یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۶، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۵

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

پاسخ ترازهای لاندائو به تغییر شار در ناخالصیهای ناهمسانگرد

سعیده رمضانی‌ثانی، عبدالله مرتضی‌علی و محمدرضا سرکرده‌ای

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۰/۲ ؛ دریافت نسخه‌نهایی: ۸۴/۱۱/۲۸)

چکیده

در این مقاله پاسخ زیرترازهای لاندائو نسبت به تغییر شار در ناخالصیهای ناهمسانگرد بررسی شده است. در حضور این ناخالصیها، ترازهای لاندائو که به صورت تابع دلتا بوده‌اند، به دو دسته ترازهای گسترده و جایگزیده تبدیل شده و پله هال ایجاد می‌شود. مشاهده می‌شود اگر توزیع ناخالصی در جهت جریان، نسبت به جهت دیگر بیشتر باشد، در آن صورت ترازهای جایگزیده، نسبت به حالت توزیع همسانگرد، از مبدأ دورتر می‌شوند و پله هال به طور واضحتر دیده می‌شود. برای سیستمهایی با میزان ناخالصی زیاد برای مشاهده اثر هال، توزیع ناخالصی باید در جهت جریان و به صورت ناهمسانگرد باشد.

واژه‌های کلیدی: ترازهای لاندائو، توزیع ناهمسانگرد، پله هال، ترازهای گسترده و جایگزیده

۱. مقدمه

برای یک الکترون آزاد که در صفحهxy حرکت می‌کند، در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی عمود بر صفحه، هامیلتونی به شکل زیر را داریم:

$$H=\frac{1}{2m}\left[\vec{P}+\frac{e\vec{A}}{c}\right]^2 ,$$

برای چنین هامیلتونی، با استفاده از پیمانه لاندائو معادله شرودینگر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{eBx}{\hbar c}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi=E\psi ,$$

این معادله جوابهای زیر را برای ϕ دربرخواهد داشت:

$$\phi_n(x)=\exp\left[-(x-X)^2/2l^2\right]H_n\left((x-X)/l\right) ,$$

که در آن H_n چند جمله‌ای هرمیت و $X=K_x l^2$ است. این معادله، همان معادله نوسانگر هارمونیک است با این تفاوت که مرکز آن به اندازه X جابه‌جا شده است. بنابراین سطوح انرژی آن، به نام ترازهای لاندائو، شکل زیر را دارد:

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c ,$$

در حالت ایده‌آل ترازهای لاندائو به صورت تابع δ می‌باشند و نسبت به x,y متقارن و دارای تبهگنی هستند. با اعمال ناخالصی، این تبهگنیها شکسته و ترازها پهن می‌شوند. با افزودن میدان الکتریکی در راستای x، در چارچوبی که با سرعت سوق حرکت می‌کند، میدان الکتریکی در راستای y احساس نخواهد شد، در این حالت هامیلتونی لازم برای معادله شرودینگر به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$H=H_0+eEx .$$

اگر از یکای مغناطیسی استفاده شود، که در آن واحد زمان ω^{-1}،واحد طول l.،واحد جرم m و واحد کنش $\hbar$ است و همچنین با توجه به تعریف سرعت سوق $u=\frac{cE_x}{B}$ و $\omega_c=\frac{eB}{mc}$ هامیلتونی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$H=H_0+ux ,$$

هامیلتونی جدید دارای ویژه مقادیری به شکل زیر هستند:

$$E_n = n + \frac{1}{2} + uX \ .$$

پرانج[1] [۱] با افزودن یک ناخالصی به صورت تابع دلتا، این سیستم را مورد بررسی قرار داد . اگر پتانسیل اعمال شده به صورت زیر باشد:

$$V_I = \lambda\delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

در نتیجه هامیلتونی جدید به شکل $H' = H + V_I$ نوشته می‌شود. می‌توان تابع دلتا را بر حسب ویژه توابع یک عملگر به صورت زیر بسط داد:

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \sum_{n,k} \psi_{nk}(x,y)\psi^*_{nk}(x_0,y_0),$$

$$H' - H = V_I = \lambda \sum_{n,k} \psi_{nk}(x_0,y_0).$$

با فرض این که ψ_α ویژه توابع تابع H باشد و با توجه به این که $H'\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha$:

$$\psi_\alpha = \frac{\lambda}{(E_\alpha - H)} \sum_{n,k} \psi_{nk}(x,y)\, \psi^*_{nk}(x_0,y_0)\psi_\alpha \ ,$$

$$\sum_{n,k} \frac{\lambda \psi_{nk}(x,y)\, \psi^*_{nk}(x_0,y_0)}{E_\alpha - E_{nk}} = 1 \ .$$

رابطه بالا به ازای هر x,y از جمله به ازای $x = x_0$ و $y = y_0$ برقرار است بنابراین خواهیم داشت :

$$\sum_{n,k} \frac{\lambda\, |\psi_{n,k}(x_0,y_0)|^2}{E_\alpha - E_{nk}} = 1 \ ,$$

مشاهده می‌کنیم که با انتخاب هر E_α که مقدارش بین دو تراز E_{nk} قرار گیرد رابطه فوق برقرار می‌شود. با نزدیک شدن E_α به یکی از مقدارهای E_{nk}، جمع بالا به اعداد بسیار بزرگی خواهد انجامید و دیگر برابر عدد یک نمی‌شود. تمام سطوح انرژی E_α که نزدیک به تراز E_{nk} قرار داشته باشند حالتهای گسترده را به وجود می‌آورند که حامل جریان هستند و بیشتر در قسمت مرکزی دیده می‌شوند. همچنین یک سری ترازهای جایگزیده در قسمتهای دورتر پراکنده می‌باشند که جریانی حمل نمی‌کنند و باعث جابه‌جایی انرژی نمی‌شوند [۲].

۲. پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار

می‌دانیم یک سیستم، در حضور میدان مغناطیسی خارجی و میدان الکتریکی در جهت محور x دارای هامیلتونی به شکل زیر می‌باشد:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} + \frac{e\vec{A}}{c}\right]^2 + eEx \ , \qquad (1)$$

در صورت استفاده از پیمانه لاندائو به صورت $A_x = 0$ و $A_y = -Bx$ برای معادله (۱) می‌توان جوابها را به صورت زیر نوشت:

$$\psi_{nk} = \pi^{\frac{-1}{4}} L_y^{\frac{-1}{2}} \exp(iky)\phi_n(x - X), \qquad (2)$$

که ϕ_n، nامین تابع نوسانگر هارمونیک است، $X = kl^2$ و طول مغناطیسی به صورت $l = \left(\frac{\hbar c}{eB}\right)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود. انرژی این ویژه حالتها به شکل زیر است :

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + eEX \ , \qquad (3)$$

اگر در یکای مغناطیسی کار کنیم، در آن صورت $\hbar\omega = 1$، و با فرض $u = \frac{cE_x}{B}$ رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + uX \ . \qquad (4)$$

تغییر شار، تابع موج را به شکل زیر تغییرمی دهد:

$$\psi \to \psi \exp\left(2\pi i \frac{\phi}{\phi_0}\right), \ \phi_0 = \frac{hc}{e},$$

با این تغییر شار، معادله (۲) به شکل زیر درمی آید:

$$\psi'_{nX} = \pi^{\frac{-1}{4}} L_y^{\frac{-1}{2}} exp\left(\frac{i}{l^2}\left(Xy + 2\pi l^2 \frac{\phi}{\phi_0}\right)\right)\phi_n(x - X),$$

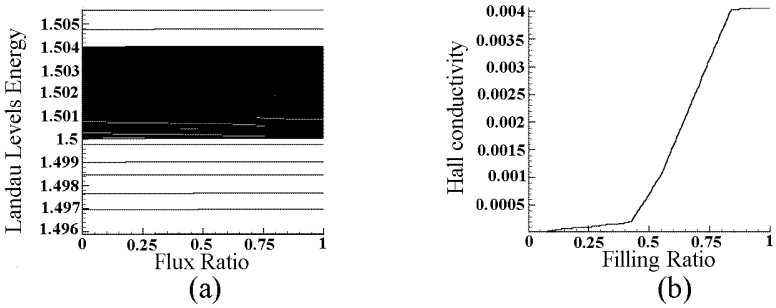
می‌توان معادله (۴) را که ویژه مقادیر حالت بدون ناخالصی است، با تغییر شار به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E_{nX} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + u\left(X + \frac{\phi}{\phi_0}\Delta X\right) \ , \qquad (5)$$

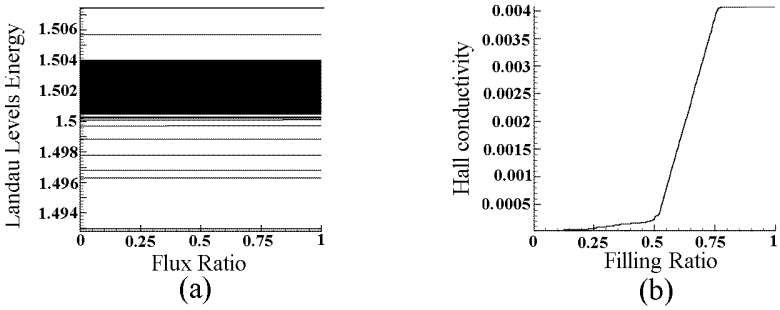
بنابراین در حالت بدون ناخالصی، ماتریس هامیلتونی قطری H_0 را خواهیم داشت که عناصر روی قطر آن از معادله (۵) به دست

---

۱. Prange



شکل ۱. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی همسانگرد با $N = ۱۰۰$، (b) نمایش پله هال.



شکل ۲. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد و توزیع بیشتر در جهت y با $N = ۱۰۰$، (b). نمایش پله هال.

می‌آید. حال اگر به این سیستم پتانسیل ناخالصی V_{im} را اضافه کنیم، در این صورت ماتریس کل $H = H_{.} + V_{im}$، از حالت قطری بودن در می‌آید و برای به دست آوردن ویژه مقادیر کافی است تا ماتریس کل را به روش حل عددی قطری کنیم. قطری سازی به روش عددی با استفاده از زبان برنامه نویسی فرترن ۹۰ انجام شده است (subrotin evalf) [۳]، [۶]. در این مقاله تعداد زیرترازها $N_s = ۲۵۶$ انتخاب شده است و میدان الکتریکی را طوری انتخاب می‌کنیم که $u = ۱۰^{-۴}$ باشد [۷]. تعداد N ناخالصی V_{im}، به صورت تابع دلتای دیراک با توزیع ناهمسانگرد به سیستم اعمال می‌کنیم و پاسخ زیرترازها را به تغییر شار بررسی می‌نماییم.

ترازهای گسترده به تغییر شار پاسخ می‌دهند و ترازهای جایگزیده به تغییر شار پاسخ نمی‌دهند [۴, ۵]. در پایان تعداد ناخالصی را افزایش می‌دهیم و رابطه بین افزایش آنها، با ناهمسانگرد بودن توزیع ناخالصی را بررسی می‌کنیم.

۳. پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با اعمال توزیع ناخالصی ناهمسانگرد

همان طور که قبلاً گفته شد، در حالت بدون ناخالصی، عناصر روی قطر ماتریس قطری $H_{.}$ را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$E_{ii} = \left(۱ + \frac{۱}{۲}\right) + ۱۰^{-۴}\left(i\Delta X + \frac{\phi}{\phi_{.}}\Delta X\right),$$

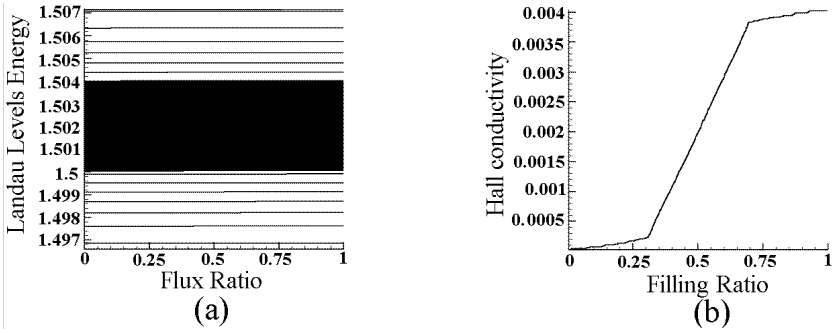
$i = ۱,۲,۳,...,۲۵۶$

با اعمال N ناخالصی با پتانسیلهایی به شکل زیر داریم:

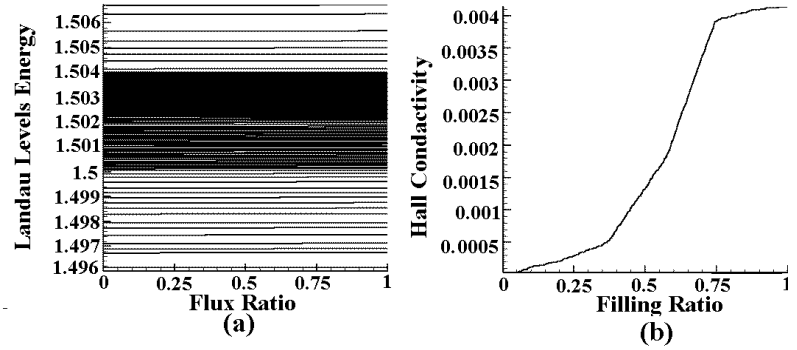
$$V_{im}(\vec{r}) = V_{.}\sum_{i,j}\delta(x - x_{.})\,\delta(y - y_{.})\,(-۱)^{i+j}$$

که این پتانسیلها یک در میان به صورت جاذبه و دافعه می‌باشند. دامنه ناخالصی $V_{.}$، برابر با ۰/۰۲ انتخاب شده است. عناصر ماتریس ناخالصی را که یک ماتریس غیر قطری است، با ماتریس قطری $H_{.}$ جمع می‌کنیم و سپس ماتریس حاصل را قطری کرده و نتایج را با توجه به نمودارهای به دست آمده بررسی می‌کنیم.

در شکل ۱ تعداد ناخالصیها ۱۰۰ انتخاب شده است که به صورت همسانگرد در سیستم توزیع شده‌اند. یعنی تعداد



شکل ۳. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد و توزیع بیشتر در جهت x با $N = ۱۰۰$، (b). نمایش پله هال.



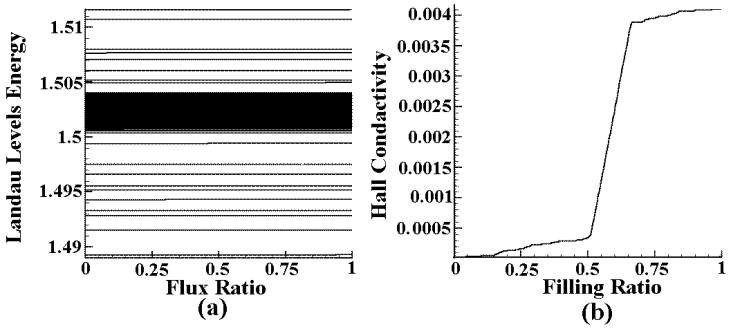
شکل ۴. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی همسانگرد با $N = ۴۰۰$، (b) نمایش پله هال.

ناخالصیها در جهت x,y یکسان هستند. همان طور که در قسمت (a) نمودار دیده می‌شود، یک‌سری ترازهای گسترده در نواحی مرکزی و یک‌سری ترازهای جایگزیده در ابتدا و انتهای نمودار قرار دارند. به علت وجود این دو نوع دسته تراز لاندائو پله هال نیز تشکیل می‌شود که در قسمت (b) نمودار دیده می‌شود.

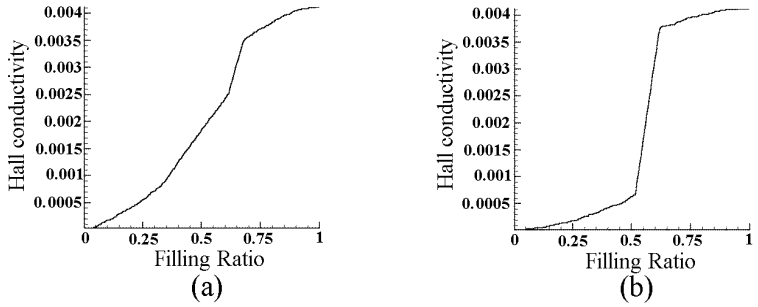
در شکل ۲ توزیع ناخالصی را ناهمسانگرد در نظر می‌گیریم. به همین منظور تعداد ناخالصی در جهت y را ۲۵ برابر تعداد ناخالصی در جهت x انتخاب می‌کنیم. با مقایسه شکل ۱ مشاهده می‌شود که ترازهای گسترده در همان محدوده قبلی باقی می‌مانند، ولی ترازهای جایگزیده از مبدا دورتر شده اند و این پراکندگی در هر دو جهت بالا و پایین دیده می‌شود. در این حالت با توجه به قسمت (a) نمودار، شکل پله هال نیز به طور واضح تر دیده می‌شود.

شکل ۳ عکس حالت قبل را نشان می‌دهد. یعنی تعداد ناخالصیها در جهت x، ۲۵ برابر تعداد ناخالصی در جهت y است. با مقایسه شکل ۱، مشاهده می‌شود تعداد ترازهای گسترده بیشتر شده و ترازهای جایگزیده نیز پراکندگی کمتری نسبت به مبدأ دارند و چون محدوده پراکندگی ترازهای گسترده بازتر شده است، شکل پله هال به وضوح دیده نمی‌شود. با توجه به نتایج به دست آمده و از آنجایی که در این سیستم جریان در جهت y است، می‌توان چنین نتیجه گیری کرد که، هر چقدر توزیع ناخالصی در جهت جریان افزایش یابد، بر تعداد ترازهای جایگزیده افزوده می‌شود و این ترازها از مبدا دورتر می‌شوند، به همین جهت شکل پله هال بهتر دیده می‌شود. بالعکس اگر افزایش ناخالصی در جهتی باشد که جریان وجود ندارد، ترازهای گسترده در محدوده بیشتری پراکنده می‌شوند که این امر موجب می‌شود پله هال به خوبی مشاهده نشود.

در مرحله بعد تعداد ناخالصی همسانگرد سیستم را به $N = ۴۰۰$ افزایش می‌دهیم (شکل ۴). در قسمت (a) نمودار، ترازهای لاندائو نسبت به تغییر شار و در قسمت (b)، شکل پله هال نشان داده شده است.



شکل ۵. (a) پاسخ زیرترازهای لاندائو به تغییر شار با ناخالصی ناهمسانگرد با $N = ۴۰۰$، (b) نمایش پله هال.



شکل ۶. (a). نمایش پله هال با ناخالصی همسانگرد با $N = ۹۰۰$، (b) نمایش پله هال با ناخالصی ناهمسانگرد با $N = ۹۰۰$.

در شکل ۵، ۴۰۰ ناخالصی به طور ناهمسانگرد توزیع شده‌اند (توزیع ناخالصی در جهت y، ۲۵ برابر ناخالصی در جهت x انتخاب شده است). با مقایسه شکل ۴، مشاهده می‌شود که ترازهای جایگزیده بیشتر و از مبدأ دورتر شده‌اند، به همین جهت شکل پله هال بهتر دیده می‌شود. در شکل ۶ میزان ناخالصی ۹۰۰ انتخاب شده است. در قسمت (a) نمودار شکل پله هال برای توزیع همسانگرد و در قسمت (b) نمودار شکل پله هال برای توزیع ناهمسانگرد نشان داده شده است که تعداد بیشتری از ناخالصیها در جهت جریان توزیع شده است. این نمودارها نشان می‌دهد، اگر میزان ناخالصی افزایش یابد، در آن صورت برای مشاهده پله هال، توزیع ناخالصی باید به شکل ناهمسانگرد و در جهت جریان باشد.

۴. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج به دست آمده از نمودارها می‌توان چنین نتیجه گیری کرد که در محیطهایی با توزیع ناخالصی ناهمسانگرد، دو دسته تراز گسترده و جایگزیده به وجود می‌آیند و به دنبال این دو دسته تراز، پله هال ایجاد می‌شود. در صورتی که بیشتر ناخالصی در جهت جریان توزیع یابد، تعداد ترازهای جایگزیده بیشتر و از مبدأ نیز دورتر می‌شوند و در نتیجه پله هال بهتر دیده می‌شود. بالعکس، اگر ناخالصی در جهتی که جریان وجود ندارد، بیشتر توزیع شود، در آن صورت تعداد ترازهای گسترده در محدوده بیشتری پراکنده می‌شوند و پله هال به خوبی دیده نمی‌شود. همچنین اگر ناخالصی، کل افزایش یابد، برای مشاهده اثر هال لازم است تا توزیع ناخالصی، ناهمسانگرد و همچنین در جهت جریان باشد.

مراجع

1. R E Prange, *Phys. Rev*. B **23,** 9 (1981).
2. R E Prange and S M Girvin, *The Quantum Hall Effect* (1990).
3. L Frank Friedman and B Koffman Elliot, *Problem Solving And Structured Programming In FORTRAN*. Addison-Wesley, Rev. **2** (1981).
4. G F Giulian, J J Quinn and S C Ying, *Phys. Rev*. **B** (1983) 28.
5. H Aoki, *Phys*. **15l** (1982) 1227.
6. برنامه نویسی در فرترن ۹۰، ترجمه دکتر محمود مشعل، چاپ سوم، (۱۳۸۲).
7. سعیده رمضانی ثانی، *بررسی اثر کوانتومی هال* ***IQHE*** *در سیستمهای دارای ناخالصی به روش تبدیل پیمانه‌ای در حضور نقطه‌های کوانتومی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهرا، (۱۳۸۳).