مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲، شمارهٔ ۳، تابستان ۱۳۷۹

نوسانات آزاد زمین

یوسفعلی عابدینی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، گاوه زنگ، زنجان

و

گروه فیزیک، دانشگاه زنجان

(دریافت مقاله: ۷۸/۷/۱۸ پذیرش مقاله: ۷۸/۹/۴)

چکیده

در این بررسی نوسانات آزاد زمین واقعی به عنوان یک جرم کروی خودگرانننده و دارای قسمتهای جامد و مایع بررسی شده است. با در نظر گرفتن تقارن کروی و همسانگردی زمین و استفاده از داده‌های واقعی، وجوه مختلف نوسانی آن محاسبه شده است. بسامدها و دوره‌های تناوب این وجوه با مقادیر اندازه‌گیری شده همخوانی دارد.

واژه‌های کلیدی: نوسانات آزاد، زمین، وجوه نوسانی

۱. مقدمه

نوسان یک کره جامد کشسان اولین بار به وسیله پواسون در ۱۸۲۹ مورد بررسی قرار گرفت. لامب در ۱۸۸۲ وجوه ساده‌تری از نوسان یک کره همگن را مورد بحث قرار داد و بسامدهای اساسی معادله نوسان را محاسبه کرد. او انواع نوسانات کره را به دو کلاس ۱ و ۲ طبقه‌بندی کرد که در اولی مؤلفه شعاعی جابه‌جایی و در دومی مؤلفه شعاعی تاو جابه جایی صفر می‌باشند.

لاو نظریه نوسانات آزاد یک کره خودگرانـنده یکـنواخت و قابل تراکم را در سال ۱۹۱۱ ارائه نمود و پیش‌بینی کرد که یک کره فولادی هم اندازه زمین دوره تناوبی در حدود یک ساعت خواهد داشت [۳].

در سال ۱۹۴۱ کاولینگ [۱] نوسانات اجرام سمای سیال را به دو گروه وجوه صوتی (p) و گرانشی (g) طبقه‌بندی کرد. این طبقه‌بندی به اعتبار وجود دو نوع نیرو در سیالات است (ثبوتی ۱۹۸۱) [۲]. وجوه صوتی عمدتاً ناشی از اغتشاش در فشار و وجوه گرانشی عمدتاً ناشی از اغتشاش در چگالی و نیروهای غوطه‌وری می‌باشد. بالاخره یکی از پیشرفتهای بزرگ فیزیک زمین جامد، یافته بنیوف (۱۹۵۴) در زمین لرزه ۱۹۵۲ کامچاتکا بود که در آن نوسانی با دوره ۵۷ دقیقه مشاهده کرد و آن را نوسان آزاد زمین دانست [۳و۴].

در این مقاله، به دنبال مقاله ثبوتی [۱۲] که در آن رهیافت ریاضی نوسانات آزاد اجرام زمین گونه مورد تحلیل قرار گرفته است، نوسانات آزاد زمین واقعی را در یک مدل کروی متقارن،

ناچرخنده، کشسان و ایزوتروپ (مدل SNREI بولن ۱۹۶۸ [۶]) مطالعه می‌کنیم. روش مورد استفاده، روشی است که ثبوتی [۲، ۵ و ۷] در مورد نوسانات ستارگان به کار برده است. داده‌های گیلبرت و زیوانسکی (۱۹۷۰) [۳] از ساختار درون زمین در این محاسبات عددی مورد استفاده قرار گرفته است.

۲. معادله حالت زمین

با استفاده از نظریه تغییر شکلهای کوچک (مورناقان ۱۹۵۱ و بیرچ ۱۹۵۲ [۱۱]) می‌توان معادله حالت مناسبی برای زمین یافت. یک جسم ایزوتروپ تحت فشار هیدرواستاتیک را در نظر می‌گیریم، تانسور تغییر شکل اولری در این حالت برای جابه‌جایی کوچک u به صورت زیر است،

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\frac{\partial u_k}{\partial x^j}\right] \qquad (۱)$$

که در آن، از جملات درجه دو به بالا صرف نظر شده است. با فرض همسانگردی ماده می‌توان نشان داد که ماتریس تغییر شکل قطری و به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij} \qquad (۲)$$

که در آن، ε تغییر شکل هیدرواستاتیک است و برحسب چگالی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \qquad (۳)$$

از طرفی رابطه بین انرژی آزاد F و تغییر شکل ε را می‌توان به صورت سری توانی زیر در نظر گرفت

$$F = \sum a_n \varepsilon^n \,,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (۴)$$

فشار با مشتق‌گیری از سری فوق نسبت به حجم (متناسب با معکوس چگالی) به دست می‌آید. با احتساب تنها دو جمله از سری فوق خواهیم داشت

$$P = \frac{3}{2}K_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^a - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^b\right] \qquad (۵)$$

که در آن، a=۷/۳ و b=۵/۳، K_0 و ρ_0 به ترتیب ثابت مدولینگ و چگالی در سطح زمین است. بنابراین رابطه (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$P^{-1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^a - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^b\right] = \text{ثابت} \qquad (۶)$$

۳. معادلات حرکت

معادلات تعادل هیدرواستاتیک برای اجسام خودگرانده به صورت زیر می‌باشند:

$$\nabla P + \rho\nabla U = 0 \qquad (۷)$$

و

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho \qquad (۸)$$

که در آنها، ρ، P و U به ترتیب چگالی، فشار و پتانسیل گرانشی‌اند.

اگر جزء حجمی یک سیال از حالت تعادل خود به اندازهٔ بردار کوچک $\xi(r)e^{-i\omega t}$ جابه‌جا شود، در هر نقطه r تغییرات اولری δP، $\delta\rho$ و δU به وجود خواهد آمد. صورت خطی معادله حرکت برای ξ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = w\xi = \nabla\delta P + \delta\rho\nabla U + \rho\nabla\delta U - \nabla\cdot\left(2\mu e - \frac{2}{3}\mu\,\nabla\cdot\xi I\right) \qquad (۹)$$

که در آن، I تانسور واحد و e تانسور تغییر شکل با مؤلفه‌های دکارتی زیراند،

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial\xi_j}{\partial x^i}\right)$$

و در آن، $\mu=\mu(r)$ ضریب سختی ماده تشکیل دهنده زمین است. $\delta\rho$ از معادلهٔ پیوستگی نتیجه می‌شود،

$$\delta\rho = -\nabla\cdot(\rho\xi) \qquad (۱۰)$$

تغییرات در پتانسیل گرانشی از معادله پواسون به دست می‌آید،

$$\nabla^2\delta U = -4\pi G\delta\rho \qquad (۱۱)$$

تغییرات اولری فشار نیز با در نظر گرفتن معادله (۶) و با فرض اینکه جابه‌جایی لاگرانژی جزء کوچک به صورت بی دررو انجام می‌شود، به صورت زیر خواهد شد

$$\delta P = -\xi\cdot\nabla P - \gamma P\nabla\cdot\xi \qquad (۱۲)$$

که در آن γ نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژی در حجم ثابت برای زمین، به صورت زیر داده می‌شود:

$$\gamma = \left[a\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^a - b\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^b\right] \Big/ \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^a - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^b\right] \qquad (۱۳)$$

با توجه به معادلات (۱۰) تا (۱۲) معادله (۹) یک معادله خطی

برای بردار ξ است و عملگر w که توسط همین معادلات تعریف می‌شود هرمیتی است. بنابراین معادله (۹) دارای وجوه نوسانی به صورت $\xi^i(x)e^{-i\omega^i t}$ خواهد بود که در معادله زیر صدق می‌کنند

$$w\xi^i = \omega^{i\,2} \rho\, \xi^i \qquad (۱۴)$$

و i یک عدد صحیح است که وجه نوسانی مورد نظر را مشخص می‌کند.

به اعتبار هرمیتی بودن عملگر w مقادیر ویژه $\omega^{i\,2}$ حقیقی‌اند و بردارهای ویژه ξ^i در فضای هیلبرت جابه‌جاییهای خطی زمین بوده، که یک مجموعه کامل و متعامد را تشکیل می‌دهند. حاصل ضرب داخلی در این فضا به اعتبار حضور ρ در معادله (۱۴) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\zeta,\rho\eta) = \int \rho\, \zeta^* .\eta\, d^3 r \qquad (۱۵)$$

که در آن، ζ و η دو جابه‌جایی دلخواه است و انتگرال روی حجم زمین گرفته می‌شود.

۴. روش حل

اگر $\{\zeta^i\}$ یک مجموعه از بردارهای پایه برای فضای هیلبرت باشد، آنگاه بردار ξ^i را می‌توان برحسب آنها بسط داد

$$\xi^i = \zeta^j z^{ji} \qquad (۱۶)$$

که در آن z^{ji} ضرایب بسط هستند و به عنوان پارامترهای وردشی در حساب تغییرات به روش ریلی - ریتز بکار خواهند رفت. معادله (۱۴) را برای بردار ویژه ξ^i پس از ضرب در ζ^j و انتگرال‌گیری روی حجم زمین می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۲ و ۵]

$$\left(\zeta^j, w\zeta^k\right) z^{ki} = \left(\zeta^j, \rho\, \zeta^k\right) z^{ki}\varepsilon^i \,,\ \varepsilon^i = \omega^{i\,2} \qquad (۱۷)$$

یا به صورت ماتریسی

$$WZ = SZE \qquad (۱۸)$$

که E ماتریس قطری مقادیر ویژه است و عناصر ماتریسهای W و S عبارتند از

$$W^{jk} = \int \zeta^{j*} .w\zeta^k\, d^3 r\,, (j,k = 1, 2, 3,...) \qquad (۱۹.\text{الف})$$

$$S^{jk} = \int \rho\zeta^{j*} .\zeta^k\, d^3 r\,, (j,k = 1, 2, 3,...) \qquad (۱۹.\text{ب})$$

منظور از حل معادله (۱۸) قطری کردن همزمان W و S به شرح زیر و یافتن ماتریسهای E و Z است

$$Z^+ SZ = I \qquad (۲۰.\text{الف})$$

$$Z^+ WZ = E \qquad (۲۰.\text{ب})$$

که در آن، I ماتریس واحد است.

با استفاده از قضیه هلمهولتز، همراه با تبدیل پیمانه‌ای ثبوتی [۳]، هر بردار ζ را می‌توان به مؤلفه‌های سیملوله‌ای و غیرچرخشی به صورت زیر تجزیه کرد،

$$\zeta = \zeta_p + \zeta_g + \zeta_t \qquad (۲۱)$$

که در آن،

$$\zeta_p = -\nabla\phi_p \qquad (۲۲)$$

$$\rho\, \zeta_g = \nabla\times A_g = \nabla\times\nabla\times(\hat{r}\phi_g) \qquad (۲۳)$$

$$\rho\, \zeta_t = \nabla\times A_t = \nabla\times\nabla\times\nabla\times(\hat{r}\phi_t) \qquad (۲۴)$$

در روابط فوق $\hat{r}$ بردار واحد در امتداد شعاع و ϕ_p، ϕ_g و ϕ_t توابع نرده‌ای از مختصات کروی (r,θ,φ) هستند. بستگیهای زاویه‌ای هر کدام را به صورت هماهنگهای کروی $Y_l^m(\theta,\phi)$ و بستگی شعاعی آنها را به صورت چندجمله‌ایهای r انتخاب خواهیم کرد.

مؤلفه‌های شعاعی بردارهای ζ_p و ζ_g و واگرایی آنها باید در مرز معین باشند،

$$\zeta_a.\hat{n}\ (\text{سطح}) = \text{متناهی و}\ a = P,g \qquad (۲۵.\text{الف})$$

$$\nabla.\zeta_a\ (\text{سطح}) = \text{متناهی و}\ a = P,g \qquad (۲۵.\text{ب})$$

که $\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح است.

مؤلفهٔ شعاعی بردار ζ_t و واگرایی آن در مرز صفر است ولی تاو آن (نیروهای برشی) در مز متناهی است،

$$\nabla\times\zeta_t\ (\text{سطح}) = \text{متناهی} \qquad (۲۶)$$

شرایط یاد شده منجر به شرایط مرزی زیر روی ϕ_p، ϕ_g و ϕ_t می‌شوند

$$\phi_p\ (\text{سطح}) = \text{معین} \qquad (۲۷.\text{الف})$$

$$\phi_g\ (\text{سطح}) = 0 \qquad (۲۷.\text{ب})$$

$$\phi_t\ (\text{سطح}) = 0 \qquad (۲۷.\text{ج})$$

در اینجا با توجه به شرایط مرزی (۲۷.الف، ب و ج) توابع نرده‌ای به صورت زیر انتخاب شده‌اند [۷ و ۱۲]،

$$\phi_p^j = r^{(l+2j)}, j = 0, 1, 2,... \qquad (۲۸.\text{الف})$$

$$\phi_g^j = Pr^{(l+2j+1)}, j = 0, 1, 2,... \qquad (۲۸.\text{ب})$$

$$\phi_t^j = \rho r^{(l+2j+1)}, j = 0, 1, 2,... \qquad (۲۸.\text{ج})$$

مجموعه بردارهای پایه به سه دسته $\{\zeta_p^j\}$، $\{\zeta_g^j\}$ و $\{\zeta_t^j\}$ تقسیم شده است. پس ماتریس M به بلوکهای pp، pg، pt و غیره به صورت زیر

$$M=\begin{bmatrix} M_{pp}M_{pg}M_{pt} \\ M_{gp}M_{gg}M_{gt} \\ M_{tp}M_{tg}M_{tt} \end{bmatrix} \quad M=W,S,Z,E \tag{۲۹}$$

و ماتریس S به بلوکهای قطری pp، gg و tt، به صورت زیر

$$S=\begin{bmatrix} S_{pp} & 0 & 0 \\ 0 & S_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & S_{tt} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

تقسیم می‌شوند. که در آن ماتریس S به دلیل تعامد بردارهای پایه شامل بلوکهای غیرقطری نیست.

اعضای هر بلوک S، با توجه به معادله‌های (۱۶) تا (۱۹) و (۲۲) تا (۲۴) به صورت زیراند

$$S^{ij}_{pp}=\int \rho \left[\phi_p^{i'}\phi_p^{j'}+\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_p^i\phi_p^j\right] r^2\,dr \tag{۳۱.الف}$$

$$S^{ij}_{gg}=l\,(l+1)\int \frac{1}{\rho}\left[\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_g^i\phi_g^j+\phi_g^{i'}\phi_g^{j'}\right] dr\,, \tag{۳۱.ب}$$

$$S^{ij}_{tt}=l(l+1)\int \rho\,\phi_t^i\phi_t^j\,dr \tag{۳۱.ج}$$

ماتریس W به صورت زیر است

$$W=\begin{bmatrix} W_{pp} & W_{pg} & 0 \\ W_{gp} & W_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & W_{tt} \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

که در آن اعضای ماتریس هر بلوک، با توجه به معادله‌های (۱۶) تا (۱۹) و (۲۲) تا (۲۴) به صورت زیراند،

$$\begin{aligned} W^{ij}_{pp}=&\int \rho\frac{dp}{d\rho}\left[\phi_p^{i''}+\left(\frac{2}{r}+\frac{\rho'}{\rho}\right)\phi_p^{i'}-\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_p^i\right] \\ &\left[\phi_p^{j''}+\left(\frac{2}{r}+\frac{\rho'}{\rho}\right)\phi_p^{j'}-\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_p^j\right] r^2\,dr \\ &+\int\left(\gamma-\frac{\rho}{p}\frac{dp}{d\rho}+\frac{4}{3}\beta\right) p\left[\phi_p^{i''}+\frac{2}{r}\phi_p^{i'}-\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_p^i\right] \\ &\left[\phi_p^{j''}+\frac{2}{r}\phi_p^{j'}-\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_p^j\right] r^2\,dr \\ &-4\pi G\int \rho\, Y_p^i Y_p^j\,dr, \end{aligned} \tag{۳۳.الف}$$

که در آن

$$Y_p^i=-\rho\phi_p^{i'}r+r^l\int_r^R \rho\left[\frac{(l+1)}{r}\phi_p^{i'}-\frac{(l+1)}{r^2}\phi_p^i\right] r^{-l+1}\,dr$$

و

$$\begin{aligned} W^{ij}_{gp}=W^{ij}_{pg}=&\,l(l+1) \\ &\int\left(\gamma-\frac{\rho}{P}\frac{dp}{d\rho}+\frac{4}{3}\beta\right)\frac{p\rho'}{\rho^2}\left[\phi_p^{i''}\right. \\ &\left.+\frac{2}{r}\phi_p^{i'}-\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_p^i\right]\phi_g^j\,dr, \end{aligned} \tag{۳۳.ب}$$

و

$$\begin{aligned} W^{ij}_{gg}=&\,l^2(l+1)^2\int\left(\gamma-\frac{\rho}{P}\frac{dp}{d\rho}+\frac{4}{3}\beta\right)\frac{p\rho'^2}{\rho^4}\phi_g^i\phi_g^j\frac{dr}{r^2} \\ &+\frac{1}{2}l(l+1)\int \beta\frac{P\rho'^2}{\rho^4}\phi_g^{i'}\phi_g^{j'}\,dr \end{aligned} \tag{۳۳.ج}$$

$$\begin{aligned} W^{ij}_{tt}=&\,\frac{1}{2}l(l+1)\int \beta P\left[l(l+1)\phi_t^i\phi_t^j\right. \\ &\left.+r^2\phi_t^{i'}\phi_t^{j'}\right] dr \end{aligned} \tag{۳۳.د}$$

به سبب وجود بلوکهای W_{pg} و W_{gp} وجوه نوسانی دیگر ترکیبی از ζ_p و ζ_g خواهند بود. بنابراین ساختار ماتریس Z نیز، که بردارهای ξ^i را برحسب پایه‌های $\{\zeta_a^j\}$ می‌دهد مشابه W خواهد بود

$$Z=\begin{bmatrix} Z_{pp} & Z_{pg} & 0 \\ Z_{gp} & Z_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{tt} \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

ماتریس E و هر یک از بلوکهای آن نیز بنابه تعریف قطری است

$$E=\begin{bmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & E_g & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{bmatrix} \tag{۳۵}$$

بعد از یافتن Z سه دسته جواب به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\xi_p^i=\zeta_p^i z_{pp}^{ji}+\zeta_g^j z_{gp}^{ji} \tag{۳۶.الف}$$

$$\xi_g^i=\zeta_p^j z_{pg}^{ji}+\zeta_g^j z_{gg}^{ji} \tag{۳۶.ب}$$

$$\xi_t^i=\zeta_t^j z_{tt}^{ji} \tag{۳۶.ج}$$

که در معادله (۳۶.الف) جمله اول و در (۳۶.ب) جمله دوم

جدول ۱. مقادیر ویژه $(\omega^2)^*$ وجوه صوتی $_nP_l$ ($n=0,...,4$ و $l=2$). در این جدول نتایج تا مرتبه پنجم جهت مشاهده همگرایی جوابها آورده شده‌اند. همان طوری که ملاحظه می‌شود برای وجه اول آن تا چهار رقم، وجه دوم تا سه رقم و برای وجه سوم تا دو رقم همگرایی دیده می‌شود در حالی که برای وجوه چهارم و پنجم آن همگرایی دیده نمی‌شود. بنابراین مقادیر مربوط به وجوه چهارم و پنجم از اعتبار کمتری برخوردارند.

$_0P_2$	$_1P_2$	$_2P_2$	$_3P_2$	$_4P_2$
۰/۴۴۷۰۵×۱۰^{۲}				
۰/۴۴۴۴۲×۱۰^{۲}	۰/۸۱۱۴۰×۱۰^{۲}			
۰/۴۴۲۸۷×۱۰^{۲}	۰/۷۷۶۵۸×۱۰^{۲}	۰/۱۹۹۵۲×۱۰^{۳}		
۰/۴۴۲۰۴×۱۰^{۲}	۰/۷۷۳۲۶×۱۰^{۲}	۰/۱۷۲۱۲×۱۰^{۳}	۰/۳۶۱۰۸×۱۰^{۳}	
۰/۴۴۲۰۳×۱۰^{۲}	۰/۷۷۳۱۱×۱۰^{۲}	۰/۱۷۱۹۸×۱۰^{۳}	۰/۲۹۹۰۵×۱۰^{۳}	۰/۹۳۵۴۵×۱۰^{۴}

* مقادیر برحسب $\omega_j^2=\frac{P_0}{\rho_0 R^2}$ هستند که در آن P_0 و ρ_0 به ترتیب فشار و چگالی در مرکز زمین و R شعاع آن می‌باشند.

جدول ۲. مقادیر ویژه $(\omega^2)^*$ وجوه صوتی $_ng_l$ ($n=0,...,4$ و $l=2$). در این جدول نتایج تا مرتبه پنجم جهت مشاهده همگرایی جوابها آورده شده‌اند. همان طوری که ملاحظه می‌شود برای وجه اول آن تا دو رقم، وجوه دوم، سوم و چهارم تا یک رقم همگرایی دیده می‌شود در حالی که برای وجوه پنجم آن همگرایی دیده نمی‌شود. بنابراین مقادیر مربوط به وجه پنجم از اعتبار کمتری برخوردارند.

$_0g_2$	$_1g_2$	$_2g_2$	$_3g_2$	$_4g_2$
۰/۲۷۲۵۵×۱۰^{۲}				
۰/۳۰۹۶۶×۱۰^{۲}	۰/۱۸۳۸۳×۱۰^{۱}			
۰/۳۱۰۴۳×۱۰^{۲}	۰/۲۹۶۶۴×۱۰^{۱}	۰/۷۷۴۲۰×۱۰^{۰}		
۰/۳۸۱۱۸×۱۰^{۲}	۰/۴۲۵۶۵×۱۰^{۱}	۰/۹۳۹۸۳×۱۰^{۰}	۰/۲۲۲۴۱×۱۰^{۰}	
۰/۳۸۹۱۲×۱۰^{۲}	۰/۴۸۶۵۹×۱۰^{۱}	۰/۹۴۵۴۶×۱۰^{۰}	۰/۲۳۶۴۷×۱۰^{۰}	۰/۶۲۶۴۸×۱۰$^{-۱}$

* مقادیر برحسب $\omega_j^2=\frac{P_0}{\rho_0 R^2}$ هستند که در آن P_0 و ρ_0 به ترتیب فشار و چگالی در مرکز زمین و R شعاع آن می‌باشند.

جدول ۳. مقادیر ویژه $(\omega^2)^*$ وجوه چنبره‌ای $_nt_l$ ($n=0,...,4$ و $l=2$). در این جدول نتایج تا مرتبه پنجم جهت مشاهده همگرایی جوابها آورده شده‌اند. همان طوری که ملاحظه می‌شود برای وجه اول آن تا چهار رقم، وجه دوم تا دو رقم و برای وجه سوم تا یک رقم همگرایی دیده می‌شود در حالی که برای وجوه چهارم و پنجم آن همگرایی دیده نمی‌شود. بنابراین مقادیر مربوط به وجوه چهارم و پنجم از اعتبار کمتری برخوردارند.

$_0t_2$	$_1t_2$	$_2t_2$	$_3t_2$	$_4t_2$
۰/۱۸۲۴۸×۱۰^{۲}				
۰/۹۵۲۰۴×۱۰^{۱}	۰/۴۴۷۲۰×۱۰^{۲}			
۰/۸۴۱۷۸×۱۰^{۱}	۰/۱۷۶۳۸×۱۰^{۲}	۰/۹۲۳۹۱×۱۰^{۲}		
۰/۷۳۸۳۳×۱۰^{۱}	۰/۱۴۱۳۸×۱۰^{۲}	۰/۳۶۴۸۷×۱۰^{۲}	۰/۱۴۷۹۴×۱۰^{۳}	
۰/۷۳۸۳۲×۱۰^{۱}	۰/۱۴۰۷۱×۱۰^{۲}	۰/۳۲۳۹۴×۱۰^{۲}	۰/۶۸۱۵۸×۱۰^{۲}	۰/۲۴۳۶۰×۱۰^{۳}

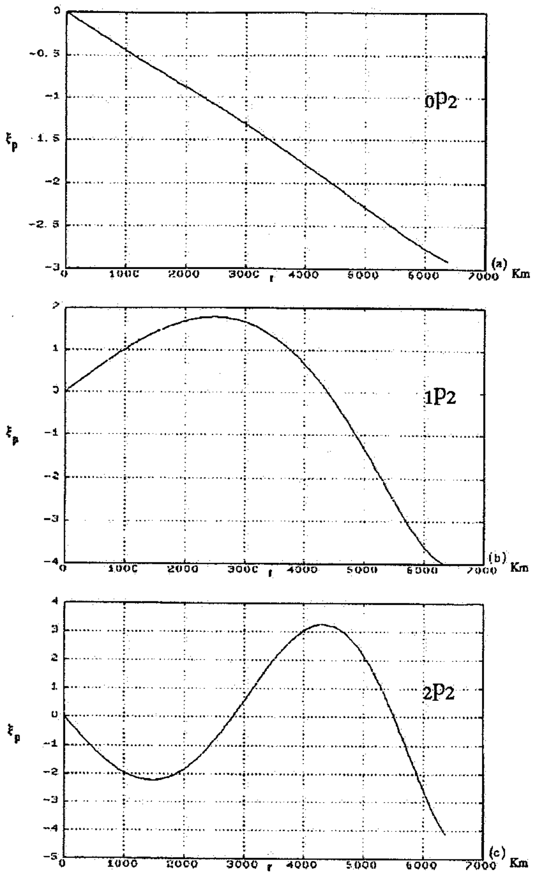
* مقادیر برحسب $\omega_j^2=\frac{P_0}{\rho_0 R^2}$ هستند که در آن P_0 و ρ_0 به ترتیب فشار و چگالی در مرکز زمین و R شعاع آن می‌باشند.

غالب خواهد بود و به این اعتبار ξ_pها وجوه نوسانی p و ξ_gها وجوه نوسانی g نامیده خواهند شد. همچنین ξ_tها وجوه نوسانی t نامیده خواهند شد. این نامگذاری به خاطر چهار نیروی موجود در معادله حرکت یعنی نیروی ناشی از δP، نیروی ناشی از $\delta\rho$ و گرانش و نیروی برشی متناسب با μ در لایه جامد انجام گرفته است.

بردارهای ξ_p بیشتر اختلالات صوتی و ξ_g بیشتر از نوع حرکات همرفتی هستند. بردارهای ξ_t هم حرکات برشی را که در قسمت جامد زمین دیده می‌شوند، نشان می‌دهند. جابه‌جاییهای نوع p و g با همدیگر جفت می‌شوند. وجوه نوسانی t ناشی از یک پتانسیل برداری و از نوع حرکات چنبره‌ای‌اند. در غیاب نیروهای برشی این وجوه خنثی و تبهگن‌اند، یعنی بسامد این حرکات صفر است. تبهگنی وجوه t با حضور نیروهای برشی از بین می‌رود. ماهیت این جابه‌جاییها چنبره‌ای خالص بود و با جابه‌جاییهای نوع p و g جفت نمی‌شوند.

۵. نتایج محاسبات عددی

محاسبات عددی برای زمین واقعی با روشی که در بند ۴ گفته شد و با استفاده از داده‌های گیلبرت و زیوانسکی انجام گرفته است. نتایج مربوط به مقادیر ویژه (ω^2) برای وجوه p، g و t (l=۲) و وجوه شعاعی (l=۰) به ترتیب در جدولهای ۱، ۲، ۳ و ۴ آورده شده‌اند. در این جدولها مقادیر ω^2 برحسب $\frac{P_\circ}{\rho_\circ R^2}$ می‌باشند که در آن، $P_\circ$ و $\rho_\circ$ به ترتیب فشار و چگالی در مرکز زمین و R شعاع آن می‌باشد. برای نمایش وجوه مختلف از علامتهای $_nP_l$ برای وجوه p (صوتی)، $_ng_l$ برای وجوه g (گرانشی)، $_nt_l$ برای وجوه t (برشی) و $_nP_\circ$ برای وجوه شعاعی استفاده شده است. همان طور که در جداول فوق دیده می‌شود محاسبات دارای همگرایی خوبی‌اند. از روی جداول فوق دوره‌های تناوب مشاهده شده [۶] مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. همان طوری که دیده می‌شود وجوه مشاهده شده $_nS_l$ با دو نوع وجوه محاسبه‌ای ما $_nP_l$ و $_ng_l$ به ترتیبی که در جدول ۵ آمده



شکل ۱. تغییرات مؤلفه شعاعی بردار جابه‌جایی وجوه p برحسب فاصله از مرکز زمین (الف) $_0P_2$، (ب) $_1P_2$ و (ج) $_2P_2$. در منحنیهای (الف)، (ب) و (ج) به ترتیب یک، دو و سه شکم وجود دارد در هر سه منحنی مرکز گره و سطح زمین شکم است.

همخوانی دارد. حداکثر دوره تناوب مشاهده شده در زلزله بزرگ چایلن (بنیوف و دیگران [۶] مربوط به $_0S_2$، برابر ۳۲۳۱/۷۵ ثانیه است که با $_1g_2$ یعنی مقدار محاسبه شده ۳۴۰۲/۷۴ ثانیه مطابقت دارد. برای مراتب بالاتر محاسبه‌ای $_3g_2$ و غیره دوره تناوبی مشاهده نشده است، زیرا مشاهده و اندازه‌گیری وجوه گرانشی مشکل است.

دوره‌های تناوبی که بای وجوه $_0p_2$ و $_0g_2$ به دست آمده به ترتیب برابر با ۱۱۲۹/۰۱ و ۱۲۰۳/۲۹ ثانیه است در حالی که مقادیر مشاهده شده نظیر آنها به ترتیب برابر ۱۰۴۸/۹۹ و ۱۲۰۳/۲۹ ثانیه می‌باشد [۴]. دوره تناوب برای وجه $_0t_2$ (از جدول (۳)) برابر ۲۷۶۰ ثانیه به دست می‌آید که مقدار مشاهده شده آن ۲۶۴۰/۶۳ ثانیه [۴] است.

بالاخره دوره تناوب برای وجه شعاعی $_0p_\circ$ از جدول ۴

جدول ۴. مقادیر ویژه (ω^{2})* وجوه شعاعی ${}_{n}p_{0}$ ($n=0,\dots,4$ و $l=0$). در این جدول نتایج تا مرتبه پنجم جهت مشاهده همگرایی جوابها آورده شده‌اند. همان طوری که ملاحظه می‌شود برای وجوه اول و دوم تا دو رقم، و برای وجه سوم تا یک رقم همگرایی دیده می‌شود در حالی که برای وجوه چهارم، پنجم و ششم آن همگرایی دیده نمی‌شود. بنابراین مقادیر مربوط به وجوه چهارم، پنجم و ششم از اعتبار کمتری برخوردارند.

${}_{0}p_{0}$	${}_{1}p_{0}$	${}_{2}p_{0}$	${}_{3}p_{0}$	${}_{4}p_{0}$	${}_{5}p_{0}$
۰/۴۷۱۳۷×۱۰^{۲}					
۰/۴۴۱۳۵×۱۰^{۲}	۰/۲۲۵۵۳×۱۰^{۳}				
۰/۳۹۵۴۷×۱۰^{۲}	۰/۲۱۳۲۶×۱۰^{۳}	۰/۴۳۸۶۱×۱۰^{۳}			
۰/۳۴۸۳۴×۱۰^{۲}	۰/۲۰۹۳۳×۱۰^{۳}	۰/۲۷۴۲۳×۱۰^{۳}	۰/۱۰۲۹۱×۱۰^{۴}		
۰/۳۲۶۷۵×۱۰^{۲}	۰/۱۶۶۶۲×۱۰^{۳}	۰/۲۷۰۰۰×۱۰^{۳}	۰/۹۴۷۶۲×۱۰^{۳}	۰/۳۸۱۲۳×۱۰^{۵}	
۰/۳۲۴۷۷×۱۰^{۲}	۰/۱۶۰۹۳×۱۰^{۳}	۰/۲۵۲۰۲×۱۰^{۳}	۰/۵۹۴۸۷×۱۰^{۳}	۰/۱۵۳۰۱×۱۰^{۴}	۰/۴۵۱۴۱×۱۰^{۵}

* مقادیر برحسب $\omega_{j}^{2}=\dfrac{P_{0}}{\rho_{0}R^{2}}$ هستند که در آن P_{0} و ρ_{0} به ترتیب فشار و چگالی در مرکز زمین و R شعاع آن می‌باشند.

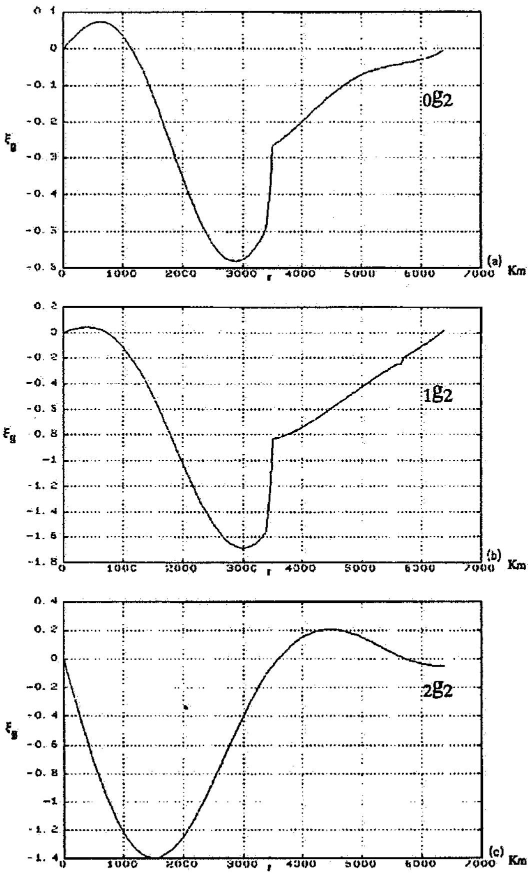
جدول ۵. مقادیر دوره‌های تناوب محاسبه شده و مشاهده‌ای برخی از وجوه نوسانات آزاد زمین. همان طوری که ملاحظه می‌شود وجوه گرانشی محاسبه شده ${}_{1}g_{2}$ و ${}_{0}g_{2}$ به ترتیب با وجوه کروی‌وار مشاهده شده ${}_{0}s_{2}$ و ${}_{1}s_{2}$، وجوه صوتی محاسبه شده ${}_{0}p_{2}$، ${}_{1}p_{2}$، ${}_{2}p_{2}$ و ${}_{3}p_{2}$ به ترتیب با وجوه کروی‌وار مشاهده شده ${}_{2}s_{2}$، ${}_{3}s_{2}$، ${}_{4}s_{2}$ و ${}_{5}s_{2}$ و بالاخره وجوه شعاعی محاسبه شده ${}_{0}p_{0}$ و ${}_{1}p_{0}$ نیز به ترتیب با وجوه شعاعی مشاهده شده ${}_{0}s_{0}$ و ${}_{1}s_{0}$ با دقت قابل قبولی همخوانی دارند.

مشاهده‌ای			محاسبه‌ای		
دوره تناوب (ثانیه)	نمایش وجه	نام وجه	دوره تناوب (ثانیه)	نمایش وجه	نام وجه
–	–	کروی وار	۷۷۱۹/۵۰	${}_{2}g_{2}$	گرانشی
۳۲۳۱/۷۵	${}_{0}s_{2}$	″	۳۴۰۲/۷۴	${}_{1}g_{2}$	″
۱۲۳۰/۰۷	${}_{1}s_{2}$	″	۱۲۰۳/۲۹	${}_{0}g_{2}$	″
۱۰۴۸/۹۹	${}_{2}s_{2}$	″	۱۱۲۹/۰۱	${}_{0}p_{2}$	صوتی
۸۵۱/۸۴	${}_{3}s_{2}$	″	۸۵۳/۱۲	${}_{1}p_{2}$	″
۵۸۰/۸۴	${}_{4}s_{2}$	″	۵۷۲/۳۶	${}_{2}p_{2}$	″
۴۷۷/۹۷	${}_{5}s_{2}$	″	۴۳۴/۰۵	${}_{3}p_{2}$	″
۱۲۲۷/۶۴	${}_{0}s_{0}$	شعاعی	۱۳۱۶/۶۴	${}_{0}p_{0}$	شعاعی
۶۱۳/۵۹	${}_{1}s_{0}$	″	۵۹۱/۵۶	${}_{1}p_{0}$	″

برابر ۱۳۱۳ ثانیه به دست می‌آید. مقدار مشاهده شده آن ۱۲۲۷/۶۵ ثانیه می‌باشد. چون دوره تناوب این وجه با دوره امواج طولی از نوع PKIKP مطابقت دارد یک روش تخمینی محاسبه دوره تناوب اولین مد وجوه شعاعی محاسبه زمان سیر امواج فوق است. این امواج از گوشته زمین وارد هسته بیرونی و سپس هسته درونی شده و مجدداً بعد از عبور از هسته درونی و بیرونی وارد گوشته می‌گردند. اگر فرض کنیم امواج به طور مستقیم قطر زمین را سیر می‌کنند می‌توان زمان سیر آنها را از رابطه زیر به دست آورد،

$$t_{pkikp}=2R/V_{p} \qquad (۳۷)$$

که در آن، R شعاع زمین و V_{p} سرعت متوسط امواج طولی در زمین و تقریباً برابر ۱۰ کیلومتر بر ثانیه است. این زمان ۱۲۸۰

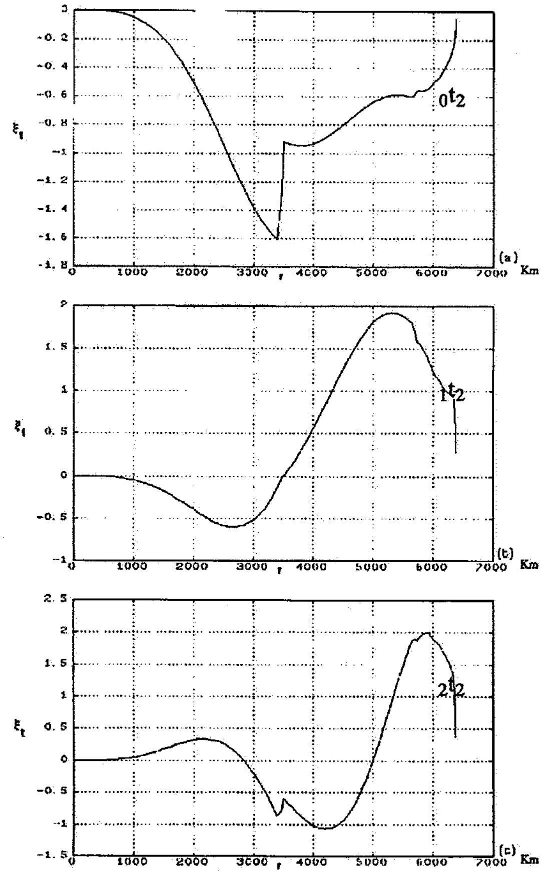


شکل ۲. تغییرات مؤلفه شعاعی بردار جابه‌جایی وجوه g برحسب فاصله از مرکز زمین (الف) ${}_0g_2$، (ب) ${}_1g_2$ و (ج) ${}_2g_2$. در منحنیهای (الف)، (ب) و (ج) به ترتیب دو، دو و سه شکم وجود دارد در هر سه منحنی مرکزگره و حداکثر جابه‌جایی در هسته بیرونی زمین است.

ثانیه است که با دوره تناوب وجه ${}_0p_2$ سازگار است. پس، مقادیر محاسبه شده برای دوره تناوب وجوه شعاعی در این بررسی با مقادیر مشاهده شده و تخمینی از رابطه اخیر همخوانی خوبی دارد. با مقایسه مقادیر محاسبه شده و مشاهده شده دوره تناوب هرکدام از وجوه خطای محاسبات حدود هفت درصد به دست می‌آید. این میزان خطا با توجه به تقریبهای ساده کننده مسئله، نظیر کروی بودن و دوران نکردن زمین و چشم‌پوشی از نیروهای اتلافی و غیره کاملاً قابل قبول است.

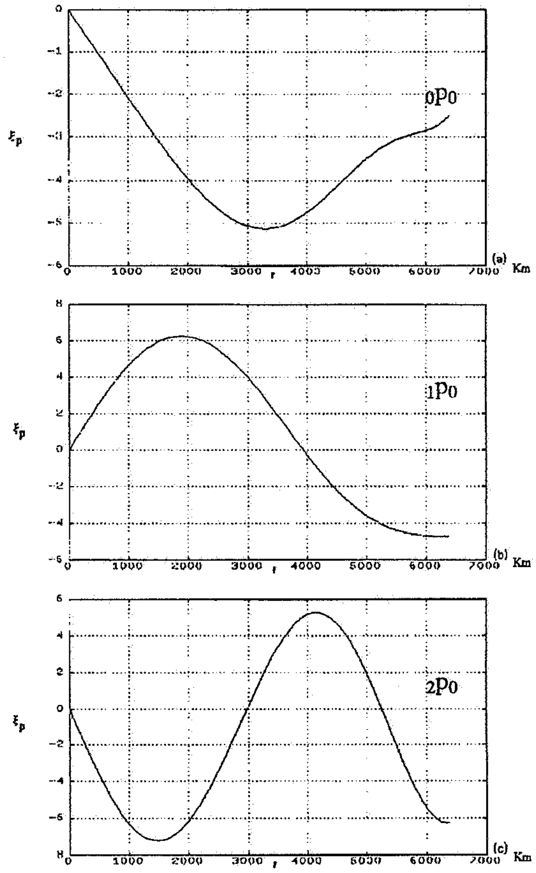
شکلهای ۱.الف، ب و ج و ۲.الف، ب و ج مربوط به تغییرات مؤلفه شعاعی توابع ویژه (جابه‌جایی) وجوه صوتی و گرانشی برحسب شعاع زمین می‌باشند. مطابق انتظار با افزایش شماره وجه n، تعداد شکمها و گره‌ها نیز افزایش می‌یابند.

شکل ۱.الف مربوط به وجه ${}_0p_2$ است و بردار جابه‌جایی



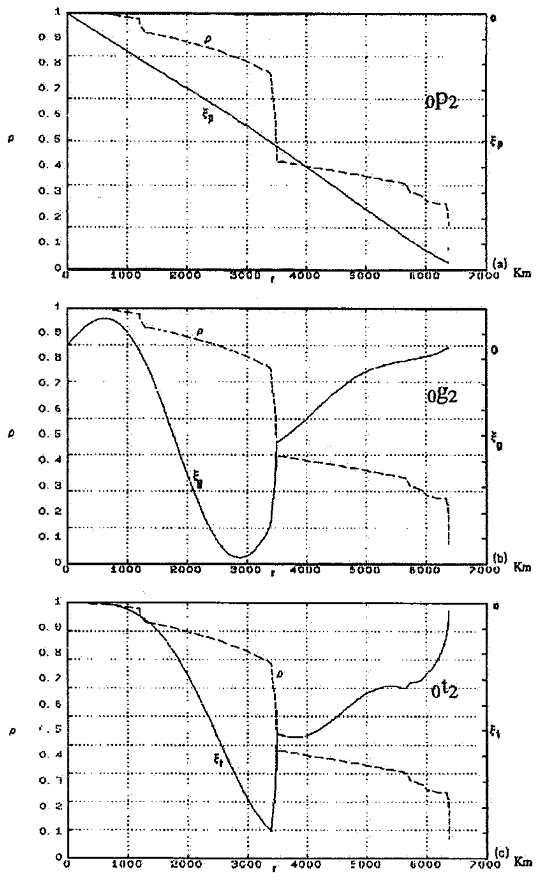
شکل ۳. تغییرات مؤلفه سطحی بردار جابه‌جایی وجوه t برحسب فاصله از مرکز زمین (الف) ${}_0t_2$، (ب) ${}_1t_2$ و (ج) ${}_2t_2$. در منحنیهای (الف)، (ب) و (ج) به ترتیب یک، دو و سه شکم وجود دارد در هر سه منحنی مرکزگره و سطح زمین شکم است.

مربوط به آن در هیچ نقطه به جز مرکز زمین صفر نیست. شکلهای ۱.ب و ۱.ج به ترتیب مربوط به تغییرات جابه‌جایی وجوه ${}_1p_2$ و ${}_2p_2$ و شکلهای ۲.الف، ۲.ب، ۱.ج و ۲.ج به ترتیب مربوط به تغییرات جابه‌جایی وجوه ${}_0g_2$، ${}_1g_2$ و ${}_2g_2$ برحسب شعاع زمین‌اند. جابه‌جایی بیشینه برای وجوه صوتی در نواحی نزدیک سطح زمین و برای وجوه گرانشی در هسته بیرونی است که مورد آخر با توجه به صفر بودن سختی μ در هسته بیرونی زمین منطقی به نظر می‌رسد. همچنین در منحنی جابه‌جاییها برای وجوه گرانشی $(\xi_g(r))$ یک ناپیوستگی شدید در مرز هسته بیرونی گوشته درونی، در شعاعی حدود ۳۴۸۵ کیلومتری از مرکز زمین و یک ناپیوستگی ملایم در مرز گوشته درونی - بیرونی در شعاعی حدود ۵۷۰۰ کیلومتری از مرکز زمین مشاهده می‌شود. ناپیوستگیهای فوق با ناپیوستگیهای موجود



شکل ۴. تغییرات بردار جابه‌جایی وجوه شعاعی برحسب فاصله از مرکز زمین (الف) $_0p_0$، (ب) $_1p_0$ و (ج) $_2p_0$. در منحنیهای (الف)، (ب) و (ج) به ترتیب یک، دو و سه شکم وجود دارد در هر سه منحنی مرکز گره و سطح زمین شکم است.

در تغییرات شعاعی پارامترهای مهم زمین یعنی سختی μ، ثابت مدولینگ K و به ویژه چگالی زمین ρ مطابقت داشته که به عنوان نمونه ناپیوستگیهای مزبور برای $\xi_g(r)$ و ρ در شکل ۵.ب قابل مقایسه‌اند. همچنان که از شکل ۵.الف پیداست برای وجوه صوتی ناپیوستگیها بارز نیستند، اما یک ویژگی عمومی که از مقایسه منحنی جابه‌جاییهای وجوه صوتی $\xi_p(r)$ برای nهای مختلف، با تغییرات چگالی و فشار زمین برحسب شعاع آن می‌توان نتیجه گرفت آن است که بیشینه جابه‌جایی در این وجوه با کمینه چگالی و فشار زمین در سطح آن مطابقت داشته، یعنی همواره یک شکم با بیشترین دامنه در نزدیکی سطح زمین دیده می‌شود. همچنین با توجه به شکلهای ۵.الف و ب می‌توان گفت که وجوه p مانند وجوه g تحت تأثیر تغییرات چگالی نیستند و به عبارت دیگر وجوه g تحت تغییرات چگالی از حساسیت



شکل ۵. مقایسه ناپیوستگیهای موجود در تغییرات چگالی زمین و تغییرات بردار جابه‌جایی وجوه p برحسب فاصله از مرکز زمین (الف) $_0p_2$، (ب) $_0g_2$ و (ج) $_0t_2$. همان طور که دیده می‌شود در منحنیهای (ب) و (ج) دیده می‌شود تغییرات بردار جابه‌جایی برای وجوه $_0g_2$ و $_0t_2$ نسبت به تغییرات چگالی حساسیت بالایی دارد در حالی که این حساسیت در منحنی (الف) برای وجوه $_0p_2$ وجود ندارد.

بیشتری برخوردارند.

شکلهای ۳.الف، ب و ج مربوط به تغییرات مؤلفه سطحی توابع ویژه جابه‌جاییها برای وجوه $_0t_2$، $_1t_2$ و $_2t_2$ است که باز هم تعداد شکمها و گره‌ها در وجوه مختلف با شماره هر وجه مطابقت دارد. شکل ۳.الف مربوط به جابه‌جایی $(\xi_t(r))$ وجه $_0t_2$ است که نشانگر یک چرخش متفاوت برای نیمکره شمالی و جنوبی نسبت به یکدیگر است. همچنانکه در شکل فوق دیده می‌شود یک ناپیوستگی شدید در مرز هسته بیرونی - گوشته درونی، در شعاعی حدود ۳۴۸۵کیلومتری از مرکز زمین و یک ناپیوستگی ملایم در مرز گوشته درونی - بیرونی در شعاعی حدود ۵۷۰۰کیلومتری از مرکز زمین وجود دارد، که با ناپیوستگیهای موجود در تغییرات شعاعی سختی μ ثابت

مدولینگ K و چگالی زمین ρ مطابقت دارند. ناپیوستگیهای مزبور برای $\xi_t(r)$ و ρ در شکل (۵.ج) قابل مقایسه‌اند. همان طوری که ملاحظه می‌شود دامنه جابه جاییها در محل ناپیوستگی شدید به طور ناگهانی به $\frac{2}{3}$ مقدار خود در بالای هسته بیرونی کاهش می‌یابد. با توجه به شکلهای ۳.ب و ج دیده می‌شود که ناپیوستگیهای فوق برای nهای بالا با شدت کمتری ظاهر می‌شوند و همچنین با افزایش شماره وجه (n) مقدار بیشینه جابه‌جایی وجوه برشی در گوشته و به سطح زمین نزدیکتر می‌شوند. شکلهای ۴.الف، ب و ج مربوط به تغییرات جابه‌جایی برای وجوه شعاعی ${}_0p_0$، ${}_1p_0$ و ${}_2p_0$ برحسب شعاع زمین‌اند که تعداد شکمها و گره‌ها با شماره هر وجه همخوانی دارد بنا به شواهد تجربی و نظری در این وجوه حرکات ذرات شعاعی خالص و همچنین دارای میرایی کمتری هستند. این خصلت باعث می‌شود که آنها در لرزه‌نگاشتهای طولانی دوره به دنبال زلزله‌های بزرگ مشاهده کرد. همچنانکه در شکلهای ۴.الف، ب و ج ملاحظه می‌شود بیشینه جابه‌جایی برای این وجوه همواره در هسته بیرونی، یعنی جایی که سختی زمین در آن لایه صفر است، دیده می‌شود.

مراجع

1. T G Cowling Roy. *Astro. soc, Monthly Notices*, **101**, 367, 1941.
2. Y Sobouti, *Astron. Astrophys.*, **100**, 319, 1981.
3. J A Jacobs, Deep Interior of the Earth, London, 1993.
4. G D Garland Introduction to Geophys. Second Ed., W.B. Sounders Company, Torento, 1976.
6. R Teisyre Gravity and Low Frequency Geodyn., PWN - Polish Scientific pub., Warzawa, 1989.
7. Y Sobouti, *Astron. Astrophys.*, **169**, 95, 1986.
8. A M Dziewonski, *E Nature*, **234** 463, 1971.
9. F A Dahlen, *Geophys. J. Int*, **111**, 11-31, 1992.
10. S Chandrasekhar, *stellar structure*, univ. Chicago. press, 1939.
11. P W Seers "An Introduction to Thermo-dynamics, the Kinetic Theory of Gases and statistical Mech"., *Weesly pub. comp.*, Reeding, 1953.

۱۲. ی ثبوتی، "نوسانات آزاد اجرام زمین گونه"، مجله پژوهش فیزیک ایران، شاره ۱، ۱۳۷۴.