

## محاسبه ترازهای انرژی بر طبق مدل هسته تغییر شکل یافته سه محوری (تغییر شکل بدون تقارن محوری)

محمد فرهاد رحیمی<sup>۱</sup>، وحید میرزایی<sup>۲</sup> و رحیم خباز خرامه

بخش فیزیک دانشگاه فردوسی، مشهد

(دریافت مقاله: ۸۵/۵/۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۷/۱)

### چکیده

ترازهای انرژی در پتانسیل هسته‌های غیر کروی را می‌توان به وسیله مدل نیلسون تعیین کرد. اما مدل نیلسون تغییر شکل هسته را به گونه‌ای در نظر می‌گیرد که هسته دارای تقارن محوری باشد. ما سعی کرده‌ایم که ترازهای انرژی هسته‌های غیر کروی را با فرض این که تغییر شکل به گونه‌ای باشد که هسته را به صورت بیضوی در نظر بگیریم، به وسیله اختلال مرتبه اول واگن توسط برنامه کامپیوتری به دست آوریم. هامیلتونی اصلی  $H$  عبارتست از هامیلتونی مدل لایه‌ای هسته‌ای  $H_0$  و جمله اختلالی  $H_1$ ، ما این معادلات را برای اعداد کوانتومی  $\Omega$ ،  $l$ ،  $j$ ،  $N$  متناظر با پارامترهای مدل نیلسون و مدل تغییر شکل یافته سه محوری، برای مقادیر  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{3}{2}$ ،  $\frac{5}{2}$ ،  $\frac{7}{2}$  و  $l = 1, 2, 3$  حل کرده و ترازهای انرژی مربوطه را رسم کرده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** مدل نیلسون، مدل تغییر شکل یافته سه محوری، اعداد کوانتومی  $\Omega$ ،  $l$ ،  $j$ ،  $N$ ، ترازهای انرژی، هامیلتونی نیلسون و هامیلتونی تغییر شکل یافته سه محوری

### ۱. مقدمه

پتانسیلی توسط مدل نیلسون قابل محاسبه است که تلفیقی از مدل لایه‌ای هسته‌ای و مدل جمعی سیستم‌های دوران کننده است، اما مدل نیلسون در واقع هسته را به شکل بیضی داور با تقارن محوری با معادله  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  در نظر می‌گیرد. اما در مدل بدون تقارن محوری هسته به صورت بیضوی بدون تقارن محوری با معادله  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  در نظر گرفته می‌شود. هامیلتونی اصلی  $H$  مربوط به این شکل هسته عبارتست از هامیلتونی مدل لایه‌ای هسته‌ای  $H_0$  و جمله اختلالی  $H_1$  به صورت زیر:

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + Cl \cdot \vec{s} + D\vec{l}^2, \quad (2)$$

مدل لایه‌ای هسته می‌تواند اعداد مرموز و خواص بسیاری از ترازهای هسته‌ای را توضیح دهد. مشکل مدل لایه‌ای آن است که بسیاری از گشتاورهای چهار قطبی مشاهده شده نسبت به مقدار پیش بینی شده توسط مدل لایه‌ای بسیار بزرگترند. وین واتر نشان داد که می‌توان در قالب مفاهیم مدل لایه‌ای چنین گشتاورهای بزرگی را با این فرض که مغز هسته تغییر شکل یافته است توضیح داد. یعنی اگر شکل مغز هسته بیضوی باشد گشتاوری متناسب با تغییر شکل آن به دست می‌آید. این تغییر شکل مغز هسته معرف اثرات چند جسمی است و در نتیجه مدهای جمعی تحریک شده امکان پذیر می‌شوند. هسته تغییر شکل یافته به صورت یک پتانسیل غیر کروی عمل می‌کند. ترازهای انرژی یک تک ذره در چنین

بیانگر حالت بیضوی شکل می‌باشد. پارامتر تغییر شکل  $\delta$  مرتبط با  $\beta$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cong 0.946\beta. \quad (5)$$

پس می‌توان رابطه (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$R_i = R_0 \left[ 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi i}{3}\right) \right], \quad (6)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad R_1 = x, R_2 = y, R_3 = z,$$

که  $i = 1, 2, 3$  در  $R_i$  به ترتیب همان مؤلفه‌های  $x, y, z$  هستند. به طور مشابه به جای این که تغییر شکل هسته را به تغییر شعاع آن نسبت دهیم می‌توان این تغییر را به بسامد زاویه‌ای آن نسبت داد و برای هر یک از مؤلفه‌های  $x, y, z$  بسامد زاویه‌ای یک سهم جداگانه  $\omega_i$  در نظر گرفت.

$$\omega_i = \omega_0 \left[ 1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi i}{3}\right) \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

و سپس با قراردادن آن در پتانسیل نوسانگر، هامیلتونی مطلوب را به دست آورد.

به روش دیگر می‌توان معادله یک بیضوی در مختصات متصل به جسم به صورت زیر نوشت.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (8)$$

که  $x, y, z$  در مختصات دکارتی بوده و در مختصات کروی به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\theta) \cos(\varphi), & y &= R \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z &= R \cos(\theta), & x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \end{aligned}$$

چون حجم هسته ثابت فرض می‌شود، لذا برای تساوی حجم کره‌ای با شعاع  $R$  و بیضوی معادله (۸) باید شرط زیر برقرار باشد:

$$abc = R^3 \quad (9)$$

با انتخاب  $a, b, c$  به صورت زیر

$$a = R_0 e^{-\delta_1/3}, b = R_0 e^{-\delta_2/3}, c = R_0 e^{(\delta_1 + \delta_2)/3} \quad (10)$$

و با فرض تغییرات کوچک  $\delta$  و بسط و نگه داشتن جملات خطی نسبت به  $\delta$  خواهیم داشت:

$$H_1 = -m\omega_0^2 r^2 \lambda \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin(\gamma) Y_{2,-2} + \beta \cos(\gamma) Y_{2,0} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin(\gamma) Y_{2,2} \right\} \quad (3)$$

## ۲. تغییر شکل سه محوری

اگر هسته را شبیه به قطره مایع غیر قابل تراکمی در نظر بگیریم، شعاع انحنای هسته می‌تواند به وسیله برهمه‌نی هماهنگهای کروی به صورت زیر بر حسب پارامترهای شکل  $\alpha_{\chi\mu}$  نوشته شود.

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\chi\mu} \alpha_{\chi\mu}^* Y_{\chi\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (4)$$

به طوری که  $\chi$  درجه قطبش نوسانگر و  $\mu$  تصویر آن می‌باشد.  $R_0$  نشان دهنده شعاع در حالت تعادل کروی است.

مقادیر  $\chi = 0, 1$  با فرضیات ما قابل حذف شدن می‌باشند. زیرا به ازای  $\chi = 0$  تغییر شکل به گونه‌ای است که خلاف فرض غیر قابل تراکم بودن هسته می‌باشد و  $\chi = 1$  نشان دهنده تغییر مکان هسته (تغییر مرکز تکانه) می‌باشد.

اولین مرتبه تغییر شکل، از مرتبه چهار قطبی معادل با  $\chi = 2$  می‌باشد که یک تغییر شکل بیضوی (سه محوری) را بیان می‌کند. برای به دست آوردن تغییر شکل بیضوی می‌توان تعداد پنج پارامتر  $\alpha_{\chi\mu}$  مربوط به  $\chi = 2$  را به دو پارامتر تغییر شکل به صورت زیر تقلیل داد:

$$\begin{aligned} \alpha_{20} &= \beta \cos(\gamma), \\ \alpha_{22} &= \alpha_{2,-2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin(\gamma), \end{aligned}$$

که عامل  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  از آنجا انتخاب شده است که:

$$\sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \sum_{\mu} |\alpha'_{2\mu}|^2 = \beta^2,$$

یعنی تحت تبدیل چرخش باید ناوردا باشند.

پارامتر  $\beta$  نشان دهنده اندازه تغییر شکل هسته (کشیدگی یا پهن شدگی) می‌باشد در حالی که  $\gamma$  متغیر زاویه‌ای وابسته به سهم محورهای اصلی نسبت به حالت کروی است. مقدار  $\gamma = 0^\circ$  متناظر با حالت کشیده (سیگاری شکل) و  $\gamma = 60^\circ$  متناظر با حالت پخت (دیسک شکل) است. مقادیر میان این دو

$$V_{oH} = \frac{m}{\gamma} R^\gamma \omega_s^\gamma \left[ \frac{\sin^\gamma(\theta) \cos^\gamma(\varphi)}{\left[ 1 + \beta \sqrt{\frac{\delta}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right]^\gamma} + \frac{\sin^\gamma(\theta) \sin^\gamma(\varphi)}{\left[ 1 + \beta \sqrt{\frac{\delta}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \right]^\gamma} + \frac{\cos^\gamma(\theta)}{\left[ 1 + \beta \sqrt{\frac{\delta}{4\pi}} \cos(\gamma) \right]^\gamma} \right]$$

$$\cong \frac{m}{\gamma} R^\gamma \omega_s^\gamma \left\{ 1 - 2\beta \cos(\gamma) Y_{\gamma,0} - \frac{2}{\sqrt{3}} \beta \sin(\gamma) (Y_{\gamma,2} + Y_{\gamma,-2}) \right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma} m \omega_s^\gamma R^\gamma - m R^\gamma \omega_s^\gamma \beta \left[ Y_{\gamma,0} \cos(\gamma) + \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{3}} (Y_{\gamma,2} + Y_{\gamma,-2}) \right] \quad (19)$$

با مقایسه رابطه اخیر با معادله (۴) پارامترهای تغییر شکل به صورت زیر در می آیند:

$$\alpha_{\gamma,\pm 1} = 0,$$

$$\alpha_{\gamma,0} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{\delta}} (\delta_1 + \delta_2) = \beta \cos(\gamma),$$

$$\alpha_{\gamma,\pm 2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\delta_2 - \delta_1) = \frac{\beta}{\sqrt{3}} \sin(\gamma).$$

بنابراین تغییر شکل چهار قطبی را می توان به وسیله دو پارامتر  $\beta, \gamma$  در دستگاه متصل به جسم بیان کرد. صحت رابطه (جمله اختلاسی) را می توان به وسیله قرار دادن

$$\text{در } \gamma = 0, \delta_1 = \delta_2 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \beta$$

### ۳. هامیلتونی مدل تغییر شکل یافته سه محوری

با ملاحظه هامیلتونی مدل تغییر شکل یافته نیلسون می توان هامیلتونی تغییر شکل یافته سه محوری متناظر را نوشت. با در نظر گرفتن هامیلتونی مدل نیلسون به صورت زیر:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{\gamma} m (\omega_\perp (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2) + C\bar{I} \cdot \bar{s} + D\bar{I}^2,$$

ملاحظه می شود که اگر در معادله بالا سهم  $\omega_y$  و  $\omega_x$  را از هم جدا کنیم می توان به هامیلتونی مدل تغییر شکل یافته سه محوری رسید.

$$e^{-\delta_1/\gamma} = 1 - \delta_1/\gamma + \dots \quad (11a)$$

$$e^{-\delta_2/\gamma} = 1 - \delta_2/\gamma + \dots, \quad (11b)$$

$$e^{(\delta_1 + \delta_2)/\gamma} = 1 + (\delta_1 + \delta_2)/\gamma + \dots, \quad (11c)$$

و در نتیجه

$$R^\gamma \cong \frac{x^\gamma}{(1 - \delta_1/\gamma)^\gamma} + \frac{y^\gamma}{(1 - \delta_2/\gamma)^\gamma} + \frac{z^\gamma}{(1 + (\delta_1 + \delta_2)/\gamma)^\gamma}. \quad (12)$$

با توجه به این که داریم:

$$\omega_{x,y,z} = \frac{R}{a_{x,y,z}} \omega_s, \quad (13)$$

که  $a_x, a_y, a_z$  به ترتیب متناظر با  $a, b, c$  در معادله (۸) هستند و با تعریف

$$\delta_1 = -\sqrt{\frac{4\delta}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right), \quad (14)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{4\delta}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right),$$

و یا به عبارت دیگر

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\delta_2 - \delta_1) = \frac{\beta}{\sqrt{3}} \sin(\gamma) \quad (15)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{15}} (\delta_2 + \delta_1) = \beta \cos(\gamma)$$

خواهیم داشت:

$$a_x = R \left\{ 1 + \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{\beta}{2} \left[ \sin(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\gamma) \right] \right\} \quad (16a)$$

$$a_y = R \left\{ 1 + \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{\beta}{2} \left[ \sin(\gamma) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\gamma) \right] \right\} \quad (16b)$$

$$a_z = R \left\{ 1 + \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \frac{\beta}{\sqrt{3}} \cos(\gamma) \right\} \quad (16c)$$

و بنابراین طبق معادله (۱۳)

$$\omega_i = \frac{\omega_s}{1 + \beta \sqrt{\frac{\delta}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi i}{3}\right)}, \quad (17)$$

که  $i = 1, 2, 3$  و به ترتیب معرف  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  می باشند. و در نتیجه پتانسیل نوسانگر نایکروند به صورت زیر در خواهد آمد:

$$V_{oH} = \frac{m}{\gamma} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (18)$$

$$\hbar\omega \cong 41A^{-1/2} \text{ MeV}.$$

#### ۴. محاسبه ویژه توابع هامیلتونی اختلال نیافته H.

ویژه توابع هامیلتونی بدون تغییر شکل به صورت زیر می‌باشد.

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = N_{nl} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda r^2\right) r^l \frac{(-1)^n}{n!} F_1\left(-n, l + \frac{3}{2}, \lambda r^2\right) \left[\Phi_l^j(\theta, \varphi)\right], \quad (26)$$

که در آن، قسمت زاویه‌ای، ویژه تابع عملگرهای  $\vec{S}^2, \vec{L}^2, J_z^2, \vec{J}^2$  است. تابع  $F_1$  در قسمت شعاعی همان تابع فوق هندسی است.  $F_1$  به ترتیب به پارامترهای  $n$  (تعداد گره‌های تابع شعاعی) و  $l$  (اندازه حرکت زاویه‌ای) وابسته است. اعداد  $n, l$  با عدد کوانتومی  $N$  (عدد کوانتومی نوسانگر) به صورت زیر رابطه دارند.

$$N = 2n + l - 2 \quad l \leq N \quad \text{و} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

ضریب بهنجارش  $N_{n,l}$  به صورت زیر است.

$$N_{nl} = \frac{2^{l/2-n/2+2/2} [(2n+2l-1)!!]^{1/2}}{\pi^{1/2} [(n-1)!!]^{1/2} (2l+1)!!}, \quad (28)$$

که در آن

$$(2l+1)!! = \frac{(2l+1)!}{2^l l!} \quad (29)$$

#### ۵. محاسبه ویژه مقادیر

ویژه مقادیر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ کروی به صورت زیر است.

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2, \quad H\Psi = E\Psi, \quad (30)$$

$$E = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2}\right).$$

دیدیم که جملات  $D\vec{L}^2$  و  $C\vec{L}^2 \cdot \vec{s}$  در هامیلتونی ظاهر می‌شوند. با فرض معادله (۲۶) خواهیم داشت:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}, \quad (31)$$

$$\vec{j}^2 |N, l, j, \Omega\rangle = \hbar^2 j(j+1) |N, l, j, \Omega\rangle, \quad (32)$$

$$H_D = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + C\vec{L} \cdot \vec{s} + D\vec{L}^2 = h_{sph} - \hbar\omega_c \beta \lambda R^2 \left[ \cos(\gamma) Y_{\gamma,0} + \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}} (Y_{\gamma,2} + Y_{\gamma,-2}) \right], \quad (20)$$

به طوری که

$$h_{sph} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 R^2 + C\vec{L} \cdot \vec{s} + D\vec{L}^2, \quad \hbar\omega_c \cong 41A^{-1/2} (\text{MeV}) \quad \text{و} \quad \lambda = \frac{m\omega_c}{\hbar} \cong 0.1986A^{-1/2} \left(\frac{1}{fm}\right)^2$$

هامیلتونی  $h_{sph}$  معرف هامیلتونی کروی است.

در واقع از آنجایی که برای پتانسیل نوسانگر هماهنگ ویژه مقدار انرژی جنبشی برای هر ویژه حالت با ویژه مقدار پتانسیل برای هر ویژه حالت برابر است، بنابراین انرژی تک ذره‌ای کل در یک هسته با عدد اتمی  $A$  برابر است با:

$$E = M\omega^2 A \langle r^2 \rangle, \quad (21)$$

که مقدار میانگین توان دوم شعاع  $\langle r^2 \rangle$  تقریباً از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\langle r^2 \rangle \cong \frac{2}{5} R_c^2. \quad (22)$$

به فرض  $R_c \cong 1/2 A^{1/3} \times 10^{-13} \text{ cm}$  برای تعداد پروتونها و نوترونها، و این که مقدار بیشینه انرژی برابر  $E_A$  باشد داریم:

$$A = \sum_{N=0}^{N_0} 2P_N = \frac{2}{3} (N_0 + 1)(N_0 + 2)(N_0 + 3) \cong \frac{2}{3} (N_0 + 2)^2 + \text{lower order of } (N_0), \quad (23)$$

$$\frac{E}{\hbar\omega} = \sum_{N=0}^{N_0} 2P_N \left(N + \frac{3}{2}\right) \cong \frac{1}{2} (N_0 + 2)^2 - \frac{1}{3} (N_0 + 2)^2 + \dots \quad (24)$$

با حذف  $(N_0 + 2)$  از دو معادله (۲۳) و (۲۴) و نگه داشتن بالاترین توانهای  $(N_0 + 2)$  خواهیم داشت:

$$\frac{E}{\hbar\omega} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} A\right)^{2/3}. \quad (25)$$

بنابراین با استفاده از معادلات (۲۱) و (۲۲) و (۲۵) رابطه پیش گفته زیر را به دست می‌آوریم:

را به وسیله اختلال مرتبه اول واگن محاسبه می‌کنیم، برای مثال ماتریسهای  $\langle N, l, j, \Omega | \left[ \cos(\gamma) Y_{\gamma,0} + \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}} (Y_{\gamma,2} + Y_{\gamma,-2}) \right] | N, l, j, \Omega \rangle$  و ویژه مقادیر آنها به ازای  $l=1,2,3$  و  $j=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$  در زیر آورده شده‌اند.

$$\begin{bmatrix} -0.0631 & 0 & -0.1093 & 0 \\ 0 & 0.0631 & 0 & -0.1093 \\ -0.1093 & 0 & 0.0631 & 0 \\ 0 & -0.1093 & 0 & -0.0631 \end{bmatrix} \quad l=1,2 \quad j=\frac{3}{2} \quad \gamma=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{eigen values} = \begin{bmatrix} 0.1262 \\ -0.1262 \\ 0.1262 \\ -0.1262 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

که در این ماتریسها ترتیب چینش ویژه حالتها در سطرها و ستونها به ترتیب از حالت مربوط به بیشترین ویژه مقدار عملگر  $j_z$  تا کمترین ویژه مقدار آن می‌باشد یعنی به عنوان مثال اولین و آخرین درایه ماتریسها به ترتیب از چپ به راست عبارتند از:

$$\langle N, l, j, \Omega = j | H | N, l, j, \Omega = j \rangle, \\ \langle N, l, j, \Omega = -j | H | N, l, j, \Omega = -j \rangle$$

و نیز

$$\begin{bmatrix} -0.0901 & 0 & -0.0855 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0180 & 0 & -0.1147 & 0 & 0 \\ -0.0855 & 0 & 0.0721 & 0 & -0.1147 & 0 \\ 0 & -0.1147 & 0 & 0.0721 & 0 & -0.0855 \\ 0 & 0 & -0.1147 & 0 & 0.0180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0855 & 0 & -0.0901 \end{bmatrix} \quad l=2,3 \quad j=\frac{5}{2} \quad \gamma=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{eigen values} = \begin{bmatrix} 0.1802 \\ -0.1442 \\ -0.0360 \\ 0.1802 \\ -0.1442 \\ -0.0360 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

و همچنین

$$\bar{s}^2 | N, l, j, \Omega \rangle = \hbar^2 s(s+1) | N, l, j, \Omega \rangle, \quad (33)$$

$$\bar{j}_z | N, l, j, \Omega \rangle = \hbar \Omega | N, l, j, \Omega \rangle, \quad (34)$$

که  $\bar{s}$  عملگر اسپین،  $\bar{l}$  اندازه حرکت زاویه‌ای و  $\Omega$  تصویر عملگر  $\bar{j} = \bar{l} + \bar{s}$  روی محور  $z$  متصل به جسم است.

حال برای به دست آوردن ترازهای انرژی هامیلتونی طبق معادله (۲۰)، با فرض معلوم بودن ویژه مقادیر و ویژه بردارهای قسمت  $h_{sph}$  در رابطه (۲۰)، قسمت اضافی را به صورت اختلال مرتبه اول واگن محاسبه می‌کنیم.

انرژی هامیلتونی متناظر با معادله (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E(N, l, j, \Omega) = \hbar \omega_0 \left( N + \frac{3}{4} \right) - \hbar \omega_0 \beta \lambda \varepsilon(\beta, \gamma) - \hbar \omega_0 k \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} + \mu l(l+1) \right] \quad (35)$$

این رابطه متناظر با انرژی ترازهای نیلسون است با این تفاوت که در اینجا  $\varepsilon(\beta, \gamma)$  جایگزین  $\varepsilon(\beta)$  در انرژی ترازهای نیلسون شده است. جمله  $\varepsilon(\beta, \gamma)$  بیانگر انرژی مربوط به هامیلتونی اختلالی  $(-\hbar \omega_0 \beta \lambda R^2 \left[ \cos(\gamma) Y_{\gamma,0} + \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}} (Y_{\gamma,2} + Y_{\gamma,-2}) \right])$  است. همچنین رابطه بین  $\hbar \omega_0$  و  $\hbar \omega$  در دو مدل متفاوت است.

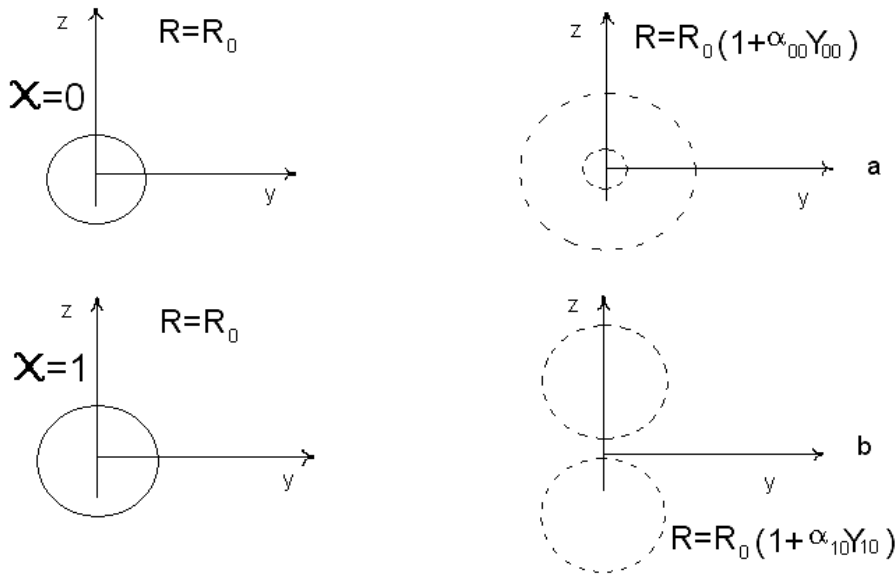
در واقع رابطه بین  $\hbar \omega_0$  و  $\hbar \omega$  در معادله (۳۵) به صورت زیر است:

$$\omega_0 = \omega_0 \left[ \left( 1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \left( 1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \right) \left( 1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos(\gamma) \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (36)$$

پارامتر  $\delta$  و  $\beta$  طبق معادله (۵) به هم مربوطند.

با توجه به ملاحظات بالا ترازهای انرژی هامیلتونی (۲۰) را می‌توان با استفاده از رابطه بین  $\omega_0$  و  $\omega$ ، طبق معادله (۳۶) برای مقادیر مختلف  $\gamma$  به دست آورد.

$$-\hbar \omega_0 \beta \lambda R^2 \left[ \cos(\gamma) Y_{\gamma,0} + \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}} (Y_{\gamma,2} + Y_{\gamma,-2}) \right]$$



شکل ۱. غیر مجاز بودن مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  پارامتر  $\chi$  با توجه به فرضیات (a)  $\chi = 0$  بیانگر انبساط یا انقباض هسته (b)  $\chi = 1$  بیانگر جابه‌جایی هسته می‌باشد که به علت فرض عدم دخالت نیروی خارجی صحیح نیست.

داریم که این تعداد ویژه حالت دارای تعداد  $\frac{1}{2}(2j+1)$  انرژی هستند و یا به عبارت دیگر تعداد  $\frac{1}{2}(2j+1)$  ویژه حالت با واگنی دوگانه خواهیم داشت به طوری که ویژه حالتها با ویژه مقدار متقارن  $j_z$  دارای انرژی یکسان خواهند بود یعنی:

$$H_{Nilsson} |N, l, j, \Omega\rangle = H_{Nilsson} |N, l, j, -\Omega\rangle \quad (40)$$

برای هامیلتونی تغییر شکل یافته سه محوری، با توجه به باز شکسته شدن تقارن نسبت به هامیلتونی نیلسون، انتظار می‌رود که دیگر همان واگنی دوگانه هامیلتونی نیلسون (۴۰) لزوماً وجود نداشته باشد. اما پس از بررسی معادله (۲۰) مشاهده می‌شود که قسمت اختلالی این هامیلتونی نسبت به تبدیل  $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta - \pi, \pi + \phi)$  ناورداست، به همین دلیل ویژه مقادیر جمله اختلالی متقارن است. همچنین ویژه حالت‌های قسمت اختلالی در مدل تغییر شکل یافته سه محوری ترکیبی از ویژه حالت‌های مدل لایه‌ای هسته طبق معادله (۲) است.

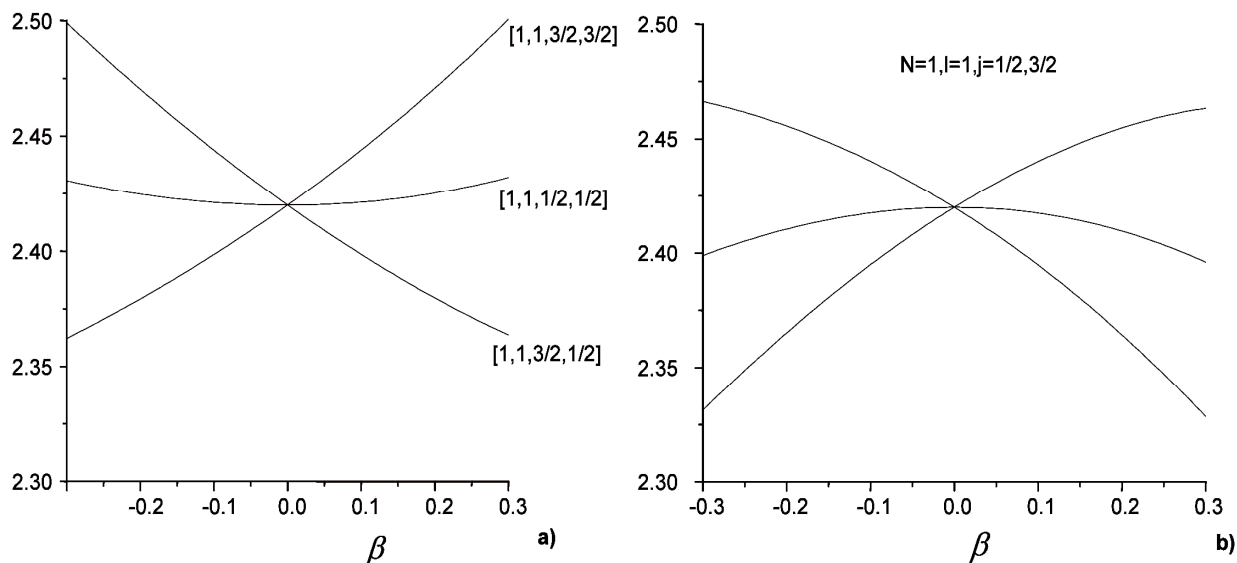
در شکل‌های ۱ تا ۵ برای قسمت مربوط به

$$\begin{bmatrix} -0.1051 & 0 & -0.0688 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.150 & 0 & -0.1007 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0688 & 0 & 0.0451 & 0 & -0.1163 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1007 & 0 & 0.0751 & 0 & -0.1163 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1163 & 0 & 0.0751 & 0 & -0.1007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1163 & 0 & 0.0451 & 0 & -0.0688 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1007 & 0 & -0.150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0688 & 0 & -0.1051 \end{bmatrix}$$

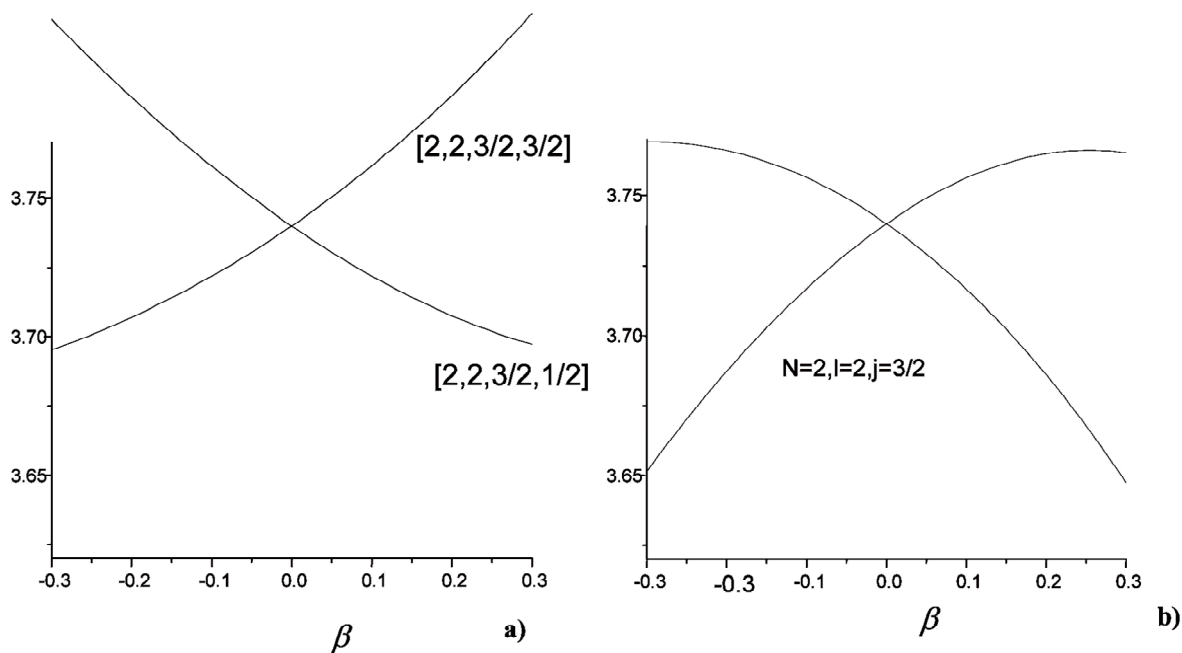
$$l=3 \text{ و } j=\frac{7}{2} \text{ و } \gamma=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \text{eigen values} = \begin{bmatrix} 0.300 \\ 0.2103 \\ -0.0901 \\ -0.1502 \\ 0.300 \\ 0.2103 \\ -0.0901 \\ -0.1502 \end{bmatrix} \quad (39)$$

برای مقایسه مدل سه محوری با مدل نیلسون می‌توان به ازای مقادیر مختلف ( $\gamma \neq 0$ ) ویژه مقادیر انرژی را برحسب پارامتر تغییر شکل  $\beta$  رسم کرد و آنها را با نمودارهای انرژی مدل نیلسون مقایسه نمود. البته در مدل نیلسون به ازای مقادیر مشخص  $N, l, j$  تعداد  $(2j+1)$  ویژه حالت



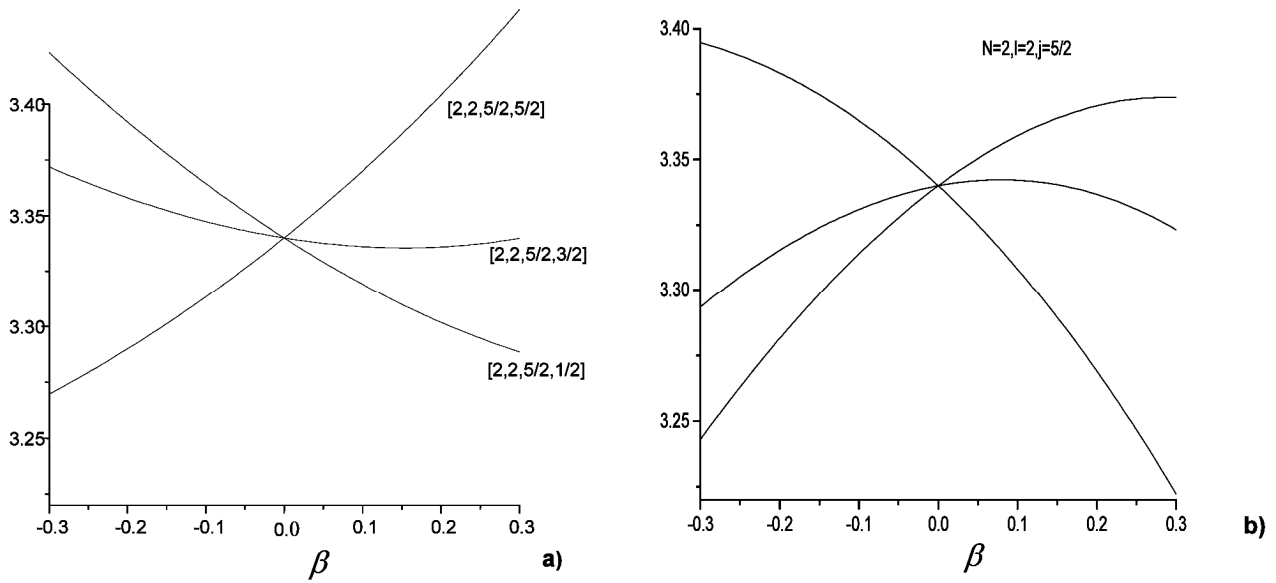
شکل ۲. ترازهای مختلف انرژی به واحد  $\hbar\omega$  برحسب پارامتر تغییر شکل  $\beta$ : (a) مدل نیلسون  $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ،  $l=1$  و  $N=1$  و (b) مدل تغییر شکل یافته سه محوری  $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ،  $l=1$  و  $N=1$ .



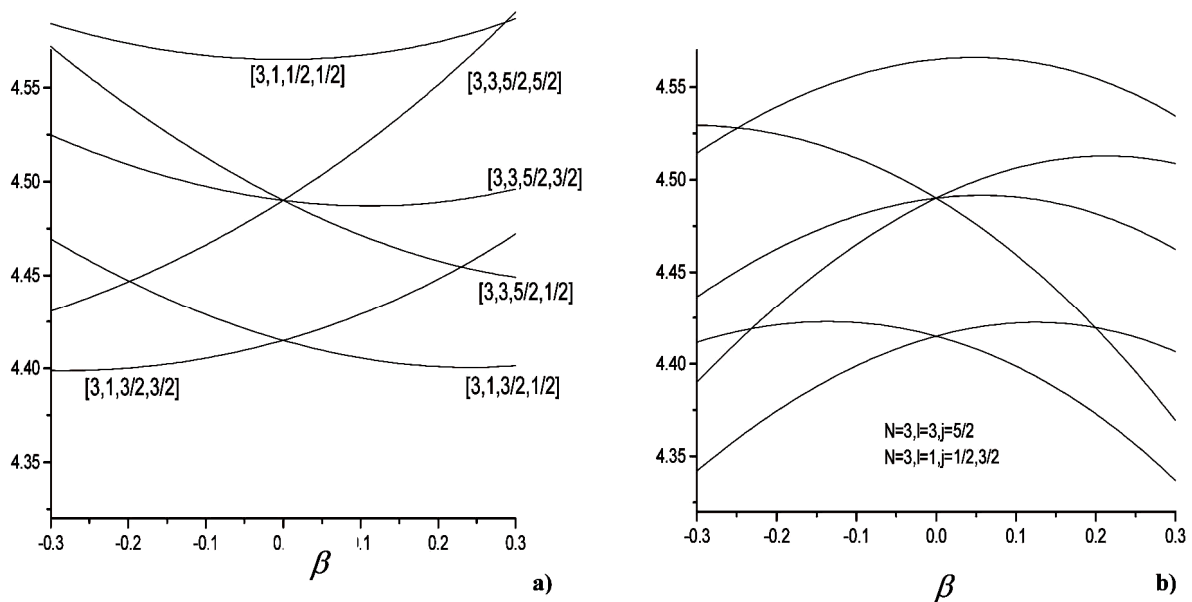
شکل ۳. ترازهای مختلف انرژی به واحد  $\hbar\omega$  برحسب پارامتر تغییر شکل  $\beta$ : (a) مدل نیلسون  $\frac{3}{2}$ ،  $l=2$  و  $N=2$  و (b) مدل تغییر شکل یافته سه محوری  $\frac{3}{2}$ ،  $l=2$  و  $N=2$ .

جمله اختلالی در مدل تغییر شکل یافته سه محوری یک برنامه کامپیوتری که قابلیت محاسبه را برای مقادیر مختلف  $N, l, j$  دارد نوشته ایم.

همایلتونی نیلسون از نمادگذاری  $[N, l, j, \Omega]$  استفاده کرده ایم و برای ترازهای مدل تغییر شکل یافته سه محوری مقدار  $\gamma = 60^\circ$  در نظر گرفته شده است. ما برای محاسبه



شکل ۴. ترازهای مختلف انرژی به واحد  $\hbar\omega$  برحسب پارامتر تغییر شکل  $\beta$  (a: مدل نیلسون  $N=2$  و  $l=2$ ،  $j=\frac{5}{4}$  و (b) مدل تغییر شکل یافته سه محوری  $N=2$  و  $l=2$ ،  $j=\frac{5}{4}$ ).

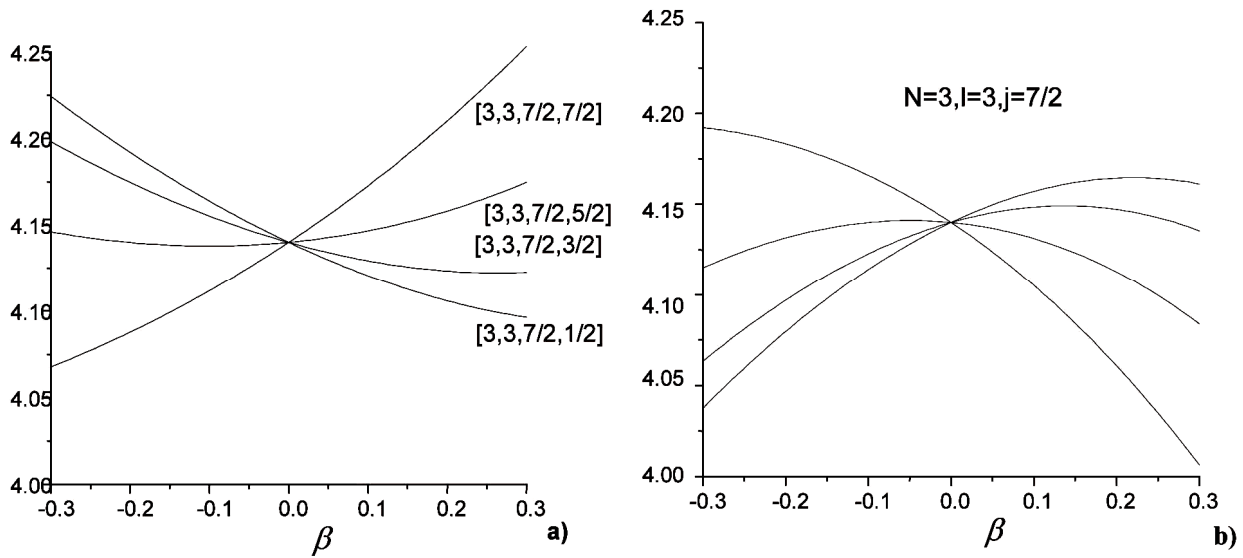


شکل ۵. ترازهای مختلف انرژی به واحد  $\hbar\omega$  برحسب پارامتر تغییر شکل  $\beta$  (a: مدل نیلسون  $N=3$  و  $l=1$ ،  $j=\frac{5}{4}$ ،  $\frac{3}{4}$ ،  $\frac{1}{4}$  و (b) مدل تغییر شکل یافته سه محوری  $N=3$  و  $l=1$ ،  $j=\frac{5}{4}$ ،  $\frac{3}{4}$ ،  $\frac{1}{4}$ ).

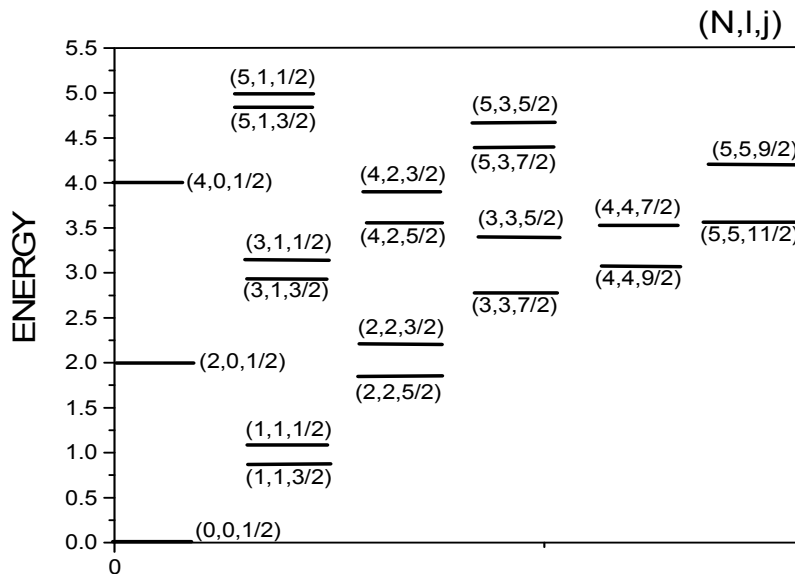
نظر می‌گیریم. به طوری که سطح مقطعهای موازی صفحه  $xy$  این بیضوی دایره هستند. اما در مدل تغییر شکل یافته سه محوری سطح مقطعهای این بیضوی دیگر دایره نیستند بلکه بیضی شکل می‌باشند. با توجه به این تفاوت در شکل هسته

**۶. نتیجه‌گیری**  
در پتانسیل نیلسون با در نظر گرفتن یک تغییر شکل هسته، که میزان این تغییر شکل با پارامتر  $\beta$  تعیین می‌شود، هسته را به صورت بیضوی با کشیدگی یا پختی در راستای محور  $z$  در





شکل ۶. ترازهای مختلف انرژی به واحد  $\hbar\omega_0$  برحسب پارامتر تغییر شکل  $\beta$  (a: مدل نیلسون  $N=3, l=3, j=5/4$  و (b) مدل تغییر شکل یافته سه محوری  $N=3, l=3, j=7/2$ ).



شکل ۷. ترازهای انرژی مدل لایه‌ای هامیلتونی معادله (۲) به عنوان تابعی از  $N$ ، معادل  $\beta=0$  در مدل‌های نیلسون و تغییر شکل یافته سه محوری (مقدار هر تراز به علاوه عامل  $\frac{3}{4}$  با ترازهای انرژی مدل سه محوری و نیلسون در  $\beta=0$  یکی می‌شود).

(شکل ۷). این مطلب به وضوح در شکلها دیده می‌شود. نکته دیگر این است که ویژه توابع قسمت زاویه‌ای پتانسیل نیلسون به گونه‌ای است که ویژه حالت همزمان عملگرهای  $J_z, S^2, T^2$  و  $T^2$  می‌باشند. اما ویژه توابع قسمت زاویه‌ای مدل تغییر شکل یافته سه محوری ترکیبی از ویژه توابع پتانسیل

انتظار می‌رود که به ازای تغییر شکل صفر ( $\beta=0$ ) ترازهای انرژی مدل‌های نیلسون و مدل تغییر شکل یافته سه محوری باهم برابر باشند و ترازهای انرژی مدل لایه‌ای هسته با همان هامیلتونی معادله (۲) به دست آیند (شکل ۶). همچنین به ازای  $\gamma=0$  مدل تغییر شکل یافته سه محوری و مدل نیلسون یکی می‌شود

نیلسون می‌شوند.

$$|\mathcal{E}_{r-axial}(\beta, \gamma)| = |\mathcal{E}_{Nilsson}(\beta)| \quad \gamma = n \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

به این نکته نیز اشاره می‌شود که برای مقادیر  $z = \frac{3}{4}$  و  $l = 1, 2$ ، به علت این که هم برای پتانسیل نیلسون و هم برای مدل تغییر شکل یافته سه محوری، دو ویژه مقدار غیر تکراری متناظر با ماتریس اختلال داریم، بنابراین در مدل تغییر شکل یافته سه محوری برای هر مقدار  $\gamma$  ویژه مقادیر هر دو مدل مورد بحث با هم برابر می‌شوند.

نتیجه دیگر این است که به ازای  $\gamma = 60^\circ$  ماتریس مربوط به جمله اختلالی در مدل تغییر شکل یافته سه محوری باز هم قطری نیست اما ویژه مقادیر آن با ماتریس متناظر در پتانسیل نیلسون برابر می‌باشد، به عبارت دیگر داریم:

$$E(\beta, \gamma = 0^\circ) = -E(\beta, \gamma = 60^\circ),$$

در حالت کلی به ازای  $n = 0, 1, 2, \dots$  و  $\gamma = n \frac{\pi}{3}$  در

مورد هم امپلتونی اختلال

$$- \hbar \omega_0 \beta \lambda R^2 \left[ \cos(\gamma) Y_{\gamma, 0} + \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{2}} (Y_{\gamma, 2} + Y_{\gamma, -2}) \right]$$

## مراجع

1. A Del Sol Mesa, G Loyolat, M Moshins Pey and V Velazquez, *J. Phys. A: M2 th. Gen* **26** (1993) 1147.
2. Y K Gambhir, *Mean Field Description of Nuclie*, Narosa Publishing House Pvt. Ltd. (2006).
3. J P Draayer & K T Weeks, *Annals of Physics* **41** (1984) 156.
4. Walter Greiner, *Nuclear Models*, Springer (1996).