

## بررسی خواص بحرانی مدل‌های هایزنبرگ و XY کلاسیک به روش گروه بازبهنجارش میدان میانگین (MFRG)

### اعظم صادقی و فرهاد شهبازی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۴/۹/۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۵/۱۲/۹)

#### چکیده

در این مقاله با استفاده از روش گروه بازبهنجارش میدان میانگین و گروه بازبهنجارش میدان میانگین سطحی - کپهای خواص بحرانی مدل‌های اسپینی هایزنبرگ و XY بر روی شبکه مکعبی ساده بررسی می‌شود. دمای بحرانی و نماهای بحرانی، که مشخص کننده رده جهانشمولی این دو مدل هستند، برای خوشه‌های ۳، ۲، ۱ و ۴ اسپینی به صورت تحلیلی محاسبه و با نتایج روشهای دیگر مانند مونت کارلو و سری دماهای بالا مقایسه شده‌اند که تطابق خوبی با نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گروه بازبهنجارش، نظریه میدان میانگین، نماهای بحرانی

#### ۱. مقدمه

برهمکنش با یکدیگر، با اسپینهای اطراف نیز برهمکنش دارند. در روش MFRG میدان متوسط حاصل از اسپینهای اطراف آنها به صورت میدان ثابتی فرض می‌شود که به ترتیب  $b$  و  $b'$  نام دارند. مغناطش در واحد اسپین از رابطه کالن - سوزوکی [۳]

$$m_N(k, h, b) = \frac{\text{Tr}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i e^{-BH_N}\right)}{\text{Tr}(e^{-BH_N})} \quad (1)$$

به دست می‌آید، در حالی که جمع روی کل هنگرد تعریف شده به وسیله هامیلتونی  $(H_N)$  است و  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  و  $k \propto \beta$ . MFRG فرض می‌کند که بین مغناطش  $m_N$  و  $m_{N'}$  رابطه مقیاسبندی سیستمهای نامتناهی برقرار است.

$$m_{N'}(k', h', b') = l^{d-y_H} m_N(k, h, b) \quad (2)$$

که معمولاً  $l$  را به صورت  $l = (N/N')^{1/d}$  تعریف می‌کنند. این تعریف با  $l = \frac{L}{L'}$  در بلوکهای متقارن ابرمکعبی با  $N = L^d$

نظریه گروه بازبهنجارش که در سال ۱۹۷۰ [۱ و ۲] ارائه شد، یک ابزار نظری مؤثر برای توصیف و همچنین محاسبه کمیتها و خواص بحرانی دستگاههای آماری در نقطه گذار فاز پیوسته یا مرتبه دوم در اختیار فیزیکدانها قرار داد. از آن به بعد روشهای متعددی که همگی مبتنی بر اصول اولیه گروه بازبهنجارش بودند، برای مطالعه دستگاههای بحرانی ابداع شدند. از جمله می‌توان به روشهای گروه بازبهنجارش پدیدار شناختی اشاره کرد که روشهای MFRG<sup>۱</sup> و SBMFRG<sup>۲</sup> دو مثال مشخص از آنها هستند. در روش گروه بازبهنجارش میدان میانگین پارامتر نظم یک خوشه  $N$  اسپینی به پارامتر نظم در خوشه  $N'$  ( $N > N'$ ) اسپینی بازبهنجار می‌شود. اسپینهای این خوشه‌ها علاوه بر

۱. Mean Field Renormalization Group

۲. Surface Bulk Mean Field Renormalization Group

نمای گرمایی  $\nu = \frac{1}{y_t}$  را به دست آورد. یکی از راههای تصحیح در نتایج، اعمال آثار سطحی و حجمی خوشه‌های محدود است. با در نظر گرفتن سه خوشه  $N, N', N''$  ( $N > N' > N''$ ) و حل خودسازگار دو رابطه مقیاسبندی

$$\begin{aligned} f_{N'}(k') &= l^x f_N(k) \\ f_{N''}(k'') &= l^y f_{N'}(k') \end{aligned} \quad (10)$$

که

$$x = d - y_H - y_{H_s}, \quad y = d - y_H - y_{H_s} \quad (11)$$

در نقطه بحرانی  $k = k' = k'' = k_c$  دما و نماهای بحرانی را با دقت بالاتری نسبت به نتایج MFRG به دست می‌آوریم [۵].

## ۲. مدل‌های هایزنبرگ و XY

در مدل هایزنبرگ پارامتر نظم برداری است که در فضای سه بعدی می‌چرخد و در غیاب میدان خارجی دارای تقارن  $O(3)$  است. اما در حضور میدان خارجی در صفحه عمود بر میدان تحت دوران ناورد باقی می‌ماند و تقارن  $O(2)$  دارد. مدل هایزنبرگ بیشتر در مواد مغناطیسی همسانگرد مشاهده می‌شود و پارامتر نظم همان مغناطش سیستم است.

در مدل XY اسپینها در صفحه دوران می‌کنند. بنابراین پارامتر نظم دو مؤلفه دارد و از گروه تقارنی  $O(2)$  می‌باشد. پارامتر نظم ابر شاره‌هایی مانند  ${}^4\text{He}$  از این گونه‌اند و مدل XY برای آنها صدق می‌کند.

در این دو مدل شکست تقارنی خودبه خودی و گذار فاز در دمای  $T_c > 0$  برای  $d > 2$  وجود دارد. در بالاتر از دو بعد سیستم زیر این دما منظم شده و مغناطش غیر صفر است [۶].

## ۳. شبکه مکعبی با مدل هایزنبرگ

هامیلتونی مدل هایزنبرگ با برهمکنش نزدیکترین همسایه‌ها به شکل زیر است:

$$-\beta H = k \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j + \tilde{h} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \quad (12)$$

با این فرض که میدان خارجی در جهت محور z و میدان

اسپین، معادل است. روش دیگری نیز برای تعریف  $l$  ارائه شده است [۴] که نتایج قابل قبول‌تری نسبت به تعریف قبل می‌دهد.

در این تعریف جدید به جای  $L = N^{1/d}$  فرض می‌کنیم

$$L = \left( \frac{1}{d} \sum_i L_i^{-2} \right)^{-1/2} \quad (3)$$

که جمع روی جهات دکارتی و  $L_i$  تعداد پیوندها در هر جهت است و برهمکنش‌های مؤثر در هر جهت را نشان می‌دهد. رابطه فوق از این واقعیت به دست می‌آید که  $\frac{1}{L}$  بردار قطع موج در فضای وارون  $(k)$  و مؤلفه آن در جهت  $i$  ام است. ما در این مقاله از هر دو نوع تعریف استفاده می‌کنیم تا بتوان نتایج را با هم مقایسه نمود. در این مقاله کلیه محاسبات در فضایی سه بعدی انجام شده است.

در نزدیکی نقطه بحرانی با توجه به این که  $b, b' \ll 1$

$h, h' \ll 1$  تا تقریب مرتبه اول داریم:

$$g_{N'}(k')h' + f_{N'}(k')b' = g_N(k)h + f_N(k)b \quad (4)$$

که

$$f_{N'}(k') = \left. \frac{\partial m_{N'}}{\partial b'} \right|_{h'=0, b'=0}, \quad f_N(k) = \left. \frac{\partial m_N}{\partial b} \right|_{h=0, b=0} \quad (5)$$

$$g_{N'}(k') = \left. \frac{\partial m_{N'}}{\partial h'} \right|_{h'=0, b'=0}, \quad g_N(k) = \left. \frac{\partial m_N}{\partial h} \right|_{h=0, b=0}$$

$b$  و  $b'$  هم از رابطه مقیاسبندی مغناطشهای سیستم پیروی می‌کنند.

$$b' = l^{d-y_H} b \quad (6)$$

بنابراین از معادلات (۳) و (۵) داریم:

$$f_{N'}(k') = f_N(k) \quad (7)$$

$$g_{N'}(k') = l^{d-y_H} g_N(k) \quad (8)$$

با توجه به اینکه نقطه بحرانی یک نقطه ثابت است و در چنین نقطه‌ای سیستم تحت تبدیلات RG تغییر نمی‌کند، یعنی  $k = k' = k_c$  و از رابطه (۷) که مستقل از هر نمایی یک رابطه بازگشتی است، می‌توان در نقطه بحرانی  $k_c$  را حساب کرد و با کمک رابطه (۸) نمای مغناطیسی  $y_H$  و از نتیجه نظریه گروه بازهنجارش

$$l^{y_t} = l^{y_H} = \lambda_T, \quad \lambda_T = \left. \frac{\partial k'}{\partial k} \right|_{k_c} \quad (9)$$

جدول ۱. نتایج به دست آمده از مدل هایزنبرگ با انتخاب  $L$  به صورت  $L = N^{1/d}$ .

Heisenberg Model	$k_c$	$\nu$	$\gamma_H$
$N=2, N'=1$	۰/۶۱۴۹۶	۱/۵۶۹۱	۱/۸۹۴۵۵
$N=۴, N'=1$	۰/۶۲۰۷۶	۱/۴۱۷۹	۱/۹۳۸۷۲
$N=۴, N'=2$	۰/۶۲۵۰۵	۱/۲۹۳۴	۱/۹۸۲۸۹
$N=۴, N'=3$	۰/۶۳۰۰۶	۰/۸۲۳۶	۲/۲۷۲۵۹
$N=۴, N'=3, N''=1$ SBMFRG	۰/۶۳۴۶۴	۱/۷۱۱۸ - ۰/۸۱۹۷	۱/۸۶۱۴ - ۲/۲۷۸۲۷
Monte Carlo [ $\nu$ ]	۰/۶۹۲۹۱	۰/۷۰۸۹	۲/۴۸۶
High temperature series [ $\lambda$ ]	۰/۶۹۲۹	۰/۷۱۲	۲/۴۸۸۱

نزدیکتر می‌شویم، این بار خوشه مربعی را با  $N=4$  مطالعه می‌کنیم.

$$-\beta H_\square = k(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 + \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3 + \bar{s}_3 \cdot \bar{s}_4 + \bar{s}_4 \cdot \bar{s}_1 + \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_4 + \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3) + \sum_{i=1}^4 a_i s_{iz} \quad (18)$$

که  $H_\square$  هامیلتونی مسئله است و

$$a_i = (z-2)kb_i + h, \quad i=1,2,3,4 \quad (19)$$

برای محاسبه تابع پارش مربوط به این هامیلتونی نیاز به تغییر متغیر زیر داریم

$$\bar{s}'_i = \bar{s}_i + \bar{s}_4, \quad \bar{s}''_i = \bar{s}_i - \bar{s}_4 \quad (20)$$

$$a'_i = \frac{1}{2}(a_i + a_4), \quad a''_i = \frac{1}{2}(a_i - a_4).$$

بنابراین تابع پارش این چنین به دست می‌آید:

$$Q_\square = \pi \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \int ds'_i \left( \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} a'_i s'^i_x + \frac{\pi}{3} a''_i (4 - s'^i_x) \right) I_{1/2}^{\nu}(s'_i k) + \left( \frac{2\pi}{3} (a_1 + a_4) a'_i s'_i + \frac{\pi}{k s'_i} (a'_i + a''_i) \right) I_{1/2}^{\nu}(s'_i k) I_{1/2}^{\nu}(s'_i k) + \frac{2\pi}{3} a_4 a''_i I_{1/2}^{\nu}(s'_i k) + \frac{\pi}{3} (a'_i + a''_i) I_{1/2}^{\nu}(s'_i k) I_{5/2}^{\nu}(s'_i k) \right). \quad (21)$$

پس از محاسبه این انتگرال با جایگذاری مقادیر پیشین  $a'_i$  و  $a''_i$  بر حسب  $a_4$  و  $a_1$  مغناطش را به دست می‌آوریم و در پایان با شرط  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$  دما و نمای بحرانی را از MFRG محاسبه می‌کنیم. نمودار تابع  $f(k)$  بر حسب  $k$  در شکل ۱، نتایج حاصل از روش MFRG برای مدل هایزنبرگ

شکست تقارنی شبکه با آن همجهت باشد، هامیلتونی برای  $N=2$  و  $N'=1$  به ترتیب عبارتند از:

$$-\beta H_1 = a'_i s_{iz}, \quad (13)$$

$$-\beta H_2 = k \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 + a_1 s_{1z} + a_2 s_{2z},$$

که اگر  $Z$  تعداد نزدیکترین همسایه‌ها در شبکه باشد،

$$a'_i = zk'b' + h', \quad (14)$$

$$a_i = (z-1)kb_i + h, \quad i=1,2$$

و تابع پارش مربوط به آنها از

$$Q_N = \int d\bar{s}_1 \dots d\bar{s}_N e^{-\beta H_N} \delta(|\bar{s}_1|^2 - 1) \dots \delta(|\bar{s}_N|^2 - 1), \quad (15)$$

محاسبه می‌شود. از رابطه (۱۴) با محاسبه انتگرال و بسط آنها تا مرتبه دوم میدانها،  $Q_1$  و  $Q_2$  به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$Q_1 = \pi (2 + 1/3 a_1'^2) \quad (16)$$

$$Q_2 = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \left\{ \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} a_1'^2 \right) I_{1/2}^{\nu}(k) + \frac{2\pi}{k} \left( \frac{a_1'^2}{2} + \frac{a_1'^2}{2} + \frac{k}{3} a_1 a_2 \right) I_{1/2}^{\nu}(k) + \frac{\pi}{3} a_1'^2 I_{5/2}^{\nu}(k) \right\} \quad (17)$$

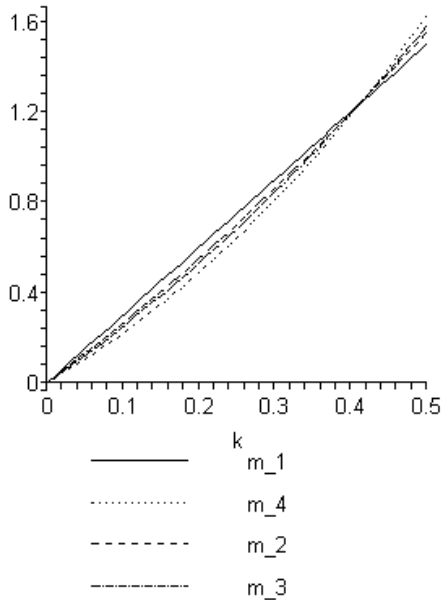
که  $I_\nu(k)$  توابع بسل تعدیل یافته نوع اول از مرتبه  $\nu$  هستند. می‌توان از این روابط استفاده کرد و مغناطش را که جملاتی تا مرتبه اول  $a_i$  دارد، محاسبه نمود. از رابطه (۷)،  $k_c$  و نماهای بحرانی محاسبه می‌شود که نتایج در جدول ۱ آمده است.

#### ۴. MFRG در محاسبه مغناطش خوشه مربعی

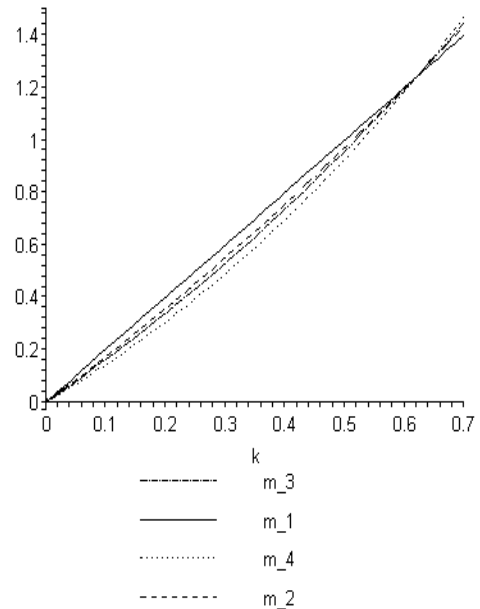
با توجه به این که هر چه خوشه‌ها بزرگتر باشد به جواب دقیق

جدول ۲. نتایج به دست آمده از مدل هایزبرگ با انتخاب  $L$  به صورت  $L = \left( \frac{1}{d} \sum_i L_i^{-2} \right)^{-1/2}$

Heisenberg Model	$k_c$	$\nu$	$\gamma_H$
$N=2, N'=1$	۰/۶۱۴۹۶	۰/۷۲۰۶	۲/۳۹۰۴
$N=4, N'=1$	۰/۶۲۰۷۶	۰/۷۰۹۱	۲/۳۷۷۲
$N=4, N'=2$	۰/۶۲۵۰۵	۰/۷۲۰۶	۲/۳۶۶۶
$N=4, N'=3$	۰/۶۳۰۰۶	۰/۷۴۹۶	۲/۳۴۹۳۸
$N=4, N'=2, N''=1$ SBMFRG	۰/۶۹۹۱۷	۰/۶۴۱۹ - ۰/۶۶۵۲	۲/۴۹۴۳ - ۲/۴۷۰۵
Monte Carlo [۷]	۰/۶۹۲۹۱	۰/۷۰۸۹	۲/۴۸۶
High temperature series[۸]	۰/۶۹۲۹	۰/۷۱۲	۲/۴۸۸۱



شکل ۲. نمودار تابع  $f(k)$  بر حسب  $k$  برای مدل XY.



شکل ۱. نمودار تابع  $f(k)$  بر حسب  $k$  برای مدل هایزبرگ.

$$Q_\nu = \pi^\nu \int ds'_\nu \frac{1}{\sqrt{4-s'^\nu{}^2}}$$

$$\left[ \left( \nu\pi + \frac{\pi}{\nu} a'_\nu{}^\nu s'^\nu{}^\nu + \frac{\pi}{\nu} a'_\nu{}^\nu (4-s'^\nu{}^\nu) \right) I_0^\nu(s'_\nu k) + \right.$$

$$\left. \left( \pi a'_\nu (a_\nu + a_\nu) s'_\nu + \pi \frac{a'_\nu + a_\nu}{k s'_\nu} \right) I_0^\nu(s'_\nu k) I_1^\nu(s'_\nu k) + \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{\nu} (a'_\nu + a_\nu) I_0^\nu(s'_\nu k) I_\nu(s'_\nu k) + \pi a_\nu a_\nu I_1^\nu(s'_\nu k) \right]. \quad (24)$$

نمودار تابع  $f(k)$  بر حسب  $k$  برای مدل XY در شکل ۲ و

در جدول ۱ و نتایج مربوط به همین مدل اما با تعریف جدید  $L$  در جدول ۲ آمده است.

روش MFRG را برای مدل XY تکرار می‌کنیم. توابع پارش آن برای  $N=1, 2, 4$  عبارتند از:

$$Q_1 = \pi \left\{ 2 + \frac{1}{\nu} a_1^\nu \right\} \quad (22)$$

$$Q_2 = \pi \left\{ \left( \nu\pi + \frac{\pi}{\nu} a_2^\nu \right) I_0(k) + \frac{\pi}{k} (a_1^\nu + k a_\nu a_\nu) I_1(k) + \frac{\pi}{\nu} a_1^\nu I_\nu(k) \right\} \quad (23)$$

جدول ۳. نتایج به دست آمده از مدل XY با انتخاب  $L$  به صورت  $L = N^{1/d}$ .

<i>XY-Model</i>	$k_c$	$\nu$	$\gamma_H$
$N=2, N'=1$	۰/۴۰۸۲۸	۱/۵۵۷۱	۱/۸۹۴۵۵
$N=4, N'=1$	۰/۴۱۱۹۶	۱/۴۰۵۶	۱/۹۳۸۷۲
$N=4, N'=2$	۰/۴۱۴۵۷	۱/۲۸۰۹	۱/۹۸۲۸۹
$N=4, N'=3$	۰/۴۱۷۶۷	۰/۸۱۴۳	۲/۲۷۲۶۱
$N=4, N'=3, N''=1$ SBMFRG	۰/۴۲۴۰۷	۰/۶۹۰۰ - ۰/۸۰۵۷	۱/۸۶۳۷ - ۲/۲۸۴۷۳
Monte Carlo [۹]	۰/۴۵۳۹۲	۰/۶۷۵	۲/۴۸۲
High temperature series [۸]	۰/۴۵۴۱۴	۰/۶۷۳	۲/۴۸۸۱

جدول ۴. نتایج به دست آمده از مدل XY با انتخاب  $L$  به صورت  $L = \left( \frac{1}{d} \sum_i L_i^{-2} \right)^{-1/2}$ .

<i>XY-Melod</i>	$k_c$	$\nu$	$\gamma_H$
$N=2, N'=1$	۰/۴۰۸۲۸	۰/۶۸۹۹	۲/۳۹۰۴
$N=4, N'=1$	۰/۴۱۱۹۶	۰/۷۰۲۹	۲/۳۷۷۲
$N=4, N'=2$	۰/۴۱۴۵۷	۰/۷۱۳۷	۲/۳۶۶۶
$N=4, N'=3$	۰/۴۱۷۶۷	۰/۷۴۱۱	۲/۳۴۸۹
$N=4, N'=3, N''=1$ SBMFRG	۰/۴۵۹۴۲	۰/۶۳۹۳ - ۰/۶۶۰۷	۲/۴۳۵۹ - ۲/۴۰۴۶
Monte Carlo [۹]	۰/۴۵۳۹۲	۰/۶۷۵	۲/۴۸۲
High temperature series [۸]	۰/۴۵۴۱۴	۰/۶۷۳	۲/۴۸۸۱

دست آوریم و از روشهای MFRG و SBMFRG کمیتهای بحرانی مورد نظر خود را محاسبه کنیم.

نتایج جدول ۱ برای مدل هایزنبرگ نشان می‌دهد که در روش MFRG با رشد خوشه‌ها به نتایج دقیق نزدیکتر می‌شویم. علاوه بر این با وارد کردن آثار سطحی و استفاده از روش SBMFRG، بهبود محسوس در نتایج به وجود می‌آورد.

در ضمن با مقایسه نتایج تحلیلی برای مدل هایزنبرگ در جدولهای ۱ و ۲، مشاهده می‌کنیم که مقدار دمای بحرانی در روش MFRG مستقل از نوع انتخاب  $L$  می‌باشد. اما با

انتخاب  $L$  به صورت  $L = \left( \frac{1}{d} \sum_i L_i^{-2} \right)^{-1/2}$ ، نماهای بحرانی

دما و نماهای بحرانی این مدل به روش MFRG را می‌توان در جدول ۳ مشاهده کرد. همچنین نتایج مربوط به مدل XY که از تعریف دوم  $L$  به دست آمده در جدول ۴ درج شده است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی خواص بحرانی و محاسبه جفت‌شدگی بحرانی ( $K_c$ ) (عکس دمای بحرانی) و نماهای بحرانی گرمایی و مغناطیسی در شبکه‌های مکعبی از روش گروه بازبهنجارش میدان میانگین و گروه بازبهنجارش میدان میانگین سطحی - کپهای پرداختیم. در خوشه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ اسپینی به طور کاملاً تحلیلی، توانستیم توابع پارش مربوطه را به

مقدار دقیق خود بسیار نزدیک می شود. در مورد مدل XY نیز دقیقاً به همین شکل می توان روی نتایج جدولهای ۳ و ۴ بحث کرد.

به میزان قابل توجهی اصلاح می شوند. همچنین مقدار دمای بحرانی در روش SBMFRG، به نوع انتخاب  $L$  وابسته است و با انتخاب  $L = \left( \frac{1}{d} \sum_i L_i^{-2} \right)^{-1/2}$ ، دمای بحرانی نیز به

## مراجع

1. K G Wilson, *Phys.Rev. B* **4** (1971) 3174.
2. K G Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 773.
3. H B Callen; *Phys. Lett.* **4** (1963) 161.
4. Per Arne. Slotte, *J. Phys. A* **20** (1987)L177.
5. J A Plascak, W figueireodo and B C S Grandi, *Braz J. Phys.* **29** (1999) 579.
6. N goldenfeld, "*Lectures on phase transitions and the renormalization group*", 2th printing (1993).
7. P Peczak, Alan M Ferrenberg, and D P Landau., *Phys. Rev B.* **43** (1991) 6087.
8. J Adler, C Holm and W Janke, *Physica A.* **201** (1993) 581.
9. M Ferer and A H Aidinejad, *Phys. Rev. B.* **34** (1986) 6481.