسیل شیمیایی ضعیف و تصادفی فاز توپولوژیک SSH-مانند نیز از بین می رود، اما فاز توپولوژیکی کیتائف-مانند حتی در بی نظمی های قوی حفظ می شود. در حالتی که پتانسیل تابعی دوره ای باشد، الگو به یک سامانه فلوکه تبدیل می شود که طیف انرژی آن را می توان با استفاده از هامیلتونی مؤثر مشخص کرد. به طور کلی، حضور پتانسیل محرک تابع زمان منجر به برهم کنش بین مناطق بریلوئن مختلف می شود. علاوه بر این، نشان دادیم در فازهای غیرتوپولوژیکی در محدوده ای از بسامد محرک و همچنین به ازای بسامد محرک بزرگ، فاز توپولوژیکی ایجاد می شود.

منطقه های بریلوئن مختلف را تعیین می کند [۶۲]. هنگامی که بسامد محرک نسبتاً بزرگ باشد، می توان از برهم کنش بین منطقه های بریلوئن مختلف صرف نظر کرد و در این حالت سامانه واداشته رفتاری مشابه با سامانه ایستا خواهد داشت [۶۶].

به منظور نشان دادن وجود گذار فاز توپولوژیکی ناشی از وجود مدهای لبه ای در الگوی واداشته، باید طیف فلوکه را برای گستره ای از بسامدها بررسی کنیم. در شکل ۶، طیف انرژی الگوی کیتائف تعمیم یافته واداشته تناوبی تا مرتبه صفرم هامیلتونی مؤثر رسم شده است. همان طور که مشاهده می شود طیف انرژی فلوکه دارای گاف نواری است که پهنای آن به عامل تونل زنی w/τ بستگی دارد. همان طور که در شکل ۶. (الف) مشاهده می شود، در فاز غیر توپولوژیکی (II)، $w/\tau > 1$ ، با وجود آن که سامانه در حالت مستقل از زمان پتانسیل شیمیایی فاقد مدهای لبه ای با انرژی صفر است، وقتی که پتانسیل شیمیایی وابستگی دوره ای به زمان دارد، در محدوده خاصی از بسامد محرک مدهای لبه ای با انرژی صفر در طیف انرژی ظاهر می شوند.

وجود مدهای لبه ای تحت تأثیر پتانسیل محرک صرفاً در یک محدوده مشخصی از بسامد محرک امکان پذیر است و سامانه در بسامدهای دیگر رفتار غیربدیهی نشان می دهد. همچنین در فاز غیرتوپولوژیک (III) (شکل ۶. (ب))، $w/\tau > 1$ ، وقتی مقدار بسامد محرک از مقدار مشخصی بزرگتر باشد مدهای لبه ای با انرژی صفر (فاز توپولوژیکی) ایجاد می شوند. اما در فاز توپولوژیکی (IV) (شکل ۶. (ج))، $w/\tau < 1$ ، مدهای لبه ای با انرژی صفر به ازای همه مقادیر پتانسیل محرک وجود دارند. شایان ذکر است که شرط بزرگ بودن بسامد با توجه به هامیلتونی (۱) و پتانسیل شیمیایی داده شده در (۱۵) به این معنی است که $\hbar\omega \gg \max\{w, \tau, \Delta, \Lambda, \mu_i\}$ باشد.

مراجع

1. C L Kane and E J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **9** (2005) 146802.
2. B A Bernevig, T L Hughes, and S-C Zhang, *Science* **314** (2006) 1757.
3. L Fu, C L Kane, and E J Mele, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 106803.
4. L Fu and C L Kane, *Phys. Rev. B* **76** (2007) 045302.
5. D Hsieh, et al., *Nature* **452** (2008) 970.
6. M. König, et al., *Science* **318** (2007) 766.

7. D J Thouless, M Kohmoto, M P Nightingale, and M den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 405.
8. A Y Kitaev, *Phys. Usp.* **44** (2001) 131.
9. J Alicea, *Rep. Prog. Phys.* **75** (2012) 076501.
10. M Z Hasan and C L Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 3045.
11. J Dziarmaga, *Adv. Phys.* **59** (2010) 1063.
12. A Polkovnikov, K Sengupta, A Silva, and M Vengalattore, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 863.
13. A Verdne, J Puig, and F Mintert, *Z. Naturforsch* **71** (2016) 897.
14. S Nandy, A Sen, and D Sen, *Phys. Rev. X* **7** (2017) 031034.
15. D V Else, W W Ho, and P T Dumitrescu, *Phys. Rev. X* **10** (2020) 021032.
16. L D'Alessio and A Polkovnikov, *Ann. Phys.* **333** (2013) 19.
17. M Bukov, L D'Alessio, and A Polkovnikov, *Adv. Phys.* **64** (2015) 139.
18. J-I Inoue and A Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 017401.
19. T Kitagawa, E Berg, M Rudner, and E Demler, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 235114.
20. T Kitagawa, M S Rudner, E Berg, and E Demler, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 033429.
21. N H Lindner, G Refael, and V Galitski, *Nat. Phys.* **7** (2011) 490.
22. M S Rudner, N H Lindner, E Berg, and M Levin, *Phys. Rev. X* **3** (2013) 031005.
23. A Gómez-León and G Platero, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 200403.
24. L Jiang, et al., *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 220402.
25. T Kitagawa, et al., *Nat. Commun.* **3** (2012) 882.
26. A Kundu and B Seradjeh, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 136402.
27. Q-J Tong, J-H. An, J Gong, H-G Luo, and C H Oh, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 201109.
28. J K Asbóth, *Phys. Rev. B* **86** (2012) 195414.
29. J K Asbóth and H Obuse, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 121406.
30. J K Asbóth, B Tarasinski, and P Delplace, *Phys. Rev. B* **90** (2014) 125143.
31. T Nag, S Roy, A Dutta, and D Sen, *Phys. Rev. B* **89** (2014) 165425.
32. T Nag, D Sen, and A Dutta, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 063607.
33. A Agarwala, U Bhattacharya, A Dutta, and D Sen, *Phys. Rev. B* **93** (2016) 174301.
34. A. Agarwala and D. Sen, *Phys. Rev. B* **95** (2017) 014305.
35. D J Luitz, Y Bar Lev, and A Lazarides, *Sci. Post Phys.* **3** (2017) 029.
36. D J Luitz, A Lazarides, and Y Bar Lev, *Phys. Rev. B* **97** (2018) 020303.
37. M. Grifoni and P. Hänggi, *Phys. Rep.* **304**(1998) 229.
38. G Casati and B Chirikov, "Quantum Chaos: Between Order and Disorder", Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, (2006).
39. R Moessner and S L Sondhi, *Nat. Phys.* **13** (2017) 424.
40. L D'Alessio, Y Kafri, A Polokovnikov, and M Rigol, *Adv. Phys.* **65** (2016) 239.
41. L D'Alessio and M Rigol, *Phys. Rev. X* **4** (2014) 041048.
42. A Lazarides, A Das, and R Moessner, *Phys. Rev. E* **90** (2014) 012110.
43. S Blanes, F Casas, J A Oteo, and J Ros, *Phys. Rep.* **470** (2009) 151.
44. E S Mananga and T Charpentier, *J. Chem. Phys.* **135** (2011) 044109.
45. T Mikami, S Kitamura, K Yasuda, N Tsuji, T Oka, and H Aoki, *Phys. Rev. B* **93** (2016) 144307.
46. T Mori, T Kuwahara, and K Saito, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 120401.
47. T Kuwahara, T Mori, and K Saito, *Ann. Phys.* **367** (2016) 96.
48. S Vajna, K Klobas, T Prosen, and A Polkovnikov, *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 200607.
49. M Vogl, P Laurell, A D Barr, and G A Fiete, *Phys. Rev. X* **9** (2019) 021037.
50. B Mukherjee, P Mohan, D Sen, and K Sengupta, *Phys. Rev. B* **97** (2018) 205415.
51. N Tsuji, T Oka, P Werner and H Aoki, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 236401.
52. N Goldman and J Dalibard, *Phys. Rev. X* **4** (2014) 031027.
53. M Bukov, L D'Alessio, and A Polkovnikov, *Adv. Phys.* **64** (2015) 139.
54. P Bogdan, E Jonckheere, and S Schirmer. *Chaos, Solitons, & Fractals* **103** (2017) 622.
55. P W Claey, M Pandey, D Sels and A Polkovnikov, *Phys. Rev. Lett.* **123** (2019) 090602.
56. W P Su, J R Schrieffer, and A J Heeger, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1698.
57. A Y Kitaev, *Sov. Phys.-Usp.* **44** (2001) 131.

58. R Jafari and H Johannesson, *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 015701.
59. S Ansari, J Naji, and R Jafari, *Iran. J. Phys. Res.* **43** (2026) 25-43 (in Persian).
60. P Ghosh, J D Sau, S Tewari, and S Das Sarma, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 184525.
61. M Klett, H Cartarius, D Dast, J Main, and G Wunner, *Phys. Rev. A* **95** (2017) 053626.
62. X Wang, T Liu, Y Xiong, and P Tong, *Phys. Rev. A* **92** (2015) 012116.
63. G Zhu, S A Yang, C Fang, W M Liu, and Y Yao, *Phys. Rev. B* **8** (2012) 214415.
64. J H Shirley, *Phys. Rev.* **138** (1965) B979.
65. W Magnus, *Commun. Pure Appl. Math.* VII (1954) 649.
66. A Alvermann, H Fehske, *J. Comput. Phys.* **230** (2011) 5930.
67. C C Wu, J Sun, F J Huang, Y D Li, and W M Liu, *Europhys. Lett.* **104** (2013) 27004.
68. D E Liu, A Levchenko, and H U Baranger¹, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 047002.
69. A Eckardt, C Weiss, and M Holthaus, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2005) 260404.
70. J-i Inoue and A Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 017401.