مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۷، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۶

ناجایگزیدگی امواج کشسان در زنجیرهٔ هارمونیک بی‌نظم با ثابت فنر تصادفی و همبستگی بلندبرد

محمد رحیمی و فرهاد شهبازی

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۵/۷/۱۹ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۵/۱۲/۹)

چکیده

در این مقاله به مطالعهٔ جایگزیدگی امواج اکوستیک در محیطهای بی‌نظم پرداخته‌ایم. به این منظور ما یک شبکهٔ جرم و فنر در نظر می‌گیریم که دارای جرم ثابت باشد و ثابت فنرها را برابر با یک سری عدد کاتوره‌ای با تابع همبستگی $c(l) \sim l^{-\gamma}$ و واریانس واحد قرار می‌دهیم. با استفاده از روشهای نسبت عکس مشارکت و اختلاف ویژه حالتها، حالتهای جایگزیده در سیستم را مشخص می‌کنیم و به مطالعهٔ تأثیر نمای همبستگی بی‌نظمی محیط در جایگزیدگی موج در سیستم می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: جایگزیدگی، بی نظمی، آمار ترازها

۱. مقدمه

خواص مختلف امواج سالهاست که مورد مطالعه قرار گرفته است. از این خواص پدیدهٔ انتشار امواج در محیطهای ناهمگن یک پدیدهٔ بنیادی است که مطالعات زیادی بر روی آن انجام شده است. این پدیده در مطالعهٔ مسائل مهمی مانند آنالیز اطلاعات زمین لرزه، پیشگویی تکرار آن در آینده، شناسایی منابع بزرگ نفت و گاز و غیره کاربرد دارد [۱ و ۲]. یکی از رفتارهایی که امواج در هنگام انتشار در محیطهای ناهمگن ممکن است از خود بروز دهند، پدیدهٔ جایگزیدگی است، که به این معنی است که دامنهٔ تابع موج $\psi(r)$ در فاصله‌های دور از منبع موج به صورت نمایی کاهش می‌یابد، $\psi(r) \sim e^{-r/\lambda}$ ، λ را طول جایگزیدگی می‌نامند [۳ و ۴]. در حقیقت عدم انتشار موج در محیط را جایگزیدگی می‌نامند. پدیدهٔ جایگزیدگی در فیزیک ماده چگال در مورد حالتهای الکترون در یک ماده ناخالص چندین دهه است که مورد مطالعه قرار گرفته است [۵].

اندرسون[۱] برای اولین بار نشان داد که ممکن است الکترون در یک سیستم با پتانسیل کاتوره‌ای جایگزیده شود. در واقع اندرسون نشان داد که دامنهٔ تابع موج به صورت نمایی کاهش می‌یابد، این پدیده راگذار فلز – عایق می‌نامند. بعدها با روشهای عددی و تئوری مقیاس بندی نشان داده شد که چنانچه شبکه دارای پتانسیل کاتوره‌ای غیر همبسته باشد، الکترون در یک بعد و دو بعد حتماً جایگزیده است و گذار فلز– عایق صورت نمی‌گیرد [۴ و ۶].

اخیراً علاقه برای مطالعهٔ سیستمهای بی‌نظم با همبستگی بلندبرد زیاد شده است زیرا در بسیاری از سیستمهای فیزیکی، زیستی و اقتصادی همبستگی بلندبرد دیده شده است. مانند رشتهٔ نوکلئیدها در DNA [۷] و نشان داده شده است که در سیستمهای با همبستگی بلندبرد بر خلاف تئوری مقیاس در یک بعد نیز گذار فلز– عایق وجود دارد [۸]. با استفاده از این

۱. Anderson

مطالعات به بررسی چگونگی انتقال الکترون در DNA پرداخته شده است [۹]. در بخش دوم این مقاله نحوهٔ تولید اعداد تصادفی با همبستگی بلندبرد توضیح داده خواهد شد.

امواجی که ما علاقه‌مند به مطالعهٔ آنها هستیم، امواج اکوستیک هستند. جاگزیدگی امواج اکوستیک می‌تواند بسیار مهم باشد. به عنوان مثال می‌تواند اطلاعات مهمی در مورد ساختار سنگهایی که در فاصلهٔ r از مرکز انفجار قرار دارند به ما بدهند (r باید در مقیاس طول جایگزیدگی باشد). یک روش استاندارد برای مطالعهٔ خواص امواج اکوستیک، در نظر گرفتن یک شبکه جرم و فنر است و با توجه به اینکه معادلهٔ شرودینگر برای یک شبکه با پتانسیل تصادفی بسیار شبیه معادلهٔ حرکت برای یک شبکهٔ الاستیک با ثابت فنر و جرم کاتوره‌ای است می‌توان از بسیاری از روشهای انجام شده در مورد معادلهٔ شرودینگر در این مسئله استفاده کرد [۱۰ و ۱۱]. در قسمت سوم این مقاله معادلهٔ حرکت این سیستم را به دست خواهیم آورد.

شبکه جرم و فنر با توجه به اینکه انتقال انرژی در سیستم کاملاً وابسته به مدهای ارتعاشی سیستم است می‌تواند در مورد چگونگی هدایت گرمایی در سیستمهای ناهمگن به کار رود [۱۲]

سیستمی که ما علاقمند به حل آن هستیم یک زنجیرهٔ جرم و فنر با ثابت فنر کاتوره‌ای و همبستگی بلندبرد است و با استفاده از روش عکس نسبت مشارکت و استفاده از چگالی حالتها که در بخش چهارم توضیح خواهیم داد نقش همبستگی را بر روی جایگزیدگی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲. روشهای تولید همبستگیهای بلندبرد برای سیستمهای بزرگ

یکی از روشهایی که برای تولید اعداد با همبستگی توانی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، فیلترکردن فوریه (FFM)[۱] است. این روش شامل فیلترکردن مولفه‌های فوریه از یک رشته غیر همبسته از اعداد احتمالی با فیلتر توانی مناسب به منظور وارد کردن همبستگی بین متغیرها می‌باشد.

۱. Fourier Filtering Method

۲. ۱. روش فیلتر کردن فوریه

یک‌سری اعداد احتمالی $\{u_i\}_{i=1,2,\ldots}$ را در نظر بگیرید که همبستگی خاصی ندارند. بنابراین تابع همبستگی عبارت است از

$$\langle u_i u_{i+l} \rangle \propto \delta_{l,0} \ , \qquad (۴)$$

که $\delta_{l,0}$ دلتای کرونکر است.

هدف این است که با استفاده از $\{u_i\}$ها یک سری اعداد $\{\eta_i\}$با تابع همبستگی توانی بلندبرد $C(l)$ به شکل زیر تولید کنیم.

$$C(l) = \langle \eta_i \eta_{i+l} \rangle \propto l^{-\gamma} \qquad (l \to \infty) \ , \qquad (۵)$$

γ نمای همبستگی است و همبستگیهای بلندبرد به بازه $0<\gamma<d$ مربوط می‌شوند که $d=1$ است. $S(q)$ را به عنوان تبدیل فوریه $C(l)$ تعریف می‌کنیم که شکل مجانبی آن عبارت است از

$$S(q) = \langle \eta_q \eta_{-q} \rangle \propto q^{\gamma-1} = q^{-\beta} \qquad (q \to 0) \ . \qquad (۶)$$

در این رابطه $\{\eta_q\}$ تبدیل فوریهٔ $\{\eta_i\}$ است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\eta_q = [S(q)]^{1/2} u_q \qquad (۷)$$

که $\{u_q\}$ها ضرایب تبدیلات فوریهٔ $\{u_i\}$ هستند [۱۳].

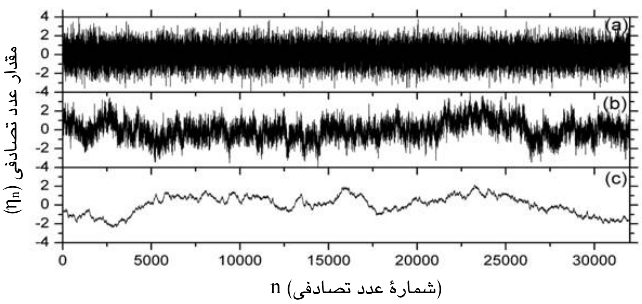
الگوریتم عددی FFM شامل مراحل زیر است:

۱- عبارت یک بعدی $\{u_i\}$ که اعداد احتمالی غیر همبسته با توزیع گاوسی هستند تولید می‌کنیم و ضرایب تبدیلات فوریهٔ $\{u_q\}$ را محاسبه می‌کنیم.

۲- با استفاده از روابط بالا $\{\eta_q\}$ را محاسبه می‌کنیم.

۳- از $\{\eta_q\}$ تبدیل فوریهٔ معکوس می‌گیریم و $\{\eta_i\}$ را به دست می‌آوریم. این عبارت در فضای حقیقی متناسب با تابع همبستگی توانی خواسته شده در معادلهٔ (۵) است.

روشهای مختلفی برای محاسبه میزان همبستگی یک سری اعداد وجود دارد. یکی از دقیقترین این روشها روش حذف شیب است که می‌تواند میزان همبستگیهای بلندبرد را محاسبه کند. به همین دلیل به منظور آزمایش میزان همبستگی اعداد تولید شده از روش حذف شیب استفاده کرده‌ایم [۱۴]. یک سری از اعداد تولید شده با استفاده از این الگوریتم در شکل ۱ نشان داده شده است. به وضوح می‌توان



شکل ۱. نویز تصادفی با طول ۳۲۰۰۰ و همبستگی مختلف که به وسیلهٔ الگوریتم FFM تولید شده است. در نمودار (a) $\beta=۰$ است که یک نویز بدون همبستگی را نشان می‌دهد. برای نمودار (b) $\beta=۱$ است و برای نمودار (c) $\beta=۲$ است.

تأثیر افزایش همبستگی را در نمودارها مشاهده کرد.

۳. معادلهٔ حرکت

در ابتدا ما یک سیستم ساده که شامل N ذره ا ست و به وسیله $(N-۱)$ فنر به هم متصل شده‌اند را در نظر می‌گیریم. چنانچه جرم هر ذره را m_l و ثابت فنر را k_l در نظر بگیریم انرژی جنبشی این سیستم برابر $\frac{۱}{۲}\sum_{l=۰}^{N} m_l \dot{x}_l^۲$ و انرژی پتانسیل آن (با فرض این که همسایه‌ها در نظر گرفته شود) برابر $\frac{۱}{۲}\sum_{l=۰}^{N} k_{l+۱}(x_{l+۱}-x_l)^۲$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت برابر است با

$$m_l\ddot{x}_l - k_{l+۱}(x_{l+۱}-x_l) - k_l(x_{l-۱}-x_l) = ۰ \qquad (۱)$$

با فرض اینکه مکان ذره با زمان دارای رابطه $x_l = z_l e^{i\omega t}$ باشد معادله ساده می‌شود و می‌توان آن را به شکل ماتریسی زیر نوشت.

$$(\mathbf{K}+\omega^۲\mathbf{M})\mathbf{Z}=۰ \qquad (۲)$$

به طوری که $\mathbf{M}$ یک ماتریس قطری است و عناصر روی قطرآن برابر m_l هاست و ماتریس $\mathbf{K}$ یک ماتریس سه قطری است که:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(l,l)&=-(k_{l+۱}+k_l)\\ \mathbf{K}(l,l+۱)&=k_{l+۱}\\ \mathbf{K}(l-۱,l)&=k_l\end{aligned} \qquad (۳)$$

در صورتی که تمام جرمها را برابر m و تمام ثابتهای فنر را برابر k در نظر بگیریم، معادله به شکل $(\mathbf{K}+\omega^۲ m\mathbf{I})\mathbf{Z}=۰$ در می‌آید

که در آن

$$\mathbf{K}=k\begin{pmatrix}-۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۱ & -۲ & ۱ & & \cdots\\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱ & \cdots\\ \vdots & & & \ddots & ۱\\ ۰ & \cdots & & ۱ & -۲\end{pmatrix}$$

می‌توان با محاسبه ویژه مقادیر $\mathbf{K}$ مقادیر ω را به دست آورد

$$\omega_l^۲=\left[۲-۲\cos\left(\frac{l\pi}{N}\right)\right]\frac{k}{m}$$

و ویژه توابع نظیرآن برابر است با

$$z_l=\left\{\sin\left(\frac{l\pi}{N}\right),\sin\left(\frac{۲l\pi}{N}\right),...,\sin\left(\frac{(N-۱)l\pi}{N}\right)\right\}$$

می‌توان ثابت کرد که ω های مجاز برای سیستم از رابطهٔ $\omega<۲\sqrt{\frac{k}{m}}$ به دست می‌آید و یک موج با $\omega>۲\sqrt{\frac{k}{m}}$ نمی‌تواند در سیستم گسترش یابد. نکتهٔ دیگر که می‌توان از ویژه توابع به دست آورد این است که اگر ویژه توابع نظیر ویژه مقدار ω_l را در نظر بگیریم می‌بینیم که با افزایش l تعداد صفرهای تابع موج سیستم افزایش می‌یابد تا در نهایت به مقدار $N-۱$ می‌رسد [۱۵].

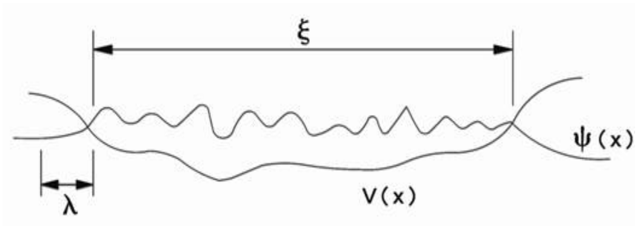
سیستمی که ما به حل آن علاقمند هستیم سیستمی است با جرم ثابت و برابر یک و ثابت فنرهای تصادفی. ما با استفاده از روش فیلتر کردن فوریه (FFM) یک سری اعداد تصادفی با همبستگی بلندبرد تولید می‌کنیم و مقادیر ثابتهای فنر سیستم را نظیر این اعداد قرار می‌دهیم، به صورتی که میانگین ثابتهای فنر برابر ۵ و واریانس آن برابر واحد باشد. با توجه به اینکه حل تحلیلی این سیستمهای تصادفی ناممکن است از روشهای عددی برای حل این سیستم استفاده می‌کنیم [۶ و ۱۶].

۴. روشهای عددی

۴. ۱. نسبت عکس مشارکت[۱]

یکی از پارامترهایی که می‌توان با محاسبهٔ آن پی به جایگزیدگی موج در سیستم برد، نسبت عکس مشارکت است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. Inverse participation ratio



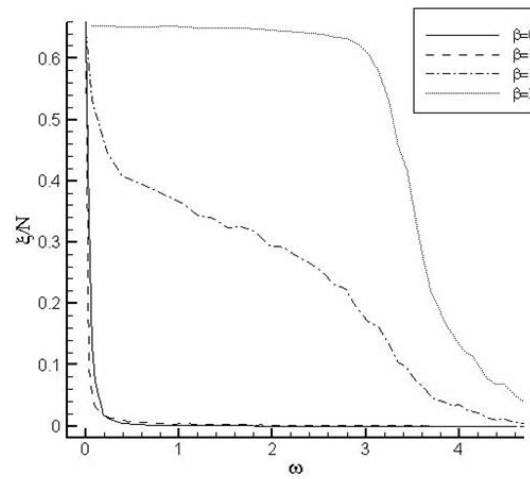
شکل ۲. جایگزیدگی تابع موج ψ در یک سیستم کوانتمی با پتانسیل تصادفی V نشان داده شده است. طول جایگزیدگی برابر λ و نسبت عکس مشارکت برابر ξ است.

$$\xi(\omega)=\frac{\sum_{n=1}^{N}u_n^2}{\sum_{n=1}^{N}u_n^4}\ , \tag{۹}$$

که درآن u_n ها ویژه توابع نظیر ω هستند و با قطری کردن ماتریس **K** به دست می‌آیند. با محاسبهٔ ξ به ازای تمام ω ها می‌توان فهمید به ازای چه مقادیری از ω موج جایگزیده است. برای حالت گسترده $\frac{\xi}{N}$ به سمت یک عدد ثابت میل می‌کند ولی برای حالت جایگزیده $\frac{\xi}{N}$ به سمت صفر میل می‌کند.

نکتهٔ قابل ذکر، مقایسهٔ طول جایگزیدگی و ξ است. همان طور که در شکل ۲ برای یک سیستم کوانتمی مشاهده می‌شود طول جایزیدگی برابر است با طولی که دامنه تابع موج در سیستم به $\frac{1}{e}$ مقدار خود کاهش می‌یابد ولی ξ برابر طولی است که تابع موج در آن طول گسترده است. اگر چه برای یک سیستم گسترده با طول بی‌نهایت هر دوی این مقادیر بی‌نهایت است، ولی از نظر فیزیکی دارای معانی مختلفی هستند که باید دقت کرد [۶ و ۱۵]. برای سیستمهای کلاسیک نیز این تفاوت برقرار است.

در شکل ۳ مقدار $\frac{\xi}{N}$ برای یک سیستم با طول 2^{20} محاسبه شده است. می‌توان نقش پارمتر همبستگی را در جایگزیدگی تابع موج مشاهده کرد به طوری که چنانچه دیده می‌شود برای حالت کاملاً کاتوره‌ای، $\beta=0$ ، تعداد حالتهای گسترده بسیار کمتر از حالتهای جایگزیده است و پارامتر $\frac{\xi}{N}$ به

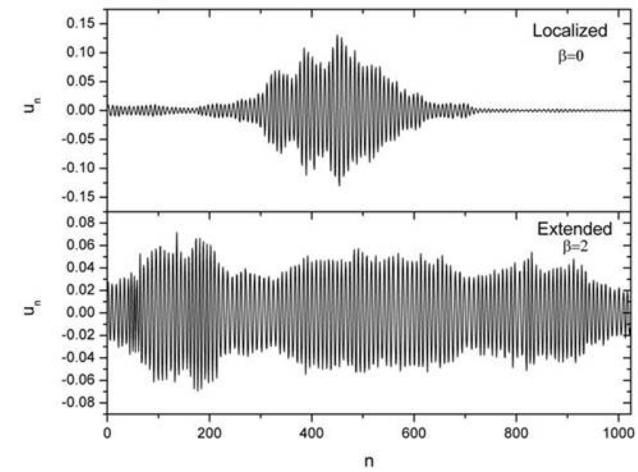


شکل ۳. نمودار $\frac{\xi}{N}$ برای یک سیستم با طول 2^{20} که به ازای چندین نمای همبستگی رسم شده است.

سرعت به سمت صفر میل می‌کند. با افزایش پارامتر β تا حد ۱٫۴ تغییرات زیادی مشاهده نمی‌شود و تقریباً تمام حالتها جایگزیده هستند ولی چنانچه پارامتر β را افزایش دهیم تعداد حالتهای گسترده به سرعت افزایش می‌یابد. می‌توان این طور بیان کرد که با افزایش نظم در سیستم حالتهای گسترده بیشتر می‌شوند.

برای درک بهتر مفهوم جایگزیدگی می‌توان تابع موج را در طول سیستم رسم کرد یعنی u_n را به ازای مقادیر n رسم کرد. در شکل ۴ تابع موج برای یک سیستم به طول 2^{10} و فرکانس ۱٫۶ در دو حالت جایگزیده و گسترده رسم شده است. حالت جایگزیده مربوط به $\beta=0$ و حالت گسترده مربوط به $\beta=2$ است. مشاهده می‌شود در حالت جایگزیده در نقاطی از سیستم دامنه تابع موج صفر است و نشان می‌دهد که موج در این سیستم نمی‌تواند انتقال یابد.

با توجه به این که ابعاد ماتریس بسیار بزرگ است برای محاسبهٔ ویژه بردارها و ویژه مقدارها از روشهای معمولی نمی‌توان استفاده کرد. ما برای محاسبهٔ آنها از توابع کتابخانه‌ای LAPACK استفاده کرده‌ایم. در این توابع از بهترین الگوریتمهای موجود برای محاسبات ریاضی مانند محاسبهٔ ویژه مقادیر، حل معادلات خطی و غیره استفاده شده است و می‌توان



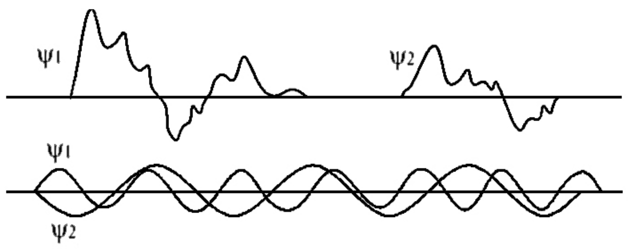
شکل ۴. نمودار تابع موج برای یک سیستم بـه طـول 2^{10} و فرکـانس ۱، ۶ در دو حالت جایگزیده و گسترده. حالت جایگزیده مربـوط بـه $\beta=0$ و حالت گسترده مربوط به $\beta=2$ است.

آنها را در برنامه‌های فورترن و C فراخوانی کرد. از مزایای ایـن توابع می‌توان به استاندارد بودن و سرعت بالای آنها در مقایسـه با دیگر روشها اشاره کرد. توابعی که ما استفاده کـردیم بـر پایـهٔ الگوریتم QR است. در الگوریتم QR از این اصل اسـتفاده شـده که هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت ضـرب دو مـاتریس متعامد و مثلثی نوشت. بر اساس این می‌توان ماتریس مورد نظـر را به صورت یک ماتریس مثلثی نوشت که ویژه مقادیر آن همان عناصر روی قطر آن است.

۴. ۲. آمار ترازها[۱]

یکی از روشهای تشخیص حالتهای جایگزیـده در یـک سیـستم استفاده از آمار ترازهـا اسـت. بـا توجـه بـه اینکـه در حالتهـای جایگزیــده فرکانــسها بــر روی یکــدیگر تــأثیر نمــی‌گذارنــد فرکانسهای حالتهای جایگزیـده بـدون همبـستگی هـستند. ایـن مسئله را می‌توان به صـورت سـاده ایـن طـور توجیـه کـرد کـه چنانچه دو موج گسترده را در نظر بگیـریم چـون بایـد ایـن دو موج متعامد باشند در نتیجه به هم وابسته هـستند و نمـی‌تواننـد هر فرکانسی را اختیار کنند. از طرف دیگر چنانچه هـر کـدام از امواج تنها در ناحیه‌ای گسترده شده باشند شرط تعامـد را بـدون

۱. Level Statistics



شکل ۵. در شکل بالا دو موج جایگزیده نشان داده شده است. همان طور که مشخص است این دو موج کاملاً مستقل از هـم هـستند و در نتیجه فرکانس آنها نیز مستقل است. در مقابل در شکل پایین دو موج گسترده نشان داده شده است که کاملاً به هم وابسته هستند.

اینکه به هم وابسته باشند ارضاء می‌کنند و در نتیجه فرکانـسهای آنها نیز مستقل از هم هستند، یعنی همبستگی ندارند، این مسئله در شکل ۵ نمایش داده شده است.

از مکانیک آماری می‌دانیم تابع توزیع اخـتلاف رویـدادهای تصادفی به شـکل پواسـونی اسـت. بنـابراین اگـر ویـژه مقـادیر مـاتریس K را محاسـبه کنـیم (فرکانـسهای سیـستم) و سـپس اختلاف نزدیکتـرین ویـژه مقـادیر را بـه دسـت آوریـم از روی چگالی توزیع به دست آمـده مـی‌تـوان فهمیـد کـه آیـا سیـستم جایگزیده است یا گسترده. چنانچه توزیع یک توزیع پواسـونی[۲] باشد، یعنی:

$$P_p(s) = e^{-s} \quad , \qquad (۱۰)$$

امواج در سیستم جایگزیده‌اند و از فیزیک آشوب می‌دانـیم اگـر توزیع به صورت ویگنر– دایسون[۳] باشد

$$P_w(s) = a_\alpha s^\alpha e^{-c_\alpha s^2} \quad , \quad \alpha = 1,2,4 \qquad (11)$$

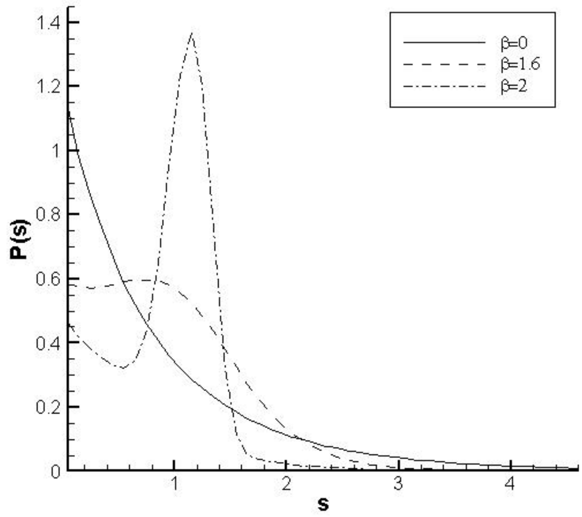
امواج در سیستم گسترده‌اند. مقادیر ضـرایب بـه وسـیله بهنجـار کردن معادله به دست می‌آید [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۱ و ۲۲]:

$$a_1 = \pi/2 \quad a_2 = 32/\pi^2 \quad a_4 = 2^{18}/3^6\pi^3$$
$$c_1 = \pi/4 \quad c_2 = 4/\pi \quad c_4 = 64/9\pi$$

مـا تـابع توزیـع اخـتلاف ترازهـا را بـرای سیـستمهایی بـا همبستگیهای مختلـف محاسـبه کـرده‌ایـم. چنانچـه در شـکل ۶

۲. Poissonian

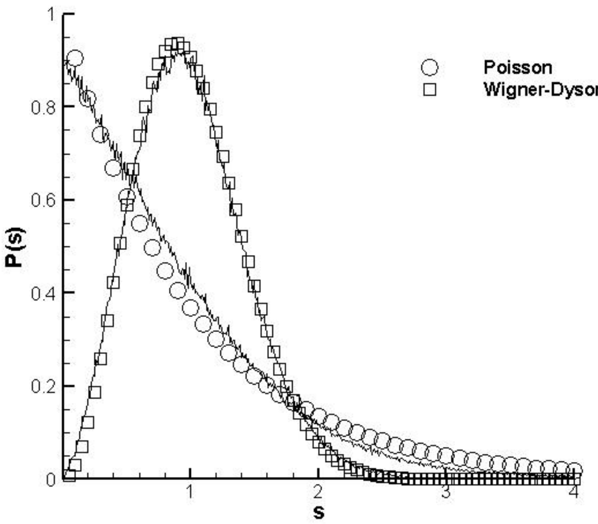
۳. Wigner-Dyson



شکل ۶. تابع توزیع اختلاف ویژه حالتها برای یک سیستم با طول 2^{20} و نماهای همبستگی مختلف.

مشاهده می‌شود، برای سیستم کاملاً تصادفی توزیع بسیار نزدیک به توزیع پواسونی است ولی با افزایش همبستگی تابع توزیع ترکیبی از دو توزیع است که نشان می‌دهد تحت چنین شرایطی همان طور که در روش قبلی دیده شد برای بعضی از ویژه مقادیر تابع موج گسترده و برای بعضی دیگر جایگزیده است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش همبستگی حالات گسترده افزایش می‌یابد.

برای جداسازی حالتهای جایگزیده از حالتهای گسترده و به دست آوردن نقطهٔ بحرانی که در آن سیستم از حالت گسترده به حالت جایگزیده می‌رود ما از روشی استفاده کردیم که بر اساس تئوری گفته شده است. ما ابتدا ویژه مقادیر به دست آمده را به دو دسته تقسیم می‌کنیم و تابع توزیع اختلاف هر دسته را جداگانه رسم می‌کنیم. می‌بینیم که دسته اول که شامل ویژه مقادیر کوچکتر است بیشتر به توزیع ویگنر–دایسون نزدیک است و دستهٔ دوم به توزیع پواسون نزدیکتر است. می‌توان طول این دو دسته را به شرط آن که مجموع طول دو دسته ثابت و برابر طول سیستم باشد آن قدر تغییر داد تا نمودارهای به دست آمده با دقت خوبی روی توزیعهای پواسون و ویگنر– دایسون مماس شود. در این حالت می‌توان



شکل ۷. جداسازی حالتها برای یک سیستم با طول 2^{20} و نمای همبستگی ۱/٦ صورت گرفته است. تقریباً تعداد حالتهای جایگزیده و گسترده برابر بوده و فرکانس بحرانی برابر ۲/۵ است. تابع توزیع دو حالت بسیار نزدیک توزیعهای پواسون و ویگنر – دایسون است.

دستهٔ اول را حالتهای گسترده و دستهٔ دوم را حالتهای جایگزیده نامید و مرز بین این دو دسته را نقطهٔ بحرانی نامید [۲۰].

شکل ۷ جداسازی حالتهای جایگزیده و گسترده را نشان می‌دهد که با روش گفته شده برای سیستمی با پارامتر همبستگی ۱/۶ انجام شده است. در این سیستم حدود نیمی از حالات جایگزیده و نیمی دیگر گسترده است. با استفاده از همین روش می‌توان مقدار فرکانس بحرانی را به دست آورد. در جدول ۱ فرکانس بحرانی به ازای تعدادی نمای همبستگی که به این روش محاسبه شده آورده شده است.

همان طور که در روش نسبت عکس مشارکت دیده شد، برای حالتهای $\beta<1/4$ اکثر حالتها جایگزیده هستند. در این روش نیز فرکانس بحرانی برای حالتهای با $\beta<1/4$ بسیار کوچک است و برای حالتهای با نمای همبستگی بزرگتر به سرعت رشد می‌کند که با نتایج قبلی مطابقت دارد.

جدول ۱. فرکانس بحرانی بر حسب نمای β.

نمای β	فرکانس بحرانی ω_c
۱/۴	۰/۲۱ ± ۰/۰۱
۱/۵	۰/۷۰ ± ۰/۰۱
۱/۶	۲/۵ ± ۰/۱
۱/۷	۳/۰± ۰/۱
۱/۸	۳/۲ ± ۰/۱
۲/۰	۳/۷ ± ۰/۱

۵. نتیجه‌گیری

به طور خلاصه با به کارگیری دو روش نسبت عکس مشارکت و تابع توزیع اختلاف ویژه حالتها دیده شد در سیستم جرم و فنر با جرم ثابت و ثابت فنر تصادفی ویژه حالتها به دو دستهٔ حالتهای جایگزیده و حالتهای گسترده تقسیم می‌شوند. این حالتها با یک فرکانس بحرانی از یکدیگر تفکیک می‌شوند. چنانچه همبستگی ثابتهای فنر را افزایش دهیم تا حد β<۱/۴ فرکانس بحرانی تغییرات زیادی نخواهد کرد ولی از این حد بالاتر فرکانس بحرانی افزایش یافته که معنی آن افزایش حالتهای گسترده است. این فرکانسهای بحرانی برای نماهای همبستگی مختلف محاسبه شده است. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت با افزایش همبستگی، نظم سیستم بیشتر شده و حالتهای گسترده در سیستم افزایش می‌یابد.

مراجع

1. N Bleistein, J K Cohen and J W Stockwell, "*Jr., Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion*" (Springer, New York, 2001).
2. F Shahbazi, A Bahraminasab, S Mehdi Vaez Allaei, M Sahimi and M Reza Rahimi Tabar, *Phys. Rev. Lett*, **94** (2005) 165505.
3. P W Anderson, *Phys. Rev*. **109** (1958) 1492; N F Mottand, W D Twose, *Adv. Phys*. **10** (1961) 107.
4. E Abrahams, P W Anderson, D C Licciardello and T V Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett*. **42** (1979) 673.
5. P Sheng, "*Introduction to Wave Scattering, Localizationand Mesoscopic Phenomena*" (Academic, San Diego, 1995); M Sahimi, "*Heterogeneous Materials,*" Vol. II (Springer, New York, 2003).
6. B Kramer and A Mackinnon, *Rep. Prog. Phys*. **56** (1993) 1469-1564.
7. H A Makse, S Havlin, M Schwartz and H E Stanley, *Phys. Rev*. E **53** (1996) 5445-5449.
8. H Shima, T Nomuva and T Nakayama cond-mat / 0407019 v1 (2004).
9. 10P Carpena, P Bernaola-Gala´n, P Ch Ivanov and H E Stanley, *Nature*. **418** (2002) 955.
10. P Dean, *Proc. Phys. Soc London* **84** (1964) 727.
11. F Dominguez-Adame and E Mocia, *Phys Rev* B. **48** (1993) 6054.
12. F A B F de Moura, M D Coutinho-Filho, E P Raposo *Phys Rev* B. **68** (2003) 012202.
13. H A Makse, S Havlin, M Schwartz and H E Stanley, *Phys. Rev*. E **53** (1996) 5445-5449.
14. Z Chen, P Ch Ivanov, K Hu and H E Stanley, *Phys. Rev*. E **65** (2002) 041107.
15. N W Ashcroft and N D Mermin, "*Solid State Physics*" (Holt-Saunders, London, 1976).
16. P Dean *Reviews of Mdern Physics* v **44**, (1972) 2.
17. M L Mehta, "*Random Matrices*", 2nd ed.(Academic Press, New York, 1991).
18. H Obuse and K Yakubo, *Phys. Rev*. B **71** (2005) 035102.
19. S N Evangelou, *Phys. Rev*. B **39** (1989) 12895.
20. S Ciliberti and T S Grigera, *Phys Rev* E. **70** (2004) 061502.
21. O Bohigas, "*Random Matrix Theory and Chaotic Dynamic*," (Amsterdam: north-Holland, 1989).
22. B A Van Tiggelen, "Localization of Waves" (unpublished).