

ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌ی تقارنی در نظریه‌ی میدان نرده‌ای غیرنسبیتی

محمدرضا محمدی مظفر*^۱ و علی ملاباشی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان دانشکده فیزیک

۲. پژوهشکده فیزیک کوانتومی و ماده، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران

پست الکترونیکی: mmohammadi@guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۵/۰۱/۱۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۵/۰۵/۲۶)

چکیده:

در این پژوهش، ویژگی‌های مختلف ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌ی تقارنی در نظریه‌های میدان کوانتومی غیرنسبیتی دارای تقارن مقیاس مطالعه می‌شود. به‌ویژه، تمرکز اصلی بر نظریه‌های نرده‌ای با نمای دینامیکی غیربدیهی است. هدف این مطالعه گسترش فهم ما از میزان سهم بخش‌های مختلف تقارنی در ظرفیت درهم‌تنیدگی حالت پایه متناظر است. با استفاده از روش هم‌بستگی، ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌ی تقارنی را محاسبه کرده و وابستگی آن به بار و نمای دینامیکی را بررسی می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که در چنین نظریه‌هایی توزیع یکسان درهم‌تنیدگی بین بخش‌های با مقادیر مختلف بار پایسته در حد نمای دینامیکی بزرگ رخ می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: درهم‌تنیدگی، تقارن، قضیه نوتر، نظریه‌های میدان غیرنسبیتی

۱. مقدمه

یکی از محورهای مهم این مطالعات، بررسی اثرات ناشی از وجود تقارن بر روی ساختار درهم‌تنیدگی و نحوه مقیاس‌بندی سنج‌های آن بوده است. نقش تقارن در طبیعت و بازتاب اثرات ناشی از آن در ساده‌سازی روابط توصیف‌کننده رفتار و تحول سامانه‌های فیزیکی از دیرباز مورد توجه بوده است. به‌ویژه، کشف ارتباط میان تقارن و کمیت‌های پایسته توسط امی نوتر در سال ۱۹۱۸، انگیزش مضاعفی برای مطالعه گروه‌های تقارنی موجود در ساختار الگوهای فیزیکی و طبقه‌بندی آن‌ها فراهم کرده است. نکته جالب توجهی که در مورد تقارن وجود دارد آن است که در پاره‌ای از موارد بروز اثرات ناشی از شکست تقارن در سامانه‌های فیزیکی نیز آموزنده بوده و به ما در شناخت الگوی مورد مطالعه یاری می‌رساند. به‌ویژه، به‌کارگیری پیامدهای ناشی از تقارن در الگوسازی پدیده‌های طبیعی کمک شایانی به پیش‌بینی و حدس رفتارهای آن‌ها در مقیاس انرژی

یکی از مهم‌ترین جنبه‌های جالب‌توجه مکانیک کوانتومی مفهوم درهم‌تنیدگی است که نوع خاصی از هم‌بستگی بین درجات آزادی را حتی در دمای صفر و حالت خلاء نظریه میدان‌های کوانتومی به نمایش می‌گذارد. همانند سایر کمیت‌های فیزیکی، به منظور سنجش، اندازه‌گیری و مطالعه درهم‌تنیدگی، سنج‌های گوناگونی پیشنهاد شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آنتروپی درهم‌تنیدگی، اطلاعات متقابل، آنتروپی رنی و غیره اشاره کرد. این کمیت‌ها معمولاً میان زیرسامانه‌های هندسی یک سامانه بزرگ‌تر در یک حالت کوانتومی مشخص تعریف می‌شوند. مسیر طی شده برای مطالعه پیرامون این پدیده و سنج‌های مرتبط با آن دارای نقاط عطف فراوان و دستاوردهای قابل توجهی بوده است [۱-۴].

بنیادی (مانند تقارن تحت تبدیل فاز سرتاسری) یا شکست آن‌ها (مانند شکست تقارن نسبی) از طریق نمای دینامیکی غیردیهی) بر ساختار درهم‌تنیدگی اثر می‌گذارند.

این مطالعه از جنبه دیگری که در ارتباط با اصل هولوگرافی و دوگانگی گرائش-پیمانه‌ای است نیز مورد توجه قرار دارد. بر اساس اصل هولوگرافی، سنجه‌های درهم‌تنیدگی در نظریه‌های میدان، با کمیت‌های هندسی در فضای پاد-دوسته هم‌ارز هستند [۴]. مطالعه این سنجه‌ها در نظریه‌های میدان، نه تنها به درک بهتر ساختار فضا-زمان از منظر درهم‌تنیدگی کمک می‌کند، بلکه می‌تواند برای بررسی این سنجه‌ها در نظریه‌های میدان با جفت‌شدگی قوی نیز مفید باشد. جایی که استفاده از روش‌های اختلالی ناکارآمد خواهد بود.

شایان ذکر است که مطالعات انجام‌شده در حوزه‌های مختلف مرتبط با این موضوع در سال‌های اخیر گسترش قابل توجهی یافته‌اند و ترکیب این نتایج به درک عمیق‌تر مفاهیم بنیادی در گرائش، نظریه اطلاعات و نظریه میدان، به‌ویژه ایده‌های مبتنی بر استخراج هندسه از درهم‌تنیدگی، کمک کرده است. در این میان محاسبه سنجه‌های متنوع درهم‌تنیدگی در نظریه‌های میدان نرده‌ای آزاد نیز بسیار مورد توجه قرار گرفته است. البته در نگاه نخست میان چنین نظریه‌هایی با الگوهای واقعی و شبیه‌سازی شده در آزمایشگاه تفاوت بسیاری وجود دارد. با این وجود برخی از رفتارهای جهان‌شمول و عمومی سنجه‌های درهم‌تنیدگی مستقل از الگوی مورد بررسی هستند. از این‌رو، می‌توان این رفتارها را بدون در نظر گرفتن الگوهای پیچیده‌تر و یا ورود به محاسبات دشوار، به‌صورت ساده‌تری مطالعه کرد؛ برای مثال، قانون مساحت در سامانه‌های ایستا، قانون رشد خطی در سامانه‌های وابسته به زمان و غیره. از این دیدگاه در مقاله پیش‌رو نظریه میدان نرده‌ای آزاد را به عنوان یک چارچوب ساده نظری برای استخراج رفتارهای عمومی برگزیده‌ایم.

محاسبه سنجه‌های درهم‌تنیدگی با داشتن طیف ماتریس چگالی کاهش‌یافته زیرسامانه به سادگی قابل انجام است. از سوی دیگر، اطلاعات گوناگون مرتبط با ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی را می‌توان از چگونگی رفتار سنجه‌هایی چون آنترپی

(یا طولی)، که در شرایط فعلی از دسترس آزمایشگران خارج است، می‌نماید. پژوهش‌های فراوانی پیرامون ارتباط میان نحوه رفتار و مقیاس‌بندی سنجه‌های درهم‌تنیدگی با تقارن (یا شکست آن) در سامانه‌های کوانتومی از دیدگاه نظریه میدان و سامانه‌های بس‌ذره‌ای انجام شده است. این مطالعات را می‌توان به دو مجموعه زیر تقسیم نمود:

(الف) بررسی شکست تقارن‌های بنیادی و اثرات ناشی از آن بر مقیاس‌پذیری سنجه‌های درهم‌تنیدگی [۵-۷]؛

(ب) تجزیه درهم‌تنیدگی و سنجه‌های آن مطابق با بارهای پیوسته موجود در سامانه، متناظر با تقارن‌های سرتاسری آبلی یا غیرآبلی [۸-۱۱].

شایان ذکر است که با وجود پیشرفت‌های اخیر در زمینه اندازه‌گیری سنجه‌های درهم‌تنیدگی، برخی از نتایج نظری متناظر با این پژوهش‌ها در آزمایشگاه نیز مشاهده و به طور قابل قبولی تایید شده‌اند [۱۲ و ۱۳].

یکی از پرسش‌های بنیادی در نظریه اطلاعات کوانتومی این است که چگونه هم‌بستگی‌های کوانتومی، فراتر از هم‌بستگی‌های کلاسیک، در سامانه‌های بس‌ذره‌ای توزیع می‌شوند. درهم‌تنیدگی به عنوان منبعی عملیاتی برای پردازش اطلاعات کوانتومی، نقشی کلیدی در تعیین ظرفیت کانال‌های کوانتومی، میزان فشرده‌سازی اطلاعات و تعداد کیوبیت‌های لازم برای بازنمایی حالت‌های کوانتومی ایفا می‌کند. بنابراین، محاسبه درهم‌تنیدگی برای درک میزان هم‌بستگی‌های غیرکلاسیک موجود در سامانه و همچنین محدودیت‌های عملیاتی آن در فرایندهایی مانند مخابرات کوانتومی یا محاسبات کوانتومی ضروری است.

از سوی دیگر، محاسبه درهم‌تنیدگی در سامانه‌های بس‌ذره‌ای، به ویژه در نقطه بحرانی، ابزاری نیرومند برای شناسایی و طبقه‌بندی کلاس جهانی گذار فازهای کوانتومی است [۳]. در نظریه‌های میدان آزاد، اگرچه برهم‌کنش وجود ندارد، اما ساختار طیفی و تقارن‌های سامانه، تأثیر مستقیمی بر نحوه توزیع درهم‌تنیدگی بین زیربخش‌های مختلف دارند. بنابراین، محاسبه سنجه‌هایی مانند آنترپی و ظرفیت درهم‌تنیدگی در این نظریه‌ها، به ما امکان می‌دهد تا درک کنیم که چگونه تقارن‌های

محاسبات مورد نیاز و نتایج عددی ظرفیت درهم‌تنیدگی با تجزیه‌تقارنی بیان شده است. بخش ۵ نیز دربردارنده مهم‌ترین نتایج و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی خواهد بود.

۲. تجزیه‌تقارنی سنج‌های درهم‌تنیدگی

۱.۲. درهم‌تنیدگی و سنج‌های آن

در این بخش مرور کوتاهی بر درهم‌تنیدگی کوانتومی و برخی از مهم‌ترین سنج‌های آن خواهیم داشت. بدین منظور، توجه خود را به ساده‌ترین چارچوب ممکن که می‌تواند نشان‌دهنده وجود درهم‌تنیدگی غیربدیهی بین درجات آزادی باشد معطوف می‌کنیم. دو سامانه کوانتومی که به ترتیب دارای فضاها $\mathcal{H}_A$ و $\mathcal{H}_B$ هستند در نظر می‌گیریم. با استفاده از ضرب تانسوری این دو فضا، فضای هیلبرت کلی به شکل $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ساخته می‌شود. انتظار داریم که بردار دلخواهی مانند $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_{tot}$ بر حسب مولفه‌های جداگانه‌ای در هر یک از زیرفضاهای اولیه قابل بازنویسی نباشد که این امر ناشی از وجود درهم‌تنیدگی بین درجات آزادی فضاها $\mathcal{H}_A$ و $\mathcal{H}_B$ است. در چارچوب نظریه اطلاعات کوانتومی برای سنجیدن و کمی‌سازی درهم‌تنیدگی و هم‌بستگی‌های کوانتومی، سنج‌ها و کمیت‌های بسیاری مطالعه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آنتروپی درهم‌تنیدگی و آنتروپی‌های رنی^۲ اشاره نمود. فرض کنید که سامانه مورد نظر در یک حالت خالص $|\psi\rangle$ قرار گرفته باشد. در این صورت آنتروپی درهم‌تنیدگی سنج‌های یکتاست که توانایی سنجش درهم‌تنیدگی کوانتومی را بین دو زیربخش از آن دارد. این کمیت را می‌توان بر حسب آنتروپی فون-نویمان به شکل زیر بیان کرد:

$$S_E = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A), \quad (1)$$

که در آن ρ_A ماتریس چگالی کاهش‌یافته سامانه است و به صورت $\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$ تعریف می‌شود. همچنین به منظور سهولت از انجام محاسبات و دستیابی به اطلاعات بیشتر در مورد طیف ماتریس چگالی می‌توان از تعریف آنتروپی رنی به صورت زیر نیز بهره برد:

درهم‌تنیدگی و ظرفیت درهم‌تنیدگی یافت. کمیت اخیر که توجه اصلی ما در این پژوهش بدان معطوف است، برای نخستین در سال ۲۰۱۰ معرفی گردید [۱۴]. ظرفیت درهم‌تنیدگی به عنوان معیاری از توزیع ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش‌یافته در نظر گرفته می‌شود. مطالعه این سنج در چارچوب نظریه‌های میدان، سامانه‌های بس‌ذره‌ای و هولوگرافی، نتایج جالب‌توجهی به همراه داشته است [۱۵-۲۱]. در این پژوهش قصد داریم تا با تلفیق مطالعات پیشین به بررسی تجزیه‌تقارنی ظرفیت درهم‌تنیدگی در یک نظریه میدان غیرنسبیتی پرداخته و ویژگی‌های جالب‌توجه آن را واکاوی کنیم. به منظور جلوگیری از بروز اثرات ناشی از هم‌بستگی‌های کلاسیک، مطالعه خود را به حالت خلاء نظریه محدود کرده و همچنین تنها سامانه‌های ایستا در دمای صفر را مد نظر خواهیم داشت.

بیان این نکته ضروری است که ظرفیت درهم‌تنیدگی اطلاعاتی فراتر از آنتروپی در اختیار ما قرار می‌دهد. درحالی‌که، آنتروپی میانگین طیف ماتریس چگالی کاهش‌یافته را اندازه‌گیری می‌کند، ظرفیت پهنای طیف یا واریانس ویژه‌مقادیر را نشان می‌دهد. به عنوان نمونه، برای یک حالت بیشینه آمیخته، آنتروپی مقدار بیشینه دارد، ولی مقدار ظرفیت صفر است. از چنین حالتی تحت عنوان طیف درهم‌تنیدگی تخت یاد می‌شود. جالب آن‌که در چارچوب هولوگرافی، حالت‌های نیمه‌کلاسیکی مشخصی به نام حالت‌های مساحت-ثابت^۱ وجود دارند که ویژگی طیف تخت را دارا هستند. انتظار داریم تفاوت بنیادی بین آنتروپی و ظرفیت، امکان بررسی دقیق‌تر میزان یکنواختی توزیع درهم‌تنیدگی میان بخش‌های مختلف تقارنی را فراهم کند. رفتاری که پیش‌تر در چارچوب نظریه‌های میدان غیرنسبیتی، تنها با مطالعه آنتروپی تحلیل شده است.

ساختار مقاله بدین ترتیب است: در بخش بعد ضمن معرفی رهیافت تجزیه‌تقارنی به سنج‌های درهم‌تنیدگی، برخی از مهم‌ترین نتایج فیزیکی مرتبط با آن‌ها را بیان خواهیم نمود. بخش ۳، به معرفی اجمالی نظریه میدان نرده‌ای مختلط که دارای تقارن مقیاس غیرنسبیتی است اختصاص دارد. در بخش ۴،

۱. Fixed-area states.

۲. Renyi entropy.

آن را Q می‌نامیم. از آنجایی که هر کدام از زیربخش‌های A و B به صورت جداگانه به این کمیت سهم می‌دهند برای عملگرهای بار متناظر داریم: $Q = Q_A \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes Q_B$. برای سادگی فرض می‌کنیم که این سامانه در یک حالت خالص $|\psi\rangle$ قرار دارد که یک ویژه‌حالت عملگر بار Q است. بدین ترتیب، با تعریف عملگر چگالی $|\psi\rangle\langle\psi| = \rho$ ، به سادگی رابطه جابه‌جایی $[Q, \rho] = 0$ حاصل می‌شود. با جمع زدن روی درجات آزادی زیرسامانه B می‌توان نشان داد که رابطه جابه‌جایی $[Q_A, \rho_A] = 0$ نیز برقرار است. به عبارت دیگر، ماتریس چگالی کاهش‌یافته برای زیربخش A در پایه ویژه‌بردارهای Q_A به شکل بلوکه قطری درخواهد آمد. هر یک از بلوک‌های مورد نظر متناظر با یکی از ویژه‌مقادیر صحیح عملگر بار مربوط به این زیربخش هستند. با استفاده از این ساختار، می‌توان عبارت جمع مستقیم زیر را به دست آورد:

$$\rho_A = \bigoplus_q \Pi_q \rho_A, \quad (6)$$

که در آن Π_q عملگر تصویرگر به زیرفضای متناظر با ویژه‌مقدار q است. از آنجایی که احتمال یافتن این ویژه‌مقدار در خروجی آزمایش اندازه‌گیری Q_A برابر با $p(q) = \text{Tr}(\Pi_q \rho_A)$ است، عبارت بالا به صورت زیر نیز قابل بازنویسی است:

$$\rho_A = \bigoplus_q p(q) \rho_A(q). \quad (7)$$

بدین ترتیب می‌توان درهم‌تنیدگی بین زیربخش‌های A و B را به سهم‌های مجزا از ویژه‌مقادیر متفاوت بار تجزیه نمود. در گام نخست، آنتروپی رنی تجزیه‌تقارنی^۳ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n(q) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}(\rho_A(q)^n). \quad (8)$$

اکنون مشابه با تعاریف پیشین آنتروپی درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی با گرفتن حد از رابطه بالا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_1(q) = -\text{Tr}(\rho_A(q) \log \rho_A(q)). \quad (9)$$

همچنین، با در نظر گرفتن تجزیه ماتریس چگالی بر حسب ویژه‌مقادیر بار و استفاده از رابطه (۷) می‌توان نشان داد که عبارت آنتروپی کل به صورت مجموع آنتروپی پیکربندی و آنتروپی عدد (یا افت‌وخیز) قابل تفکیک است. آنتروپی

$$S_n = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr} \rho_A^n. \quad (2)$$

در این تعریف عدد صحیح و مثبت n را پارامتر رنی می‌نامیم. طبق رابطه بالا و با ادامه تحلیلی آنتروپی رنی به ازای پارامتر رنی واحد خواهیم داشت: $S_E = \lim_{n \rightarrow 1} S_n$. شایان ذکر است که اطلاعات مربوط به طیف ماتریس چگالی کاهش‌یافته در برخی دیگر از سنج‌های مرتبط نیز قابل دستیابی است. از آنجایی که این ماتریس مثبت و هرمیتی است، می‌توان در تشابه با ماتریس چگالی گرمایی آن را بر حسب تابع نمایی یک هامیلتونی درهم‌تنیدگی نوشت. در واقع این هامیلتونی که از آن تحت عنوان هامیلتونی مادولار^۱ یاد می‌شود به صورت $H_A = -\log \rho_A$ قابل تعریف است. در این صورت می‌توان نشان داد که آنتروپی درهم‌تنیدگی به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$S_E = \text{Tr} \rho_A H_A = \langle H_A \rangle, \quad (3)$$

که بنابراین معیاری از مقدار میانگین طیف هامیلتونی مادولار است. برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر درباره این طیف، از کمیت دیگری با عنوان ظرفیت درهم‌تنیدگی^۲ استفاده می‌کنیم. این سنج، پهنای طیف ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش‌یافته را توصیف می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_E = \langle H_A^2 \rangle - \langle H_A \rangle^2. \quad (4)$$

می‌توان نشان داد که با در نظر گرفتن پارامتر رنی به عنوان معکوس دما، تعریف بالا متناظر با تعریف ظرفیت گرمایی در ترمودینامیک است و با مشتق آنتروپی گرمایی ارتباط دارد. در واقع رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$C_E = \lim_{n \rightarrow 1} n^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} ((1-n)S_n). \quad (5)$$

همچنین، برای سامانه‌های با حالت آمیختگی بیشینه، مقدار ظرفیت درهم‌تنیدگی صفر خواهد شد.

۲.۲. تجزیه تقارنی سنج‌های درهم‌تنیدگی

در این بخش به طور مختصر به معرفی تجزیه تقارنی برخی از مهم‌ترین سنج‌های درهم‌تنیدگی می‌پردازیم. بدین منظور، یک سامانه دو بخشی با تقارن سرتاسری $U(1)$ را در نظر می‌گیریم. طبق قضیه نوتر این سامانه دارای یک بار پیوسته خواهد بود که

۱. Modular Hamiltonian

۲. Capacity of entanglement

۳. Symmetry resolved Renyi entropy

همان‌گونه که از تعاریف مربوط به سنج‌های معرفی‌شده مشخص است، نقطه شروع برای محاسبه سنج‌های تجزیه‌تقارنی یافتن $Tr(\rho_A(q)^n)$ است. این امر مستلزم محاسبه طیف ماتریس چگالی کاهش‌یافته بعد از تجزیه‌تقارنی بوده که متأسفانه در اغلب موارد به دلیل پیچیدگی محاسبات امکان‌پذیر نیست. برای غلبه بر این مشکل، در مرجع [۸] روش جایگزینی معرفی شد که در ادامه به طور مختصر گام‌های اساسی آن را بیان می‌کنیم. در گام نخست، گشتاورهای بار ماتریس چگالی کاهش‌یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_n^A(\alpha) = Tr(\rho_A^n e^{i\alpha Q_A}), \quad (11)$$

که در آن α معرف شار عبوری متناظر با بار پایسته است. تبدیل فوریه کمیت بالا گشتاور بار ماتریس چگالی را، که تنها به زیرفضای متناظر با بار q محدود شده است، به دست می‌آورد:

$$Z_n^A(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha q} Z_n^A(\alpha), \quad (12)$$

که در آن $Z_1(q) \equiv p(q)$ به صورت سازگار تعریف شده است. بدین ترتیب آنتروپی رنی تجزیه‌تقارنی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$S_n(q) = \frac{1}{1-n} \log \frac{Z_n^A(q)}{(Z_1^A(q))^n}. \quad (13)$$

اکنون با ادامه تحلیلی پارامتر رنی می‌توان آنتروپی درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی و سایر سنج‌های مرتبط با آن را محاسبه کرد.

۳. میدان نرده‌ای مختلط با تقارن مقیاس غیرنسبیتی

در این بخش، به معرفی نظریه میدان نرده‌ای باردار غیرنسبیتی می‌پردازیم. چگالی لاگرانژی این نظریه در دو بعد به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{L} = \partial_t \phi^\dagger \partial_t \phi - \partial_x^z \phi^\dagger \partial_x^z \phi - m^z \phi^\dagger \phi. \quad (14)$$

توجه به این نکته ضروری است که کش متناظر در حالت بدون جرم، ناوردایی مقیاس غیرنسبیتی را به صورت زیر برآورده می‌کند:

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}, \quad (15)$$

پیکربندی به تغییرات آرایش بارها در هر یک از زیربخش‌های هندسی به صورت جداگانه وابسته است. از طرفی آنتروپی عدد دربردارنده سهم ناشی از افت و خیز بارها بین دو زیربخش است. همان‌گونه که در [۱۲] نشان داده شده است، اندازه‌گیری این دو کمیت در آزمایشگاه به صورت مستقیم و غیرمستقیم امکان‌پذیر است. مفهوم تجزیه‌تقارنی درهم‌تنیدگی را می‌توان به سایر سنج‌های مرتبط نیز تعمیم داد. به‌ویژه، این تعمیم برای اطلاعات متقابل، ظرفیت درهم‌تنیدگی و منفیت نیز انجام شده است. تجزیه‌تقارنی ظرفیت درهم‌تنیدگی با الهام از تعریف اولیه این کمیت بر حسب ماتریس چگالی کاهش‌یافته و تعمیم آن به ازای هر زیربخش تقارنی سامانه به صورت زیر به دست می‌آید [۱۹]:

$$C_1(q) = \lim_{n \rightarrow 1} n^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} ((1-n) S_n^A(q)). \quad (10)$$

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، انتظار داریم که سنج‌های درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی حاوی اطلاعاتی پیرامون زیرفضاهای متناظر با مقادیر متفاوت از بار پایسته‌نوتر در سامانه کوانتومی باشند. بنابراین انتظار می‌رود که این کمیت‌ها توابعی از مقدار q (بار متعلق به زیربخش A از سامانه کل) باشند و با تغییر آن، افت و خیز کنند. با این حال مطالعات صورت گرفته پیرامون آنتروپی درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی نشان می‌دهد که در اولین مرتبه، توزیع درهم‌تنیدگی بین زیرفضاهای مختلف تقارنی یکسان است. این نتیجه که نخستین بار در [۹] برای تقارن سرتاسری $U(1)$ مغناطش مشاهده شد، به تدریج برای سایر الگوها و سامانه‌های تحت بررسی نیز به دست آمد [۱۱]. شایان ذکر است که توزیع یکسان درهم‌تنیدگی^۱ در نقطه بحرانی نظریه رخ می‌دهد. مطالعه منشأ این پدیده و همچنین نحوه بروز آن در سایر سامانه‌های کوانتومی اعم از آزاد، اندرکنشی یا دور از نقاط بحرانی نیز مورد توجه است. یکی از سوالات اصلی ما در این پژوهش بررسی چگونگی بروز رفتار توزیع یکسان برای ظرفیت درهم‌تنیدگی است.

۱. Entanglement equipartition

۲. شایان ذکر است که شکل صریح کنش میدان نرده‌ای مختلط دارای تقارن مقیاس غیرنسبیتی برای اولین بار در [۲۲] نوشته شده است. همچنین نتایج مرتبط با آنتروپی درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی در این الگو نیز در مرجع مذکور گزارش شده‌اند که برخی از آن‌ها صرفاً برای مقایسه با رفتارهای ظرفیت درهم‌تنیدگی در بخش بعد بیان خواهند شد.

شده است برای شبکه‌ای با تعداد N نقطه، چگالی هامیلتونی هر یک از نظریه‌های میدان حقیقی با استفاده از تبدیل فوریه گسسته روی شبکه به صورت زیر قطری می‌شود:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \Omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (21)$$

که در آن رابطه پاشندگی شبکه به شکل زیر است:

$$\Omega_k = \left(\gamma \sin \frac{\pi k}{N} \right)^2 + m^2 \gamma^2. \quad (22)$$

برای محاسبه سنجه‌های درهم‌تنیدگی در این الگو از روش هم‌بستگی^۱ برای میدان‌های نرده‌ای استفاده می‌کنیم [۲۳]. در روش هم‌بستگی برای زیر ناحیه‌ای که تعداد نقاط شبکه آن برابر با l باشد، آنتروپی و ظرفیت درهم‌تنیدگی به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$S_E = \sum_{k=1}^l (v_+ \log v_+ - v_- \log v_-), \quad (23)$$

$$C_E = \sum_{k=1}^l v_+ v_- \left(\log \frac{v_+}{v_-} \right)^2, \quad (24)$$

که در آن $v_{\pm} = v_k \pm \frac{1}{2}$ تعریف شده است. همچنین v_k ویژه‌مقادیر ماتریس $\sqrt{X \cdot P}$ هستند که با تعریف ماتریس‌های X و P برحسب توابع دو نقطه‌ای میدان و تکانه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$X_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\Omega_k} e^{\gamma \pi i \frac{k}{N} (m-n)}, \quad (25)$$

$$P_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Omega_k}{2} e^{\gamma \pi i \frac{k}{N} (m-n)}. \quad (26)$$

نتایج مربوط به آنتروپی درهم‌تنیدگی در این الگو، نخستین بار در [۷] گزارش شده‌اند و نشان‌دهنده رشد این کمیت بر حسب تابعی از نمای دینامیکی هستند. این رفتار ناشی از افزایش هم‌بستگی بین نقاط زیرناحیه به دلیل بالا رفتن مرتبه مشتق فضایی میدان به ازای مقادیر بزرگ‌تر نمای دینامیکی است که منجر به بروز رفتارهای غیرموضعی می‌شود. نکته قابل توجه دیگر، واگرا شدن عبارت‌های بالا در حد میدان بدون جرم با تکانه‌های بسیار کوچک است که به دلیل وجود مد صفر ایجاد می‌شوند. بنابراین به منظور حذف این مدها در محاسبات عددی پیش‌رو از در نظر گرفتن میدان‌های بدون جرم صرف نظر کرده

که در آن z نمای بحرانی دینامیک (نمای لیفشیتز) نام داشته و نشان‌دهنده ناهمسانگردی است. به سادگی دیده می‌شود که به ازای $z = 1$ به تبدیل مقیاس نسبی خواهیم رسید. نظریه بالا تحت تبدیل سرتاسری $U(1)$ که به صورت یک تبدیل فاز بر روی میدان نرده‌ای $\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x)$ اعمال می‌شود، ناوردا باقی می‌ماند. از آنجایی که مرتبه مشتق زمانی در لاگرانژی نسبت به حالت نسبیتی تغییری نکرده است، بنابراین عبارت متناظر با تکانه مزدوج به میدان نرده‌ای به صورت $\pi(x) = \partial_t \phi^\dagger(x)$ داده می‌شود. بدین ترتیب، با یک محاسبه ساده، چگالی هامیلتونی نظریه به دست می‌آید:

$$\mathcal{H} = \pi^\dagger \pi + \partial_x^z \phi^\dagger \partial_x^z \phi + m^2 \gamma^2 \phi^\dagger \phi. \quad (16)$$

حل معادلات حرکت برای میدان آزاد پس از اعمال قید کوانتش به جواب زیر منجر خواهد شد:

$$\phi = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k e^{ikx} + b_k^\dagger e^{-ikx}), \quad (17)$$

که در آن عملگرهای خلق و فناى مدهای متناظر را معرفی کرده‌ایم. همچنین رابطه پاشندگی از روی معادلات حرکت به شکل زیر حاصل خواهد شد:

$$\omega_k = k^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2. \quad (18)$$

با جایگذاری جواب‌های معادلات حرکت، نمایش قطری هامیلتونی در فضای تکانه به دست می‌آید:

$$H = \int \frac{dk}{2\pi} \omega_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k). \quad (19)$$

با استفاده از شکل صریح قضیه نوتر می‌توان بار پایسته متناظر با تبدیل فاز سرتاسری را پیدا نمود. پس از ساده‌سازی عبارت‌های مربوطه به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$Q = \int \frac{dk}{2\pi} (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k). \quad (20)$$

از طرفی می‌توان نظریه نرده‌ای مختلط را بر حسب میدان‌های حقیقی بازنویسی کرد. بدین ترتیب نشان داده می‌شود که نظریه مختلط هم‌ارز با دو نسخه از نظریه میدان حقیقی است.

برای محاسبه سنجه‌های درهم‌تنیدگی، نظریه را روی یک ساختار شبکه‌ای با شرط مرزی دوره‌ای قرار می‌دهیم. البته تعمیم محاسبات به حالتی که شامل شرط مرزی دیریکله باشد نیز به سادگی قابل انجام است. همان‌گونه که در [۷] نشان داده

پارامترها معطوف می‌کنیم. در برخی از موارد نتایج متناظر با تعمیم مقادیر عددی را نیز گزارش خواهیم کرد.

شکل ۱، نشان‌دهنده نتایج عددی برای ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی به عنوان تابعی از طول زیرناحیه به ازای مقادیر مختلفی از نمای دینامیکی است. همچنین، به منظور مقایسه بهتر، نتایج عددی متناظر با آنتروپی درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی را نیز در این شکل گزارش کرده‌ایم (منحنی‌های خط‌چین). با توجه به این نتایج چند مشاهده جالب توجه به دست می‌آید. به روشنی دیده می‌شود که این کمیت تابعی افزایشی از طول زیرناحیه است و در حالت مجانبی به اشباع می‌رسد. همچنین، با افزایش مقدار نمای بحرانی، مقدار ظرفیت نیز بزرگ‌تر شده است. در حقیقت با توجه به بروز اثرات غیرموضعی به ازای مقادیر بزرگ نمای بحرانی دینامیکی، رفتار اخیر قابل پیش‌بینی است.

با دقت در نتایج عددی به دست آمده درمی‌یابیم که در حالت نسبیتی متناظر با نمای دینامیکی واحد، ظرفیت و آنتروپی از یک مرتبه بزرگی هستند ($G_1 \sim S_1$).

از سوی دیگر، با افزایش نمای دینامیکی، اندازه آنتروپی به نسبت ظرفیت رشد بسیار بیشتری را تجربه کرده به گونه‌ای که در حد مقادیر بزرگ نمای دینامیکی داریم: $G_1 \ll S_1$. این رفتار نشان می‌دهد که در هر یک از بخش‌های تقارنی پهنای طیف به شدت باریک و لذا ماتریس چگالی کاهش یافته بیشتر به ماتریس متناظر با یک حالت کاملاً آمیخته نزدیک شده است. یادآوری این نکته ضروری است که برای یک حالت با بیشینه آمیختگی باید مقدار ظرفیت درهم‌تنیدگی برابر با صفر باشد. با این وجود، مطابق با بحث ارائه شده در [۱۴]، نسبت بین اندازه آنتروپی و ظرفیت است که به عنوان معیاری از دوری یا نزدیکی حالت به حالتی با بیشینه توزیع اهمیت دارد. این نتایج نشان می‌دهد که چنین رفتاری در تک‌تک بخش‌های سامانه در تناظر با مقادیر مختلف بار پایسته رخ داده است. در واقع همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد در صورتی که نمای دینامیکی را به عنوان شاخصی از طول هم‌بستگی موثر (تعداد نقاط شبکه که به خاطر جملات دارای مشتق فضایی در کنش، به طور مستقیم با یکدیگر هم‌بسته‌اند) در نظر بگیریم، رفتار مشاهده شده برای

و توجه خود را به جرم‌های بسیار کوچک معطوف می‌کنیم. از سوی دیگر، راه دیگری نیز برای از بین بردن این مدهای واگراکننده وجود دارد که مبتنی بر شکست تقارن انتقال با تغییر شرط مرزی در ساختار شبکه‌ای مورد نظر است. در این رهیافت شرط مرزی دوره‌ای با شرط مرزی دیریکله جایگزین می‌شود. همان‌گونه که در [۲۴] نشان داده شده است ارتباط جالبی میان تکانه‌های بار ماتریس چگالی و ویژه مقادیر ماتریس هم‌بستگی به صورت زیر وجود دارد:

$$Z_n^A(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha q} e^{F_n(\alpha) + F_n(-\alpha)}, \quad (27)$$

که در آن

$$F_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{\ell} \log \frac{1}{(v_+)^n - e^{i\alpha}(v_-)^n}. \quad (28)$$

بدین ترتیب با استفاده از روابط بیان شده می‌توان سنجه‌های تجزیه‌تقارنی را محاسبه نمود.

شایان ذکر است که روش هم‌بستگی در نظریه‌های میدان گاوسی که کنش آن‌ها حداکثر شامل توان دوم میدان باشد بسیار کارآمد است. مزیت این روش در رهیافت عددی به نسبت سایر روش‌ها برای محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی، تقلیل محاسبات مورد نیاز برای یافتن ویژه مقادیر ماتریس چگالی به زیرناحیه مورد نظر (به جای کل ناحیه) است. در سایر روش‌ها یافتن آنتروپی نیازمند بازسازی ماتریس چگالی حالت کل به ازای طول تمام ناحیه است. در ادامه، از این روش برای یافتن تجزیه‌تقارنی ظرفیت درهم‌تنیدگی به ازای پارامترهای مختلفی که در الگو وجود دارند بهره خواهیم برد.

۴. تجزیه‌تقارنی ظرفیت درهم‌تنیدگی و تبدیل

مقیاس غیرنسبیتی

با استفاده از روابط بخش قبل می‌توانیم ظرفیت درهم‌تنیدگی ناشی از سهم‌های متفاوت مرتبط با بار پایسته محاسبه کنیم. این محاسبه به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای نظریه مانند جرم، بار، نمای دینامیکی و طول زیرناحیه قابل انجام است. با این وجود به منظور ساده‌سازی نتایج و همچنین به دلیل وجود شباهت‌های کیفی میان رفتارهای مقیاسی سنجه‌های درهم‌تنیدگی، مطالعه خود را به ناحیه محدودی از فضای

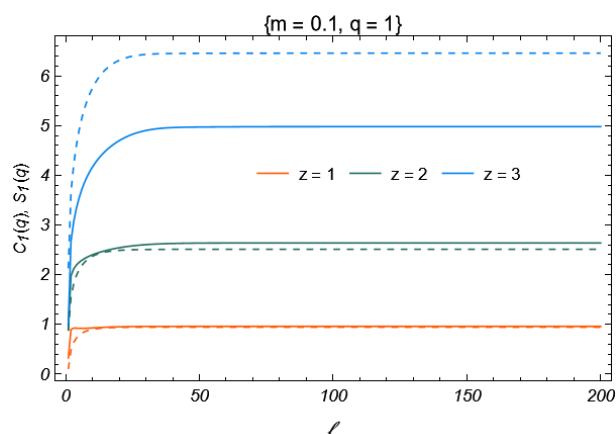
درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی رفتاری مستقل از اندازه بار پایسته از خود نشان می‌دهد. این ویژگی یادآور رفتار توزیع یکسان درهم‌تندگی است که پیش‌تر بدان اشاره شد. در واقع همان‌گونه که مشاهده می‌شود آنتروپی درهم‌تندگی نیز در حد نماهای دینامیکی بزرگ چنین رفتاری را از خود نشان داده است.

از طرفی در حد نسبیتی نحوه وابستگی این دو کمیت به بار پایسته کاملاً از یکدیگر متفاوت است. در این حد، علی‌رغم آن‌که آنتروپی به اندازه بار وابسته است، ظرفیت همچنان رفتاری مبتنی بر توزیع یکسان از خود نشان می‌دهد.

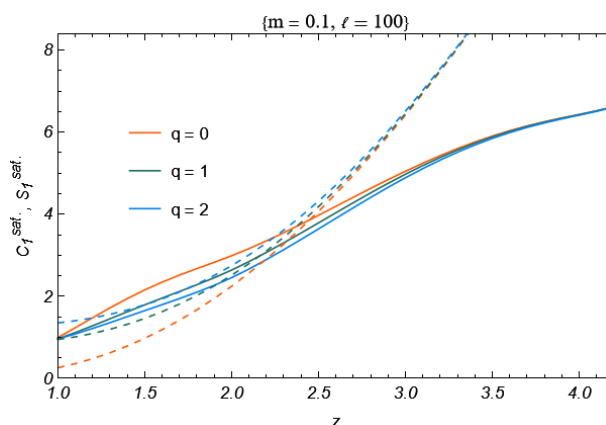
شکل ۳، دربردارنده نتایج عددی متناظر با ظرفیت درهم‌تندگی بر حسب تابعی از بار پایسته به ازای مقادیر مختلف نمای دینامیکی برای طول ثابتی از زیرناحیه درهم‌تندگی است. به روشنی ملاحظه می‌شود که این کمیت تابع زوجی از بار است و چگونگی وابستگی آن به نمای دینامیکی، موید رفتاری است که پیش‌تر بیان شد.

به ازای مقادیر کوچک این پارامتر ($z \lesssim 3$)، ظرفیت درهم‌تندگی دارای یک بیشینه در $q = 0$ است و به تدریج با افزایش بار از مقدار آن کاسته می‌شود.

در این بازه از مقادیر نمای دینامیکی، کاهش کاملاً مشهود است. با این وجود به تدریج و با افزایش نمای دینامیکی رفتار ظرفیت بر حسب بار به یک خط راست نزدیک می‌شود و میزان کاهش آن بر حسب بار قابل صرف‌نظر کردن است. رفتار اخیر به معنای توزیع یکسان درهم‌تندگی در حد مقادیر بزرگ نمای بحرانی است. ذکر این نکته ضروری است که بروز رفتار توزیع یکسان درهم‌تندگی به اندازه پارامتر جرمی در نظر گرفته شده برای میدان نرده‌ای نیز وابسته است. در واقع با بررسی رفتار ظرفیت درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی به عنوان تابعی از جرم درمی‌یابیم که با کاهش این پارامتر وابستگی سهم‌های ناشی از قسمت‌های مختلف بار به طور مساوی خواهد بود. در واقع اثرات ناشی از افزایش نمای دینامیکی و یا کاهش جرم نتایج کیفی مشابه و سازگاری را برای این سنجه ایجاد می‌کنند. این امر را می‌توان ناشی از ظاهر شدن پارامتر جرمی در کنش نظریه (و رابطه پاشندگی شبکه) به صورت m^z دانست که به ازای



شکل ۱. ظرفیت درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی بر حسب تابعی از طول زیرناحیه به ازای مقادیر مختلفی از نمای دینامیکی. منحنی‌های خط‌چین متناظر با نتایج عددی آنتروپی درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی با پارامترهای یکسان ترسیم شده‌اند.



شکل ۲. مقادیر اشباع ظرفیت درهم‌تندگی (خطوط پیوسته) و آنتروپی درهم‌تندگی (خط‌چین) بر حسب توابعی از نمای دینامیکی به ازای مقادیر مختلف بار پایسته. با افزایش نمای دینامیکی هر دو کمیت رفتاری مستقل از مقدار بار از خود بروز می‌دهند.

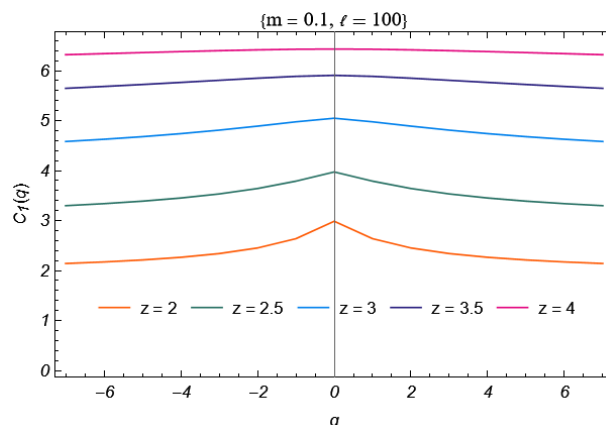
مقیاس‌پذیری آنتروپی و ظرفیت قابل توجیه است.

به منظور مطالعه دقیق‌تر اثرات ناشی از نمای دینامیکی غیربدهی و همچنین وابستگی ظرفیت به اندازه بار پایسته، در شکل ۲ مقادیر اشباع این کمیت را بر حسب تابعی از نمای دینامیکی به ازای مقادیر مختلف بار رسم کرده‌ایم. برای مقایسه نحوه مقیاس‌پذیری این کمیت، نتایج عددی متناظر با آنتروپی درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی را نیز در این شکل نمایش داده‌ایم (منحنی‌های خط‌چین). نکته جالب توجهی که از این نتایج دریافت می‌شود آن است که با افزایش نمای دینامیکی ظرفیت

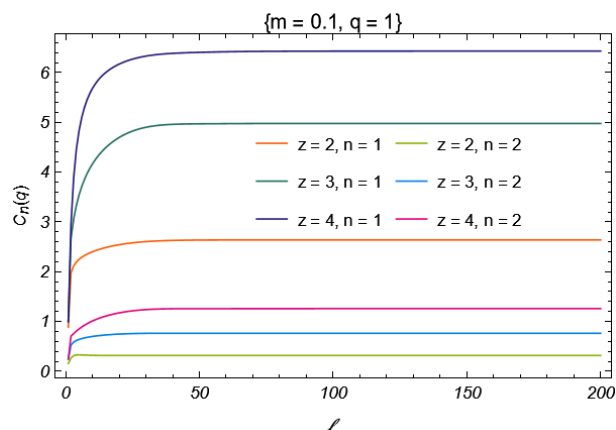
به عنوان آخرین بررسی، میزان وابستگی این رفتارها را به شرط مرزی سامانه را مطالعه می‌کنیم. بدین منظور فرض می‌کنیم که سامانه کل دارای شرط مرزی دیریکله در مرز نواحی خود باشد. البته از آنجایی که رفتار کیفی و عمومی نتایج حاصل بسیار مشابه با حالت دارای شرط مرزی دوره‌ای است، از بیان نتایج عددی متناظر صرف‌نظر کرده و صرفاً به گزارش ویژگی‌های اصلی می‌پردازیم. همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد برای شرط مرزی دیریکله به دلیل شکست تقارن انتقال، مد صفر تحریک نمی‌شود. این ویژگی سبب می‌شود که واگرایی ناشی از حد تکانه‌های کوچک به ازای پارامتر جرمی صفر از بین رفته و لذا در یافتن نتایج عددی به سادگی مقدار $m = 0$ را انتخاب نماییم. از طرفی همان‌طور که در مورد شرط مرزی دوره‌ای مشاهده کردیم بروز رفتار توزیع یکسان درهم‌تندگی با کاهش پارامتر جرمی تقویت خواهد شد. در واقع به ازای شرط مرزی دیریکله، وابستگی صریح ظرفیت درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی به بار پایسته به شدت کاهش می‌یابد. این رفتار نشانگر برابری سهم‌های ناشی از قسمت‌های مختلف بار به سنجۀ مورد نظر است. سایر رفتارهای بیان شده مرتبط با شرط مرزی دوره‌ای، از جمله افزایش ظرفیت با نمای دینامیکی و کاهش با پارامتر رنی، نیز به طور مشابه برای شرط مرزی دیریکله برقرار است.

۵. نتیجه‌گیری

یکی از مفاهیم بسیار قدرتمند برای مطالعه و یافتن ویژگی‌های سنجه‌های درهم‌تندگی در نظریه‌های میدان و سامانه‌های بس‌ذره‌ای، تقارن و ارتباط بنیادی آن با بارهای پایسته است. این مفهوم، به‌ویژه، امکان بررسی رفتار کمیت‌های موردنظر را در زیربخش‌های تقارنی متناظر با مقادیر مختلف بار فراهم می‌کند. در این میان مطالعات گوناگون درباره سنجه‌های درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی، به یافته‌های جالب توجهی برای درک عمیق‌تر ویژگی‌های اساسی درهم‌تندگی کوانتومی منجر شده‌اند. در این مقاله، با استفاده از چارچوب پیشنهادی برای یافتن تجزیه‌تقارنی ظرفیت درهم‌تندگی به مطالعه و بررسی رفتارهای این کمیت در چارچوب یک نظریه میدان نرده‌ای غیرنسبیتی پرداخته‌ایم. بدین ترتیب این پژوهش گام جدیدی



شکل ۳. ظرفیت درهم‌تندگی بر حسب بار پایسته به ازای مقادیر گوناگونی از نمای دینامیکی. افزایش این پارامتر سبب رفتاری مستقل از بار شده است.



شکل ۴. ظرفیت درهم‌تندگی به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر رنی و نمای دینامیکی بر حسب طول زیرناحیه.

مقادیر کوچک جرم، باعث کاهش بیشتر اثرات ناشی از جرم با افزایش نمای دینامیکی می‌شود. همچنین، بدیهی است که ظرفیت درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی با افزایش جرم کاهش می‌یابد. چنین رفتارهایی پیش‌تر برای آنتروپی درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی در الگوی مورد نظر نیز یافت شده بود [۲۲].

به منظور مطالعه میزان وابستگی نتایج پیشین به پارامتر رنی، در شکل ۴، گشتاورهای بالاتر ظرفیت درهم‌تندگی تجزیه‌تقارنی را به عنوان تابعی از طول زیرناحیه نمایش داده‌ایم. این نتایج نشان می‌دهد که رفتار کیفی این سنجه‌ها در هر زیرقسمت تقارنی، مشابه با حالت $n = 1$ است. همچنین با افزایش پارامتر رنی مقدار ظرفیت کاهش می‌یابد. با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی از z مشاهده می‌شود که میزان این کاهش تابعی افزایشی از نمای دینامیکی است.

- وابستگی سنجه‌های تجزیه‌تقارنی به بار پایسته در حد جرم‌های کوچک میدان نرده‌ای مشابه با رفتار آن‌ها در حد نماهای دینامیکی بزرگ است. به ویژه، در حد جرم‌های بسیار کوچک، رفتار متناظر با توزیع یکسان درهم‌تنیدگی بروز می‌یابد. همچنین ظرفیت با افزایش جرم کاهش می‌یابد که با نتایج پیشین سازگار است.
 - گشتاورهای بالاتر ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی به ازای مقادیر غیربدیهی پارامتر رنی رفتار کیفی مشابه با حالت پارامتر رنی واحد دارند. همچنین مقدار این کمیت با افزایش پارامتر رنی کاهش می‌یابد.
 - نتایج مشابهی برای سامانه دارای شرط مرزی دیریکله برقرار است. در این حالت به علت نبود مد صفر و دسترسی به حالت دارای جرم صفر، مشاهده رفتار توزیع یکسان درهم‌تنیدگی سهولت یافته که در پی آن وابستگی ظرفیت به بار پایسته ضعیف‌تر می‌شود.
- با توجه به نتایج ذکر شده به طور کلی، ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی تحت اثرات افزایش نمای دینامیکی، کاهش جرم، و تغییر شرط مرزی به سمت استقلال از بار پایسته و یکنواختی توزیع سهم‌ها حرکت می‌کند.
- مطالعه حاضر به بررسی تأثیرات ناشی از شکست تقارن نسبیتی بر نحوه مقیاس‌پذیری ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی برای حالت‌های مستقل از زمان محدود بود. محاسبه و بررسی رفتار این سنجه در سامانه‌های وابسته به زمان و دور از حالت تعادل نیز بسیار جالب توجه است و می‌تواند در شناخت بهتر ویژگی‌های جهان‌شمول آن به ما یاری رساند [۲۵ و ۲۶]. در ساده‌ترین حالت ممکن این وابستگی زمانی را می‌توان ناشی از یک فرایند گرمایش پس از یک فرونشانی کوانتومی در نظر گرفت. همچنین، بررسی رفتار این سنجه در الگوهای فرمیونی دارای تقارن مقیاس غیرنسبیتی نیز یکی از سؤالات جالب توجه پیش‌روست [۲۷].

- جهت بررسی تأثیرات ناشی از شکست تقارن نسبیتی بر رفتارهای جهان‌شمول ظرفیت درهم‌تنیدگی به‌شمار می‌رود. شایان ذکر است که نقش بنیادی تقارن در ساده‌سازی الگوهای فیزیکی و امکان پیش‌بینی رفتار سامانه‌ها در مقیاس‌های که از دسترس آزمایشگاهی خارج‌اند، از جمله مهم‌ترین انگیزه‌های این دسته مطالعات است. نتایج عددی یافته شده برای الگوی مورد نظر را می‌توان در قالب موارد زیر جمع‌بندی کرد:
- ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی تابعی افزایشی از طول زیرناحیه است و به ازای مقادیر بزرگ آن به یک حد ثابت اشباع می‌شود. همچنین این کمیت با بزرگ‌شدن نمای دینامیکی نیز افزایش یافته که نمایانگر تقویت هم‌بستگی‌های میان نقاط شبکه در حالت غیرنسبیتی است.
 - افزایش ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی به عنوان تابعی از نمای دینامیکی به گونه‌ای است که در حد مقادیر بزرگ این پارامتر، رفتار ظرفیت به توزیع یکسان درهم‌تنیدگی نزدیک می‌شود. این رفتار مشابه با رفتار آنتروپی درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی است و در این حد وابستگی ظرفیت به بار پایسته با تقریب بسیار خوبی از بین می‌رود.
 - علی‌رغم آن‌که آنتروپی و ظرفیت مربوط به بخش‌های مختلف تقارنی، در حالت نسبیتی هم‌مرتبه‌اند، اما با افزایش نمای دینامیکی، آنتروپی بسیار سریع‌تر از ظرفیت رشد می‌کند. این رفتار را می‌توان نشانه‌ای از باریک‌شدن طیف و نزدیک‌شدن حالت‌ها به حالت دارای بیشینه آمیختگی در هر زیربخش تقارنی قلمداد کرد.
 - ظرفیت درهم‌تنیدگی تجزیه‌تقارنی نسبت به بار پایسته تابعی زوج بوده و به ازای مقادیر کوچک نمای دینامیکی دارای بیشینه‌ای در بار صفر است. در این حالت برای مقادیر بزرگ‌تر بار پایسته، کاهش محسوسی را تجربه می‌کند.

مراجع

1. P Calabrese and J Cardy, *J. Phys. A* **42** (2009) 504005.
2. H Casini and M Huerta, *J. Phys. A* **42** (2009) 504007.
3. N Laflorencie, *Phys. Rept.* **646** (2016) 1.
4. M Rangamani, T Takayanagi, *Lect. Notes Phys.* **931** (2017).

5. S N Solodukhin, *JHEP* **04** (2010) 101.
6. A Bagchi, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 111602.
7. M R Mohammadi Mozaffar & A Mollabashi, *JHEP* **07** (2017) 120.
8. M Goldstein and E Sela, *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 200602.
9. J C Xavier, et. al., *Phys. Rev. B* **98** (2018) 041106.
10. G Perez, R Bonsignori & P Calabrese, *J. Stat. Mech.* **2109** (2021) 093102.
11. O A Castro-Alvaredo, L Santamaría-Sanz, *Mod. Phys. Lett. B* **39** (2025) 2430002.
12. A Lukin, et. al., *Science* **364** (2019) 6437.
13. A Rath, et. al., *PRX Quantum* **4** (2023) 010318.
14. H Yao, X Qi, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 080501.
15. J de Boer, J Järvelä, E Keski-Vakkuri, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 066012.
16. P Nandy, *JHEP* **07** (2021) 019.
17. Y Nakaguchi & T Nishioka, *JHEP* **12** (2016) 129.
18. M R Mohammadi Mozaffar, *Phys. Rev. D* **110** (2024) 046021.
19. R Arias, G Di Giulio, E Keski-Vakkuri & E Tonni, *JHEP* **03** (2023) 175.
20. M R Mohammadi Mozaffar, *J. High Energy Phys.* **09** (2024) 068.
21. S Khoshdooni, et. al., *PRD* **112** (2025) 026027.
22. M R Mohammadi Mozaffar & A Mollabashi, *JHEP* **07** (2026) 234.
23. V Eisler & I Peschel, *J. Phys. A* **42** (2009) 504003.
24. S Murciano, et. al., *SciPost Phys.* **8** (2020) 046.