

تحول زمانی پیچیدگی کریلو در میدان شرویدینگر با شرط مرزی رابین

حمیدرضا ایمانی، کمیل بابایی ولنی و محمدرضا محمدی مظفر

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان

پست الکترونیکی: babaeivlni@guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۱۲/۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۵/۰۲/۰۲)

چکیده:

در این پژوهش، پیچیدگی کریلو به عنوان سنجه‌ای برای توصیف رشد و گسترش عملگرها در سامانه‌های کوانتومی، در چارچوب نظریه میدان مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمرکز این پژوهش بر یک میدان فرمیونی غیرنسبیتی است که به جای فضای نامحدود، روی یک نیم‌خط تعریف شده و در نتیجه، وجود مرز نقش تعیین‌کننده‌ای در تحول سامانه ایفا می‌کند. ابتدا ساختار توابع وایتمن دمدار و بسط مدهای تکانه برای میدان شرویدینگر روی خط کامل مرور می‌شود تا چارچوب محاسباتی لازم برای تعریف طیف، ضرب داخلی دمدار و توابع همبستگی مشخص گردد. سپس با اعمال شرط مرزی رابین، نشان داده می‌شود که بازتاب از مرز چگونه ساختار توابع همبستگی و در ادامه، کمیت‌های مؤثر در رشد عملگرها را تغییر می‌دهد. همچنین، رفتارهای حادی متناظر با مرز شفاف و مرز کاملاً بازتابنده تحلیل می‌گردد تا روشن شود در چه شرایطی نیم‌خط عملاً نتایج خط کامل را بازتولید می‌کند و در چه شرایطی منجر به تغییر معنادار در رشد پیچیدگی می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند که مرز می‌تواند بسته به وضعیت فیزیکی سامانه، نرخ رشد پیچیدگی را تضعیف یا تقویت کند و از این رو، به عنوان عاملی کنترل‌کننده در تحول پیچیدگی عمل می‌کند.

واژه‌های کلیدی: پیچیدگی کریلو، تحول زمانی، میدان شرویدینگر، شرط مرزی رابین، نیم‌خط، خط کامل، الگوریتم لنشز، طیف انرژی

۱. مقدمه

کوانتومی و هم برای عملگرها تعریف کرد و در هر دو حالت، این کمیت میزان گسترش عنصر اولیه را در فضای کریلو اندازه‌گیری می‌کند. از این منظر، پیچیدگی کریلو ابزاری مناسب برای بررسی تحول دینامیکی سامانه‌های کوانتومی به شمار می‌آید [۵-۱۷].

بخش قابل توجهی از مطالعات پیشین درباره پیچیدگی کریلو بر سامانه‌هایی متمرکز بوده‌اند که در فضاهای نامحدود یا بدون مرز تعریف می‌شوند. در چنین شرایطی، تقارن انتقالی فضایی نقش مهمی در ساده‌سازی ساختار نظری و محاسبات ایفا می‌کند. با این حال، در بسیاری از مسائل فیزیکی واقعی، وجود مرز اجتناب‌ناپذیر است و مرز می‌تواند به‌طور اساسی رفتار سامانه را تغییر دهد. حضور مرز نه تنها خواص طیفی و ساختار همبستگی‌ها را اصلاح می‌کند، بلکه می‌تواند بر

در سال‌های اخیر، مفهوم پیچیدگی در سامانه‌های کوانتومی به یکی از موضوعات فعال و مهم در فیزیک نظری تبدیل شده است [۱-۳]. این توجه گسترده عمدتاً از تلاش برای فهم عمیق‌تر تحول اطلاعات کوانتومی، رفتار سامانه‌های غیرتعادلی و سازوکارهای گسترش اطلاعات در نظریه‌های میدان کوانتومی ناشی می‌شود. در این چارچوب، پیچیدگی کریلو به عنوان سنجه‌ای ساختاری برای توصیف رشد پیچیدگی معرفی شده است [۴]. این کمیت بر پایه ساخت فضای کریلو و استفاده از الگوریتم لنشز بنا شده است و امکان توصیف تحول زمانی حالت‌ها یا عملگرها را در قالب یک ساختار جبری مؤثر فراهم می‌کند. پیچیدگی کریلو را می‌توان هم برای حالت‌های

می‌کند، از توابع همبستگی دمدار عملگرها به دست می‌آید؛ تابع همبستگی و طیف توان وایتمن نقش محوری در استخراج ضرایب لنشز ایفا می‌کنند.

با استفاده از ضرب داخلی مناسب، عملگر لیوویلین^۱ که تحول زمانی عملگرها را در تصویر هاینبرگ تولید می‌کند، به صورت $LX \equiv [H, X]$ تعریف می‌شود و الگوریتم لنشز مجموعه‌ای از عملگرهای متعامد را تولید می‌کند که پایه کريلو را تشکیل می‌دهند. در این پایه، لیوویلین شکلی سه‌قطری پیدا می‌کند و رابطه بازگشتی زیر برقرار است:

$$\mathcal{L}|\mathcal{O}_n\rangle = b_{n+1}|\mathcal{O}_{n+1}\rangle + a_n|\mathcal{O}_n\rangle + b_n|\mathcal{O}_{n-1}\rangle \quad (1)$$

تحول زمانی عملگر اولیه را می‌توان به صورت بسطی روی پایه کريلو نوشت:

$$|\mathcal{O}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) |\mathcal{O}_n\rangle \quad (2)$$

که در آن، ضرایب زمانی $\varphi_n(t)$ توزیع عملگر را در فضای کريلو مشخص می‌کنند. پیچیدگی کريلو به عنوان میانگین شاخص کريلو تعریف می‌شود و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n |\varphi_n(t)|^2 \quad (3)$$

در این چارچوب، پیچیدگی کريلو به طور کامل توسط ساختار همبستگی‌های دمدار نظریه میدان تعیین می‌شود و اثراتی مانند وجود مرز مستقیماً در رفتار $K(t)$ منعکس می‌گردند.

۳. توابع وایتمن دمدار برای فرمیون‌های غیرنسبیتی روی خط کامل

در گام نخست، دو تابع وایتمن بزرگ‌تر و کوچک‌تر تعریف می‌شوند که ترتیب قرارگیری عملگرهای میدان را در میانگین دمدار مشخص می‌کنند. تفاوت علامت میان این دو تابع، بازتاب مستقیم آمار فرمیونی است. تعریف استاندارد نظریه میدان برای این دو کمیت به شکل زیر است:

نحوه تحول عملگرها و در نتیجه بر رشد پیچیدگی نیز تأثیرگذار باشد.

در این مقاله، پیچیدگی کريلو در چارچوب نظریه میدان و برای یک میدان فرمیونی غیرنسبیتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. میدان مورد نظر به جای تعریف شدن روی خط کامل، روی یک نیم‌خط تعریف می‌شود و از این رو، اثرات ناشی از وجود مرز به صورت صریح وارد مسئله می‌گردد. انتخاب میدان شرودینگر غیرنسبیتی این امکان را فراهم می‌کند که اثرات مرزی در ساده‌ترین بستر میدان کوانتومی بررسی شوند، بدون آن‌که پیچیدگی‌های فنی نظریه‌های نسبیتی وارد تحلیل شود.

هدف اصلی این پژوهش، بررسی نقش مرز در تحول پیچیدگی کريلو است. برای این منظور، ابتدا ساختار همبستگی‌های میدان روی خط کامل مرور می‌شود تا مبنایی برای مقایسه فراهم گردد. سپس با اعمال شرایط مرزی در نیم‌خط، نشان داده می‌شود که بازتاب از مرز چگونه ساختار توابع همبستگی و کمیت‌های مؤثر در ساخت فضای کريلو را تغییر می‌دهد. این تغییرات در نهایت به اصلاح رفتار رشد پیچیدگی منجر می‌شوند و نشان می‌دهند که مرز می‌تواند به عنوان یک عامل کنترل‌کننده در تحول سامانه عمل کند.

ساختار مقاله به این صورت است که پس از این مقدمه، چارچوب کلی پیچیدگی کريلو به اختصار معرفی می‌شود. سپس میدان فرمیونی غیرنسبیتی روی خط کامل بررسی شده و در ادامه، اثر مرز و گذار به نیم‌خط تحلیل می‌گردد. در نهایت، نتایج به دست آمده ارائه شده و تفسیر فیزیکی آن‌ها در قالب نقش مرز در تحول پیچیدگی کريلو مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲. پیچیدگی کريلو در نظریه میدان

در چارچوب نظریه میدان کوانتومی، پیچیدگی کريلو برای عملگرها تعریف می‌شود و به جای فضای هیلبرت حالت‌ها، از فضای هیلبرت عملگرها استفاده می‌گردد [۱۶]. این فضا با یک ضرب داخلی دمدار از نوع وایتمن تجهیز می‌شود تا امکان ساخت پایه‌ی کريلو و اعمال الگوریتم لنشز فراهم شود. در این رویکرد، داده‌ی دینامیکی اصلی که پیچیدگی کريلو را تعیین

۱. Liouvillian

دامنه بازتاب استاندارد به شکل زیر است (این همان پارامتری است که نوع مرز را از شفاف تا کاملاً بازتابنده کنترل می‌کند):

$$R(k) = \frac{k + iv}{k - iv} \quad (۸)$$

روش محاسبه در نیم‌خط همان روش بخش خط کامل است، با این تفاوت کلیدی که میدان باید شامل هم موج رونده و هم موج بازتابی باشد. به بیان دیگر، میدان روی نیم‌خط به صورت ترکیبی از e^{ikx} و e^{-ikx} ظاهر می‌شود و $R(k)$ دقیقاً ضریب موج بازتابی است. نتیجه مستقیم این ساختار آن است که در توابع وایتمن، علاوه بر وابستگی به تفاضل مکان‌ها، وابستگی به جمع مکان‌ها نیز ظاهر می‌شود؛ زیرا مرز تقارن انتقالی را می‌شکند و تصویر بازتابی نقطه x را وارد توابع همبستگی می‌کند.

برای استفاده در محاسبه طیف توان وایتمن، حالت مهم زمانی رخ می‌دهد که یکی از نقاط همبستگی روی خود مرز قرار گیرد. در این صورت، عامل بازتاب به یک ضریب واقعی و ساده تبدیل می‌شود و نشان می‌دهد مرز چگونه وزن طیفی را نسبت به حالت خط کامل تغییر می‌دهد. به طور مشخص، برای نقطه روی مرز، عامل مرزی به صورت زیر ساده می‌شود و دقیقاً همان چیزی است که بعداً به عنوان «اصلاح مرزی» در $f(\omega)$ ظاهر می‌گردد:

$$\mathcal{S}_{1/2}(k; 0, 0) = \frac{2k^2}{(k^2 + v^2)} \quad (۹)$$

گام نهایی این بخش، محاسبه طیف توان وایتمن $f(\omega)$ برای نیم‌خط است. روش، دقیقاً موازی محاسبه خط کامل است. تفاوت اصلی با خط کامل این است که در این جا یک ضریب وابسته به تکانه از مرز باقی می‌ماند که در نهایت به یک ضریب وابسته به $(\mu - \omega)$ تبدیل می‌شود. نتیجه نهایی نشان می‌دهد که مرز نه ساختار دمدار و نه شرط KMS را تغییر می‌دهد، بلکه فقط وزن طیفی را با یک عامل کنترلی اصلاح می‌کند. فرمول نهایی طیف توان وایتمن روی نیم‌خط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_{ab}^>(t_1, x_1; t_r, x_r) \equiv \langle \psi_a(t_1, x_1) \psi_b^*(t_r, x_r) \rangle_\beta \quad (۴)$$

$$D_{ab}^<(t_1, x_1; t_r, x_r) \equiv - \langle \psi_b^*(t_r, x_r) \psi_a(t_1, x_1) \rangle_\beta \quad (۵)$$

در هنگرد بندادی بزرگ^۱، کمیتی که در فاز زمانی و عوامل وزنی دمدار ظاهر می‌شود، انرژی جابه‌جاشده با پتانسیل شیمیایی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_k = \frac{k^2}{2m} - \mu \quad (۶)$$

پس از تعریف میدان، توابع وایتمن به صورت انتگرال‌های تکانه‌ای به دست می‌آیند. سپس با تبدیل فوریه نسبت به زمان و مکان، نمایش طیفی استخراج می‌شود. در این مرحله، اطلاعات دینامیکی مسئله در قالب یک تابع وزنی مؤثر در فضای تکانه خلاصه می‌شود. این تابع، که عملاً خروجی نهایی محاسبات این بخش است، از تبدیل فوریه تابع همبستگی وایتمن به دست می‌آید. نتیجه نهایی، که با نتیجه مقاله [۱۸] سازگار است، به صورت زیر است:

$$f(\omega) = \mathcal{N}(m, d) \frac{(\mu - \omega)^{(d-3)/2}}{\cosh(\beta\omega/2)} \theta(\mu - \omega) \quad (۷)$$

در این رابطه، عامل هذلولی مستقیماً از وزن‌های دمدار فرمیونی حاصل می‌شود و تابع هویساید تضمین می‌کند که تنها مدهای فیزیکی مجاز در بازه انرژی مؤثر مشارکت داشته باشند. تابع $f(\omega)$ کمیتی کلیدی است که در ادامه برای ساخت پایه کرپلو با الگوریتم لنش و در نهایت محاسبه تحول پیچیدگی کرپلو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴. میدان شرویدینگر روی نیم‌خط و اثر مرز

اکنون میدان فرمیونی غیرنسبیتی را از خط کامل به نیم‌خط $x \geq 0$ محدود می‌کنیم و در نقطه $x = 0$ یک مرز بازتابنده در نظر می‌گیریم. اثر مرز را می‌توان به صورت یک ضریب بازتاب وابسته به تکانه مدل‌سازی کرد؛ به این معنا که هر مُد موج ورودی، در مرز به یک مُد بازتابی با دامنه‌ای مشخص تبدیل می‌شود. برای شرط مرزی رایین از نوع $(\partial_x - v)\psi|_{x=0} = 0$

۱. Grand-Canonical Ensemble

۲. Kubo–Martin–Schwinger

تولید می‌کند و از این طریق، ورودی ساخت ضرایب لنش را فراهم می‌کند و هم با تبدیل فوریه خود، $C(t)$ را به دست می‌دهد که همان $\phi_0(t)$ است. از طرف دیگر، $\phi_n(t)$ ها دامنه‌های احتمال حضور در پایه کریلو هستند و با ترکیب این دامنه‌ها در رابطه بالا، مقدار $K(t)$ به عنوان سنج تحول و رشد پیچیدگی کریلو به دست می‌آید.

۵. حالات حدی مرز و نقش آن‌ها در $C(t)$ و ممان‌ها برای پتانسیل شیمیایی صفر و منفی

در این بخش، دو حد فیزیکی مهم برای پارامتر مرزی ν را بررسی می‌کنیم. در حد $\nu = 0$ مرز شفاف است و ضریب بازتاب به مقدار واحد میل می‌کند؛ بنابراین، نیم خط عملاً مانند خط کامل رفتار می‌کند و اثر مرز در وزن‌های طیفی ساده می‌شود. در مقابل، در حد $\nu \rightarrow \infty$ مرز به یک دیوار سخت تبدیل می‌شود. در این حالت، برای کنترل رفتار و اگر/صفرشونده‌ی کمیت‌ها، مناسب است وابستگی کلی به ν را جدا کرده و وزن‌های بازبهنجارشده را محاسبه کنیم. در هر دو حد، هدف اصلی ما نوشتن صریح ممان‌های بازبهنجارشده μ_k و تابع همبستگی بازبهنجارشده $C(t)$ است؛ زیرا ممان‌ها ورودی محاسبه‌ی ضرایب لنش هستند و $C(t)$ نیز دامنه‌های زمانی را در فضای کریلو کدگذاری می‌کند.

روابط حد شفاف $\nu = 0$:

$$\mu_{k|\nu=0} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right)} \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \mu^{k-j} \Gamma\left(\frac{1+d}{2} + j\right) \mathcal{N}_0(j)}{\mathcal{D}_0} \quad (14)$$

که:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n(0) \\ &= \frac{2}{d-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{(2n+1)\beta\mu}{2}\right) [\beta(2n+1)]^{\frac{1-d}{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$f(\omega) = N \frac{(\mu - \omega)^{(d-1)/2}}{\sqrt{m(\mu - \omega) + \nu^2} \cosh(\beta\omega/2)} \frac{1}{\theta(\mu - \omega)} \quad (10)$$

این رابطه دقیقاً هدف اصلی محاسبات نیم خط است؛ که نشان می‌دهد اثر مرز از طریق پارامتر ν می‌تواند طیف توان و ایتمن را نسبت به خط کامل تضعیف یا تقویت کند و بنابراین، در مراحل بعدی، از طریق همین تابع، بر ضرایب لنش و در نهایت بر تحول پیچیدگی کریلو اثر می‌گذارد.

در ادامه محاسبات، کمیت کلیدی ما طیف توان و ایتمن $f(\omega)$ است، چون تمام اطلاعات لازم برای استخراج «ممان‌ها» از همین تابع به دست می‌آید. به زبان ساده، $f(\omega)$ مانند یک تابع وزن در فضای تکانه عمل می‌کند؛ هرگاه بخواهیم کمیت‌های طیفی بهنجار شده (ممان‌ها) را بسازیم، باید ω^k را با وزن $f(\omega)$ روی کل بسامدها انتگرال‌گیری کنیم. از سوی دیگر، تبدیل فوریه $f(\omega)$ همان تابع همبستگی زمانی $C(t)$ است که ورودی مستقیم معادله بازگشتی (شرودینگر- لنش) در فضای کریلو محسوب می‌شود. در این دیدگاه، $C(t)$ دقیقاً نقش $\phi_0(t)$ را دارد و با دانستن آن و ضرایب لنش، مراتب بالاتر $\phi_n(t)$ نیز از رابطه بازگشتی به دست می‌آیند؛ این $\phi_n(t)$ ها همان دامنه‌های احتمال برای قرار گرفتن سامانه در هر یک از حالت‌های پایه کریلو هستند. سپس ممان‌ها برای محاسبه ضرایب لنش استفاده می‌شوند و با داشتن ضرایب و دامنه‌ها، در نهایت می‌توان پیچیدگی کریلو را محاسبه کرد.

سه رابطه اصلی که این زنجیره را خلاصه می‌کنند، عبارت‌اند از:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} f(\omega) \quad (11)$$

$$\mu_k = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^k f(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega)} \quad (12)$$

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n |\phi_n(t)|^2 \quad (13)$$

در این چارچوب، اهمیت $f(\omega)$ در این است که هم ممان‌ها را

و

کریلو است که از توزیع دامنه‌های حالت تحول‌یافته در پایه کریلو به دست می‌آید و همان‌طور که قبلاً اشاره شد به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود. در این رابطه، $\phi_n(t)$ دامنه‌ی احتمال قرار گرفتن حالت زمانی در n -امین بردار پایه کریلو است. بنابراین، هر تغییری که باعث پخش شدن سریع‌تر $\phi_n(t)$ به سمت مقادیر بزرگ‌تر n شود، مستقیماً به رشد سریع‌تر $K(t)$ منجر خواهد شد.

همان‌طور که در شکل ۱ برای $\mu = 0$ مشاهده می‌شود، نتایج مربوط به خط کامل و نیم خط با مرز شفاف $v = 0$ کاملاً بر هم منطبق‌اند. این هم‌پوشانی نشان می‌دهد که در حد مرز شفاف، حضور مرز تأثیری بر مولد مؤثر رشد عملگر و در نتیجه بر پیچیدگی کریلو ندارد. در مقابل، در حد دیوار سخت $v \rightarrow \infty$ انحراف معناداری از رفتار خط کامل دیده می‌شود و پیچیدگی کریلو با نرخ بالاتری رشد می‌کند. این تفاوت رفتاری را می‌توان مستقیماً به تغییرات ضرایب لنشز نسبت داد. نتایج عددی نشان می‌دهد که در حد $v \rightarrow \infty$ ، ضرایب لنشز همچنان رفتار خطی خود به عنوان تابعی از مرتبه‌ی کریلو حفظ می‌کنند، اما ضرایب قطری a_n دچار یک انتقال رو به پایین و ضرایب غیر قطری b_n دچار یک انتقال رو به بالا می‌شوند. افزایش b_n به صورت مؤثر باعث افزایش نرخ پخش حالت روی زنجیره کریلو شده و در نتیجه، رشد سریع‌تر $K(t)$ را توضیح می‌دهد. همین الگوی کیفی برای پتانسیل شیمیایی منفی نیز برقرار است. همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود، برای $\mu < 0$ منحنی‌های مربوط به خط کامل و مرز شفاف همچنان روی هم می‌افتند، در حالی که حد دیوار سخت منجر به رشد سریع‌تر پیچیدگی کریلو می‌شود. نکته قابل توجه این است که در هندسه خط کامل (یا $v = 0$)، مقدار پیچیدگی کریلو حساسیت چندانی به مقدار عددی μ ندارد و منحنی‌های مربوط به مقادیر مختلف پتانسیل شیمیایی منفی تقریباً هم‌پوشان هستند. با این حال، اثر مرز سخت همچنان پابرجاست و از طریق افزایش ضرایب b_n باعث تقویت رشد پیچیدگی می‌شود.

در مجموع، همان‌طور که در شکل‌های ۱ و ۲ واضح است،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_v(j) &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n(v, j) \\ &= \frac{1}{d+1+\frac{1}{2}j} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{(2n+1)\beta\mu}{2}\right) [\beta(2n+1)]^{\frac{1-d-2j}{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

تابع همبستگی زمانی در حد شفاف $v = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t)|_{v=0} &= e^{-i\mu t} \\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{(2n+1)\beta\mu}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2} - \frac{it}{\beta}\right)^{\frac{1-d}{2}}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{(2n+1)\beta\mu}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-d}{2}}} \end{aligned} \quad (17)$$

همان‌ها در حد دیواره سخت $v \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mu_k|_{v \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right)} \\ \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \mu^{k-j} \frac{1}{2} j \Gamma\left(\frac{1+d}{2} + j\right) \mathcal{N}_{\infty}(j)}{\mathcal{D}_{\infty}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathcal{D}_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{(2n+1)\beta\mu}{2}\right) [\beta(2n+1)]^{-\frac{1+d}{2}} \quad (19)$$

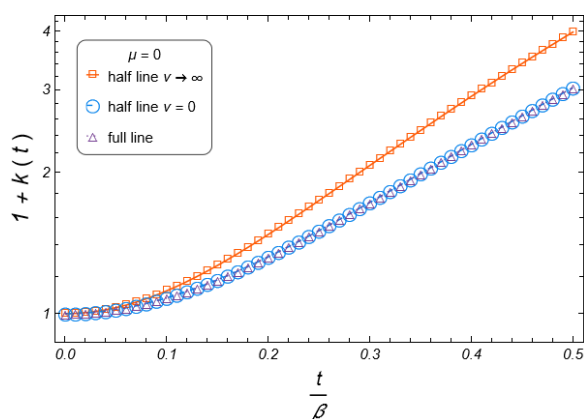
و

$$\mathcal{N}_{\infty}(j) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{(2n+1)\beta\mu}{2}\right) [\beta(2n+1)]^{-\frac{1+d+2j}{2}}. \quad (20)$$

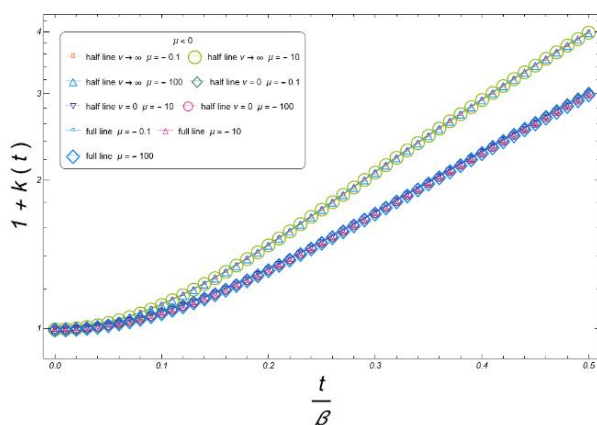
در این حد، وابستگی صریح به v پس از بازهنجارش در نسبت‌ها حذف می‌شود و بیان نهایی فقط شامل وزن‌های سری روی مدهای نیم‌صحیح $n + \frac{1}{2}$ و مقیاس دما β است. همین ویژگی باعث می‌شود این حد‌ها برای محاسبات عددی ضرایب لنشز و سپس استخراج پیچیدگی کریلو بسیار مناسب باشند.

۶. رفتار پیچیدگی کریلو

در این بخش، رشد زمانی پیچیدگی کریلو برای دو حالت پتانسیل شیمیایی صفر $\mu = 0$ و پتانسیل شیمیایی منفی $\mu < 0$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طور که در شکل ۱ و شکل ۲ نشان داده شده است، کمیت اصلی که رسم می‌شود پیچیدگی



شکل ۱. پیچیدگی کرپلو برای $\mu = 0$



شکل ۲. پیچیدگی کرپلو برای $\mu < 0$

یک فاز نوسانی کلی $e^{-i\mu t}$ ایجاد می‌کند، بلکه به‌طور مستقیم وزن نسبی سهم‌های انرژی پایین و بالا را نیز تعیین می‌کند. برای محاسبه ممان‌ها، لازم است بسط چندجمله‌ای مربوط به توان‌های انرژی در نظر گرفته شود. در این مرحله، توابع کمکی متناظر با هر مرتبه j به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J_{n,j}^{(I)} = \frac{e^{-\frac{a_n v^2}{\gamma m}}}{(\gamma m)^{j+\gamma}} \sum_{l=0}^{j+\gamma} \binom{j+\gamma}{l} (-v^2)^l \quad (24)$$

$$\int_{v^2+\gamma m\mu}^{\infty} du u^{j+\gamma-1-\gamma} e^{-\frac{a_n}{\gamma m}u}$$

$$J_{n,j}^{(II)} = \frac{e^{-\frac{a_n v^2}{\gamma m}}}{(\gamma m)^{j+\gamma}} \sum_{l=0}^{j+\gamma} \binom{j+\gamma}{l} (-v^2)^l \quad (25)$$

$$\int_{v^2}^{v^2+\gamma m\mu} du u^{j+\gamma-1-\gamma} e^{-\frac{a_n}{\gamma m}u}$$

در نهایت، ممان‌های به‌نجارشده که ورودی اصلی محاسبه ضرایب لنش هستند، به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

رفتار پیچیدگی کرپلو به‌طور مستقیم توسط ضرایب لنش کنترل می‌شود و مرز بازتابنده می‌تواند، بدون تغییر ماهیت خطی این ضرایب، نرخ رشد پیچیدگی را به‌صورت مؤثر افزایش دهد. این نتیجه نقش مرز را به‌عنوان یک پارامتر کنترلی در تحول پیچیدگی کرپلو برجسته می‌کند.

۷. رفتار تابع همبستگی در حالت پتانسیل شیمیایی

مثبت

در حالت پتانسیل شیمیایی مثبت، ساختار طیف انرژی به‌طور کیفی با حالات $\mu < 0$ تفاوت اساسی پیدا می‌کند. در این رژیم، نقطه $\mu = \omega$ ، به‌صورت یک مرز طبیعی در انتگرال‌های انرژی ظاهر می‌شود و لازم است سهم‌های ناحیه‌های انرژی پایین‌تر و بالاتر از μ به‌طور جداگانه در نظر گرفته شوند. به همین دلیل، محاسبه تابع همبستگی زمانی به‌صورت طبیعی به دو بخش مستقل تجزیه می‌شود. به‌طور مشخص، انتگرال انرژی به دو ناحیه $\mu < x < \omega$ و $x > \omega$ تقسیم می‌شود و برای هر کدام، یک تابع کمکی مستقل تعریف می‌گردد. این توابع به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند:

$$J_n^{(II)}(t) = \int_{\mu}^{\omega} dx e^{ixt} \frac{x^{\gamma}}{v^2 + \gamma m x} e^{a_n x} \quad (21)$$

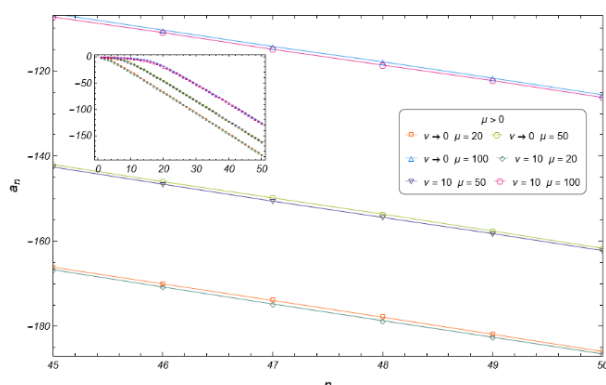
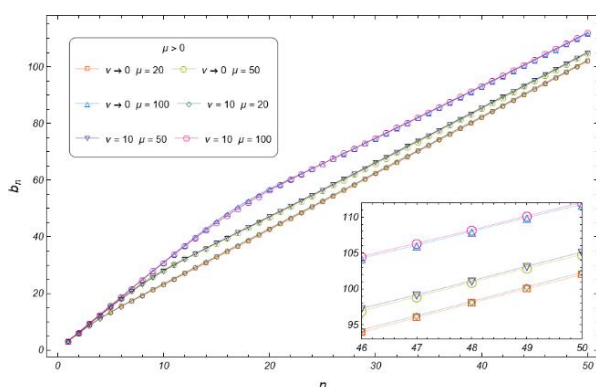
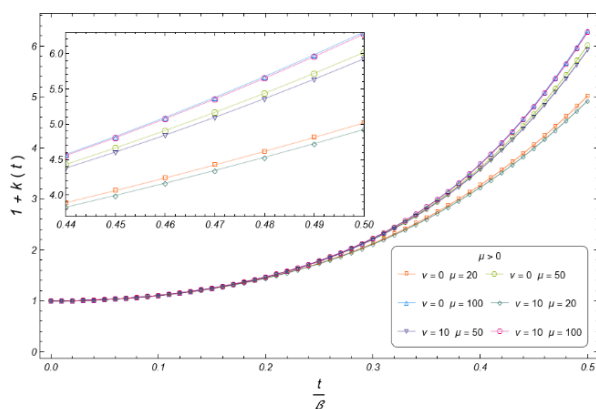
$$J_n^{(I)}(t) = \int_{\mu}^{\infty} dx e^{ixt} \frac{x^{\gamma}}{v^2 + \gamma m x} e^{-a_n x} \quad (22)$$

این تفکیک نشان می‌دهد که سهم‌های زیر سطح پتانسیل شیمیایی و بالای آن، رفتار زمانی متفاوتی دارند: ناحیه $\mu < x < \omega$ با عامل نمایی افزایشی کنترل می‌شود، در حالی که ناحیه $x > \omega$ به‌واسطه عامل نمایی کاهشی، به‌صورت طبیعی همگرا باقی می‌ماند.

با استفاده از این دو تابع کمکی، تابع همبستگی کامل به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$C(t) = e^{-i\mu t} \mathcal{N}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [e^{-a_n \mu} J_n^{(II)}(t) + e^{a_n \mu} J_n^{(I)}(t)] \quad (23)$$

این رابطه به‌روشنی نشان می‌دهد که پتانسیل شیمیایی مثبت نه تنها

شکل ۳. ضرایب لنش a_n برای $\mu > 0$ شکل ۴. ضرایب لنش b_n برای $\mu > 0$ شکل ۵. پیچیدگی کرپلو برای $\mu > 0$

در ادامه، به رفتار ضریب لنش b_n می‌پردازیم که نتایج آن در شکل ۴ نشان داده شده است. در اینجا نیز برای $\nu = 0$ ، داده‌های عددی کاملاً با نتیجه خط کامل منطبق هستند که بار دیگر صحت پیش‌بینی تحلیلی را تأیید می‌کند. با این حال، در حالت $\nu = 10$ ، رفتار مکملی نسبت به a_n مشاهده می‌شود

$$\mu_k = N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (-1)^{n+j} \binom{k}{j} \mu^{k-j} [e^{-a_n \mu} J_{n,j}^{(II)} + e^{a_n \mu} J_{n,j}^{(I)}] \quad (26)$$

این ساختار به‌وضوح نشان می‌دهد که در حالت $\mu > 0$ ، همان‌ها ترکیبی غیرساده از سهم‌های دو ناحیه انرژی هستند و همین موضوع به تغییر کیفی رفتار ضرایب لنش و در نتیجه، رشد پیچیدگی کرپلو منجر می‌شود. در مقایسه با حالات $\mu \leq 0$ ، این رژیم غنی‌تر بوده و حساسیت بیشتری نسبت به مقدار پتانسیل شیمیایی از خود نشان می‌دهد.

۸. رفتار ضرایب لنش و پیچیدگی کرپلو در ناحیه پتانسیل شیمیایی مثبت

در این بخش، به بررسی رفتار ضرایب لنش a_n و b_n و همچنین پیچیدگی کرپلو $K(t)$ در ناحیه پتانسیل شیمیایی مثبت $\mu > 0$ می‌پردازیم. نتایج عددی این تحلیل به‌ترتیب در شکل‌های مربوط به a_n ، b_n و $K(t)$ نمایش داده شده‌اند.

ابتدا ضرایب لنش a_n را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، برای تمام مقادیر مثبت μ ، منحنی‌های متناظر با خط کامل و حالت مرزی شفاف $\nu = 0$ با دقت عددی بسیار بالا بر یکدیگر منطبق هستند. این هم‌پوشانی نشان می‌دهد که شرط مرزی شفاف، حتی در حضور پتانسیل شیمیایی مثبت نیز به‌طور کامل فیزیک پیوسته خط کامل را بازتولید می‌کند. در مقابل، برای $\nu > 0$ ، ضریب a_n همچنان رفتاری خطی نسبت به n دارد، اما کل منحنی به‌صورت یکنواخت به سمت مقادیر پایین‌تر منتقل شده است. این جابه‌جایی عمودی منفی در عرض از مبدأ، از نظر کیفی کاملاً مشابه رفتاری است که پیش‌تر در ناحیه $\mu < 0$ مشاهده شد. همچنین، با افزایش μ ، کل منحنی a_n به سمت مقادیر بالاتر جابه‌جا می‌شود، در حالی که فاصله نسبی بین حالت $\nu = 10$ و $\nu = 0$ حفظ می‌شود.

مقادیر b_n بزرگ‌تر از مقادیر متناظر در خط کامل هستند. به بیان دیگر، وجود مرز بازتابنده باعث تضعیف a_n و در مقابل

تقویت b_n می‌شود. افزایش پتانسیل شیمیایی مثبت μ شیب و مقیاس کلی b_n را تغییر می‌دهد، اما فاصله بین منحنی‌های $v = 0$ و $v = 10$ تقریباً ثابت باقی می‌ماند.

در نهایت، رفتار پیچیدگی کرپلو $K(t)$ برای $\mu > 0$ در شکل ۵ نمایش داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، برای $v = 0$ ، پیچیدگی کرپلو دقیقاً با نتیجه خط کامل برای تمام مقادیر بررسی شده μ منطبق است. این نتیجه نشان می‌دهد که در ناحیه پتانسیل شیمیایی مثبت، شرط مرزی شفاف هیچ تأثیری بر رشد پیچیدگی کرپلو ندارد. در مقابل، برای $v = 10$ ، منحنی $K(t)$ پایین‌تر از حالت خط کامل قرار می‌گیرد. این رفتار در تضاد مستقیم با ناحیه $\mu < 0$ است، جایی که وجود مرز بازتابنده منجر به رشد سریع‌تر پیچیدگی می‌شد.

همان‌طور که در نمای بزرگ‌نمایی‌شده شکل، پیچیدگی کرپلو در ناحیه رشد خطی دیده می‌شود، ترتیب منحنی‌ها کاملاً مشخص است: برای هر $\mu > 0$ ، منحنی‌های متناظر با $v = 10$ پایین‌تر از $v = 0$ قرار دارند و با افزایش μ ، فاصله بین این دو منحنی به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد. در حد پتانسیل شیمیایی مثبت بزرگ، اثر مرز بازتابنده بر رشد پیچیدگی کرپلو تقریباً ناچیز می‌شود و رفتار سامانه عملاً به رفتار خط کامل

نزدیک می‌گردد.

۹. نتیجه‌گیری

در این کار، رفتار پیچیدگی کرپلو و ضرایب لنشز سامانه‌ای کوانتومی روی نیم‌خط را در حضور پتانسیل شیمیایی دلخواه و شرایط مرزی بازتابنده بررسی کردیم. تحلیل دقیق طیف وایتمن، محاسبه ممان‌ها و استخراج ضرایب لنشز نشان داد که اثر مرز به‌طور غیربدیهی به علامت پتانسیل شیمیایی وابسته است.

در ناحیه $\mu < 0$ ، وجود مرز بازتابنده منجر به افزایش ضرایب b_n و در نتیجه رشد سریع‌تر پیچیدگی کرپلو نسبت به خط کامل می‌شود، در حالی که در ناحیه $\mu > 0$ ، همین مرز باعث تضعیف رشد پیچیدگی می‌گردد. با این حال، در هر دو ناحیه، شرط مرزی شفاف $v = 0$ فیزیک خط کامل را با دقت بسیار بالا بازتولید می‌کند.

نتایج عددی همچنین نشان می‌دهند که با افزایش اندازه پتانسیل شیمیایی، اثر مرز به تدریج تضعیف شده و پیچیدگی کرپلو به رفتار کلی خط کامل نزدیک می‌شود. این یافته‌ها به روشنی بیانگر آن هستند که پیچیدگی کرپلو ابزاری حساس برای تشخیص اثرات مرزی و ساختار طیفی سامانه‌های کوانتومی بوده و می‌تواند نقش مهمی در فهم دینامیک عملگرها در نظریه‌های میدان با مرز ایفا کند.

مراجع

1. R Jefferson and R C Myers, JHEP **10** (2017) 107.
2. H Babaei-Aghbolagh, D M Yekta, K Velni Babaei and H Mohammadzadeh, Eur. Phys. J. C **82**, **4** (2022) 383.
3. M Alishahiha, Phys. Rev. D **92**, **12** (2015) 126009.
4. D E Parker, X Cao, A Avdoshkin, T Scaffidi and E Altman, Phys. Rev. X **9** (2019) 041017.
5. K Babaei Velni and M R Mohammadi Mozaffar, Iranian J. Phys. Res. **19**, (2020) 755.
6. M Alishahiha and S Banerjee, SciPost Phys. **15** (2023) 080.
7. E Rabinovici, A Sánchez-Garrido, R Shir and J Sonner, JHEP **07** (2022) 151.
8. T Ali, A Bhattacharyya, S S Haque, E H Kim, N Moynihan and J Murugan, Phys. Rev. D **101** (2020) 026021.
9. H R Imani, K Babaei Velni and M R Mohammadi Mozaffar, Eur. Phys. J. C **85** (2025) 958.
10. M J Vasli, K Babaei Velni, M R Mohammadi Mozaffar, A Mollabashi and M Alishahiha, Eur. Phys. J. C **84** (2024) 235.
11. H A Camargo, K B Huh, V Jahnke, H S Jeong, K Y Kim and M Nishida, JHEP **08** (2024) 241.
12. V Balasubramanian, J M Magan and Q Wu, Phys. Rev. E **111**, **1** (2025) 014218.
13. N Vardian, arXiv:2407.00155 (2024).

14. T Anegawa and R Watanabe, JHEP **11** (2024) 026.
15. K Hashimoto, K Murata, N Tanahashi and R Watanabe, JHEP **11** (2023) 040.
16. H A Camargo, V Jahnke, K Y Kim and M Nishida, JHEP **05** (2023) 226.
17. A Avdoshkin, A Dymarsky and M Smolkin, JHEP **06** (2024) 066.
18. P Z He and H Q Zhang, JHEP **03** (2025) 142.