

پاسخ ترازهای لاندائو به تغییر شار در ناخالصیهای ناهمسانگرد

سعیده رضائی ثانی، عبدالله مرتضی علی و محمدرضا سرکرده‌ای

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهراء، تهران

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۰/۲ ؛ دریافت نسخه‌نهایی: ۸۴/۱۱/۲۸)

چکیده

در این مقاله پاسخ زیرترازهای لاندائو نسبت به تغییر شار در ناخالصیهای ناهمسانگرد بررسی شده است. در حضور این ناخالصیهای، ترازهای لاندائو که به صورت تابع دلنا بوده‌اند، به دو دسته ترازهای گسترده و جایگزیده تبدیل شده و پله‌ها ایجاد می‌شود. مشاهده می‌شود اگر توزیع ناخالصی در جهت جریان، نسبت به جهت دیگر بیشتر باشد، در آن صورت ترازهای جایگزیده، نسبت به حالت توزیع همسانگرد، از مبدأ دورتر می‌شوند و پله‌ها به طور واضحتر دیده می‌شود. برای سیستمهایی با میزان ناخالصی زیاد برای مشاهده اثر هال، توزیع ناخالصی باید در جهت جریان و به صورت ناهمسانگرد باشد.

واژه‌های کلیدی: ترازهای لاندائو، توزیع ناهمسانگرد، پله‌ها، ترازهای گسترده و جایگزیده

۱. مقدمه

برای یک الکترون آزاد که در صفحه xy حرکت می‌کند، در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی عمود بر صفحه، هامیلتونی به شکل زیر را داریم:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} + \frac{e\vec{A}}{c} \right]^2,$$

برای چنین هامیلتونی، با استفاده از پیمانانه لاندائو معادله شرودینگر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eBx}{\hbar c} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi = E\psi,$$

این معادله جوابهای زیر را برای ϕ دربرخواهد داشت:

$$\phi_n(x) = \exp \left[-\frac{(x-X)^2}{2l^2} \right] H_n \left(\frac{(x-X)}{l} \right),$$

که در آن H_n چند جمله‌ای هرمیت و $X = K_x l^2$ است. این معادله، همان معادله نوسانگر هارمونیک است با این تفاوت که مرکز آن به اندازه X جابه‌جا شده است. بنابراین سطوح انرژی

آن، به نام ترازهای لاندائو، شکل زیر را دارد:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c,$$

در حالت ایده‌آل ترازهای لاندائو به صورت تابع δ می‌باشند و نسبت به x, y متقارن و دارای تبهگنی هستند. با اعمال ناخالصی، این تبهگنیها شکسته و ترازها پهن می‌شوند. با افزودن میدان الکتریکی در راستای x ، در چارچوبی که با سرعت سوق حرکت می‌کند، میدان الکتریکی در راستای y احساس نخواهد شد، در این حالت هامیلتونی لازم برای معادله شرودینگر به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$H = H_0 + eEx.$$

اگر از یکای مغناطیسی استفاده شود، که در آن واحد زمان ω^{-1} ، واحد طول l ، واحد جرم m و واحد کنش \hbar است و همچنین با توجه به تعریف سرعت سوق $u = \frac{cE_x}{B}$ و $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ هامیلتونی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$H = H_0 + ux,$$

۲. پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار

می‌دانیم یک سیستم، در حضور میدان مغناطیسی خارجی و میدان الکتریکی در جهت محور x دارای هامیلتونی به شکل زیر می‌باشد:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{P} + \frac{e\vec{A}}{c} \right]^2 + eEx, \quad (1)$$

در صورت استفاده از پیمانانه لاندائو به صورت $A_x = 0$ و $A_y = -Bx$ برای معادله (۱) می‌توان جوابها را به صورت زیر نوشت:

$$\psi_{nk} = \pi^{-\frac{1}{2}} L_y^{-\frac{1}{2}} \exp(iky) \phi_n(x-X), \quad (2)$$

که ϕ_n ، n امین تابع نوسانگر هارمونیک است، $X = kl^2$ و طول مغناطیسی به صورت $l = \left(\frac{\hbar c}{eB} \right)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. انرژی این ویژه حالتها به شکل زیر است:

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega + eEX, \quad (3)$$

اگر در یکای مغناطیسی کار کنیم، در آن صورت $\hbar\omega = 1$ و با فرض $u = \frac{cE_x}{B}$ رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2} \right) + uX. \quad (4)$$

تغییر شار، تابع موج را به شکل زیر تغییر می‌دهد:

$$\psi \rightarrow \psi \exp\left(i\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right), \quad \phi_0 = \frac{hc}{e},$$

با این تغییر شار، معادله (۲) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\psi'_{nX} = \pi^{-\frac{1}{2}} L_y^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i}{l^2} \left(Xy + \pi l^2 \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right) \phi_n(x-X),$$

می‌توان معادله (۴) را که ویژه مقادیر حالت بدون ناخالصی است، با تغییر شار به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2} \right) + u \left(X + \frac{\phi}{\phi_0} \Delta X \right), \quad (5)$$

بنابراین در حالت بدون ناخالصی، ماتریس هامیلتونی قطری H را خواهیم داشت که عناصر روی قطر آن از معادله (۵) به دست

هامیلتونی جدید دارای ویژه مقادیری به شکل زیر هستند:

$$E_n = n + \frac{1}{2} + uX.$$

پرانج^۱ [۱] با افزودن یک ناخالصی به صورت تابع دلتا، این سیستم را مورد بررسی قرار داد. اگر پتانسیل اعمال شده به صورت زیر باشد:

$$V_I = \lambda \delta(x-x_0) \delta(y-y_0),$$

در نتیجه هامیلتونی جدید به شکل $H' = H + V_I$ نوشته می‌شود. می‌توان تابع دلتا را بر حسب ویژه توابع یک عملگر به صورت زیر بسط داد:

$$\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) = \sum_{n,k} \psi_{nk}(x,y) \psi_{nk}^*(x_0,y_0),$$

$$H' - H = V_I = \lambda \sum_{n,k} \psi_{nk}(x,y).$$

با فرض این که ψ_α ویژه توابع تابع H باشد و با توجه به این که $H' \psi_\alpha = E_\alpha \psi_\alpha$:

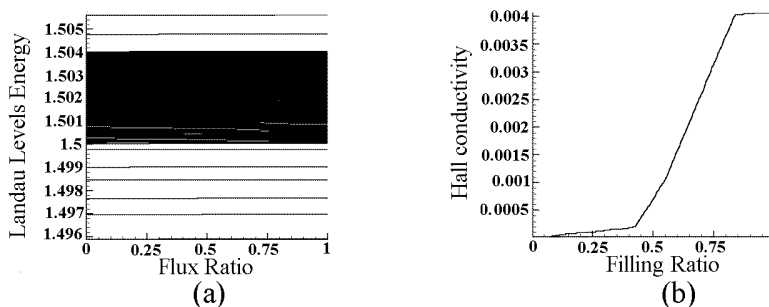
$$\psi_\alpha = \frac{\lambda}{(E_\alpha - H)} \sum_{n,k} \psi_{nk}(x,y) \psi_{nk}^*(x_0,y_0) \psi_\alpha,$$

$$\sum_{n,k} \frac{\lambda \psi_{nk}(x,y) \psi_{nk}^*(x_0,y_0)}{E_\alpha - E_{nk}} = 1.$$

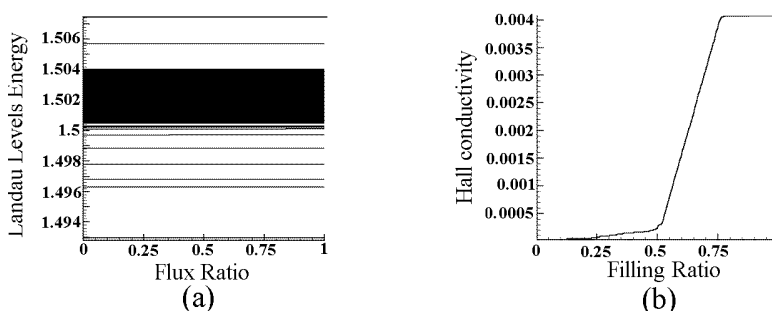
رابطه بالا به ازای هر x, y از جمله به ازای $x = x_0$ و $y = y_0$ برقرار است بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n,k} \frac{\lambda |\psi_{n,k}(x_0, y_0)|^2}{E_\alpha - E_{nk}} = 1,$$

مشاهده می‌کنیم که با انتخاب هر E_α که مقدارش بین دو تراز E_{nk} قرار گیرد رابطه فوق برقرار می‌شود. با نزدیک شدن E_α به یکی از مقدارهای E_{nk} ، جمع بالا به اعداد بسیار بزرگی خواهد انجامید و دیگر برابر عدد یک نمی‌شود. تمام سطوح انرژی E_α که نزدیک به تراز E_{nk} قرار داشته باشند حالت‌های گسترده را به وجود می‌آورند که حامل جریان هستند و بیشتر در قسمت مرکزی دیده می‌شوند. همچنین یک سری ترازهای جایگزیده در قسمتهای دورتر پراکنده می‌باشند که جریانی حمل نمی‌کنند و باعث جابه‌جایی انرژی نمی‌شوند [۲].



شکل ۱. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی همسانگرد با $N = 100$ ، (b) نمایش پله هال.



شکل ۲. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد و توزیع بیشتر در جهت y با $N = 100$ ، (b) نمایش پله هال.

۳. پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با اعمال توزیع ناخالصی ناهمسانگرد

همان طور که قبلاً گفته شد، در حالت بدون ناخالصی، عناصر روی قطر ماتریس قطری H را می توان به شکل زیر نشان داد:

$$E_{ii} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) + 10^{-4} \left(i \Delta X + \frac{\phi}{\phi} \Delta X \right),$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 256$$

با اعمال N ناخالصی با پتانسیلهایی به شکل زیر داریم:

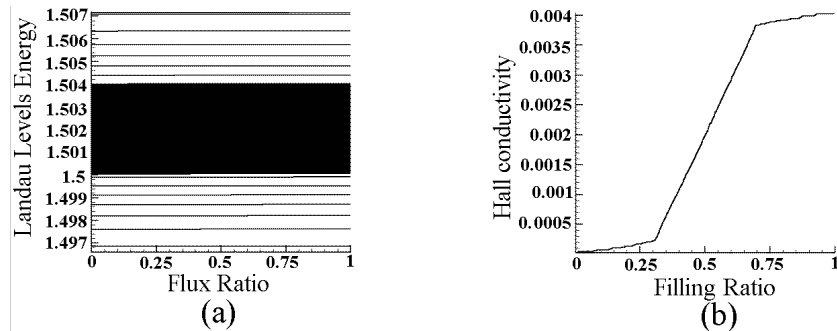
$$V_{im}(\vec{r}) = V \cdot \sum_{i,j} \delta(x-x_i) \delta(y-y_j) (-1)^{i+j}$$

که این پتانسیلها یک در میان به صورت جاذبه و دافعه می باشند. دامنه ناخالصی V ، برابر با $0.2/0$ انتخاب شده است. عناصر ماتریس ناخالصی را که یک ماتریس غیر قطری است، با ماتریس قطری H جمع می کنیم و سپس ماتریس حاصل را قطری کرده و نتایج را با توجه به نمودارهای به دست آمده بررسی می کنیم.

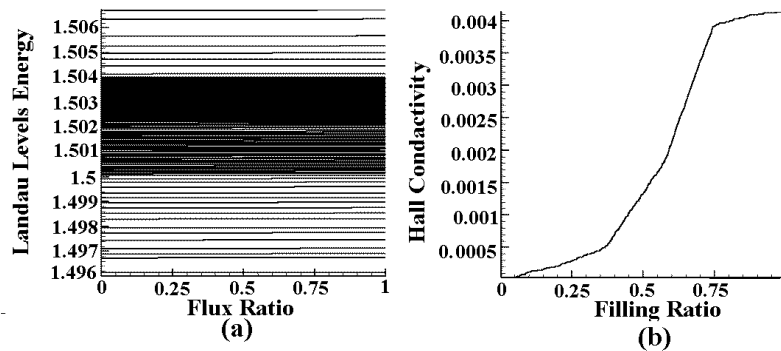
در شکل ۱ تعداد ناخالصیها 100 انتخاب شده است که به صورت همسانگرد در سیستم توزیع شده اند. یعنی تعداد

می آید. حال اگر به این سیستم پتانسیل ناخالصی V_{im} را اضافه کنیم، در این صورت ماتریس کل $H = H_0 + V_{im}$ ، از حالت قطری بودن در می آید و برای به دست آوردن ویژه مقادیر کافی است تا ماتریس کل را به روش حل عددی قطری کنیم. قطری سازی به روش عددی با استفاده از زبان برنامه نویسی فرترن ۹۰ انجام شده است (subrotin evalf) [۳]، [۶]. در این مقاله تعداد زیرترازها $N_s = 256$ انتخاب شده است و میدان الکتریکی را طوری انتخاب می کنیم که $u = 10^{-4}$ باشد [۷]. تعداد N ناخالصی V_{im} ، به صورت تابع دلتای دیراک با توزیع ناهمسانگرد به سیستم اعمال می کنیم و پاسخ زیرترازها را به تغییر شار بررسی می نماییم.

ترازهای گسترده به تغییر شار پاسخ می دهند و ترازهای جایگزیده به تغییر شار پاسخ نمی دهند [۴]، [۵]. در پایان تعداد ناخالصی را افزایش می دهیم و رابطه بین افزایش آنها، با ناهمسانگرد بودن توزیع ناخالصی را بررسی می کنیم.



شکل ۳. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد و توزیع بیشتر در جهت x با $N = 100$ ، (b). نمایش پله هال.



شکل ۴. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی همسانگرد با $N = 400$ ، (b) نمایش پله هال.

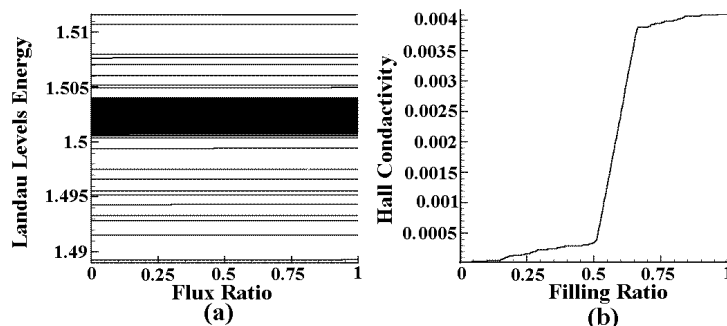
است. با مقایسه شکل ۱، مشاهده می‌شود تعداد ترازهای گسترده بیشتر شده و ترازهای جایگزیده نیز پراکندگی کمتری نسبت به مبدأ دارند و چون محدوده پراکندگی ترازهای گسترده بازتر شده است، شکل پله هال به وضوح دیده نمی‌شود. با توجه به نتایج به دست آمده و از آنجایی که در این سیستم جریان در جهت y است، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که، هر چقدر توزیع ناخالصی در جهت جریان افزایش یابد، بر تعداد ترازهای جایگزیده افزوده می‌شود و این ترازها از مبدأ دورتر می‌شوند، به همین جهت شکل پله هال بهتر دیده می‌شود. بالعکس اگر افزایش ناخالصی در جهتی باشد که جریان وجود ندارد، ترازهای گسترده در محدوده بیشتری پراکنده می‌شوند که این امر موجب می‌شود پله هال به خوبی مشاهده نشود.

در مرحله بعد تعداد ناخالصی همسانگرد سیستم را به $N = 400$ افزایش می‌دهیم (شکل ۴). در قسمت (a) نمودار، ترازهای لاندائو نسبت به تغییر شار و در قسمت (b)، شکل پله هال نشان داده شده است.

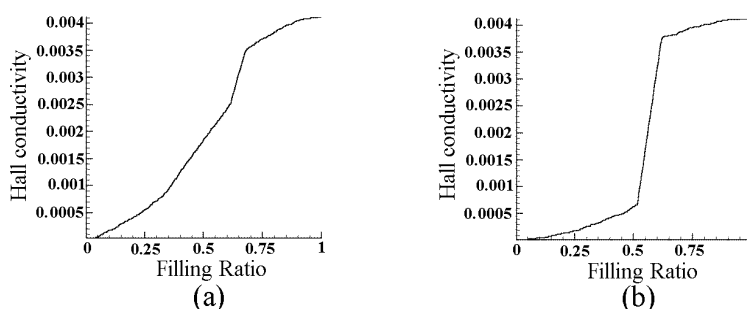
ناخالصیها در جهت x, y یکسان هستند. همان طور که در قسمت (a) نمودار دیده می‌شود، یکسری ترازهای گسترده در نواحی مرکزی و یکسری ترازهای جایگزیده در ابتدا و انتهای نمودار قرار دارند. به علت وجود این دو نوع دسته تراز لاندائو پله هال نیز تشکیل می‌شود که در قسمت (b) نمودار دیده می‌شود.

در شکل ۲ توزیع ناخالصی را ناهمسانگرد در نظر می‌گیریم. به همین منظور تعداد ناخالصی در جهت y را ۲۵ برابر تعداد ناخالصی در جهت x انتخاب می‌کنیم. با مقایسه شکل ۱ مشاهده می‌شود که ترازهای گسترده در همان محدوده قبلی باقی می‌مانند، ولی ترازهای جایگزیده از مبدأ دورتر شده‌اند و این پراکندگی در هر دو جهت بالا و پایین دیده می‌شود. در این حالت با توجه به قسمت (a) نمودار، شکل پله هال نیز به طور واضح تر دیده می‌شود.

شکل ۳ عکس حالت قبل را نشان می‌دهد. یعنی تعداد ناخالصیها در جهت x ، ۲۵ برابر تعداد ناخالصی در جهت y



شکل ۵. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد با $N = 400$ ، (b) نمایش پله هال.



شکل ۶. (a) نمایش پله هال با ناخالصی همسانگرد با $N = 900$ ، (b) نمایش پله هال با ناخالصی ناهمسانگرد با $N = 900$.

۴. نتیجه گیری

با توجه به نتایج به دست آمده از نمودارها می توان چنین نتیجه گیری کرد که در محیطهایی با توزیع ناخالصی ناهمسانگرد، دو دسته تراز گسترده و جایگزیده به وجود می آیند و به دنبال این دو دسته تراز، پله هال ایجاد می شود. در صورتی که بیشتر ناخالصی در جهت جریان توزیع یابد، تعداد ترازهای جایگزیده بیشتر و از مبدأ نیز دورتر می شوند و در نتیجه پله هال بهتر دیده می شود. بالعکس، اگر ناخالصی در جهتی که جریان وجود ندارد، بیشتر توزیع شود، در آن صورت تعداد ترازهای گسترده در محدوده بیشتری پراکنده می شوند و پله هال به خوبی دیده نمی شود. همچنین اگر ناخالصی، کل افزایش یابد، برای مشاهده اثر هال لازم است تا توزیع ناخالصی، ناهمسانگرد و همچنین در جهت جریان باشد.

در شکل ۵، ۴۰۰ ناخالصی به طور ناهمسانگرد توزیع شده اند (توزیع ناخالصی در جهت y ، ۲۵ برابر ناخالصی در جهت x انتخاب شده است). با مقایسه شکل ۴، مشاهده می شود که ترازهای جایگزیده بیشتر و از مبدأ دورتر شده اند، به همین جهت شکل پله هال بهتر دیده می شود. در شکل ۶ میزان ناخالصی ۹۰۰ انتخاب شده است. در قسمت (a) نمودار شکل پله هال برای توزیع همسانگرد و در قسمت (b) نمودار شکل پله هال برای توزیع ناهمسانگرد نشان داده شده است که تعداد بیشتری از ناخالصیها در جهت جریان توزیع شده است. این نمودارها نشان می دهد، اگر میزان ناخالصی افزایش یابد، در آن صورت برای مشاهده پله هال، توزیع ناخالصی باید به شکل ناهمسانگرد و در جهت جریان باشد.

مراجع

۱. R E Prange, *Phys. Rev. B* **23**, 9 (1981).
 ۲. R E Prange and S M Girvin, *The Quantum Hall Effect* (1990).
 ۳. L Frank Friedman and B Koffman Elliot, *Problem Solving And Structured Programming In FORTRAN*. Addison-Wesley, Rev. **2** (1981).
 ۴. G F Giulian, J J Quinn and S C Ying, *Phys. Rev. B* (1983) 28.
 ۵. H Aoki, *Phys.* **151** (1982) 1227.
۶. برنامه نویسی در فرترن ۹۰، ترجمه دکتر محمود مشعل، چاپ سوم، (۱۳۸۲).
 ۷. سعیده رمضانی ثانی، بررسی اثر کوانتومی هال *IQHE* در سیستمهای دارای ناخالصی به روش تبدیل پیمانهای در حضور نقطه‌های کوانتومی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهراء، (۱۳۸۳).