

مقیاس‌بندی طول موج لایه‌بندی و دیاگرام فاز برای شارش مخلوط‌های دانه‌ای دوتایی در سلولهای هل - شاو عمودی

ناهید ملکی جیر سرایی^۱، سمانه برادران^۱، الهام شکریان^۱،
بهاره قانع مطلق^۱ و شاهین روحانی^{۲،۳}

۱. آزمایشگاه سیستم‌های پیچیده، گروه فیزیک، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۳. مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات (I.P.M.)، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۸۲/۸/۱۹؛ پذیرش: ۸۳/۲/۱۶)

چکیده

شارش مخلوط دو ماده دانه‌ای شامل شن و شکر در یک سلول هل - شاو عمودی موجب پیدایش کبه‌هایی می‌شود که در آنها لایه‌بندی و جداسازی مشاهده می‌شود. مطالعه تجربی ما نشان می‌دهد که نسبت آهنگ شارش به فاصله دو جداره سلولها مشخص می‌کند که کدام یک از این دو اتفاق بیفتد. ما دیاگرام فاز مورفولوژی تپه‌ها را به صورت تابعی از آهنگ شارش و فاصله دیواره‌های سلول به دست آوردیم. دریافتیم که طول موج لایه‌بندی با این نسبت مقیاس‌بندی می‌شود. مشاهده کردیم که در هر آهنگ شارش حاصل ضرب طول موج و فاصله دیواره‌ها ثابت می‌ماند. بنابراین طول موج به صورت یک تابع هموگرافیک با فاصله دیواره‌های سلول تغییر می‌کند. لایه‌بندی دانه‌ها فقط در یک ناحیه محدود فضای پارامترها اتفاق می‌افتد. ما برای وجود این ناحیه در فضای فاز تبیری ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: سلول هل - شاو، تاب، زاویه تنه‌نشست، لایه‌بندی، جدار

۱. مقدمه

[۴] استدلال کردند که نسبت اندازه دو ذره نیز مهم است و لایه‌بندی فقط وقتی می‌تواند اتفاق بیفتد که این نسبت بزرگتر از $1/5$ باشد. مکث و هرمن هر دو توافق دارند که طول موج لایه‌های لایه‌بندی با آهنگ شارش دانه‌ها زیاد می‌شود [۵]. در صورتی که کوپ و همکارانش [۶] نشان دادند که طول موج از آهنگ شارش تأثیری نمی‌پذیرد، ولی اعتقاد دارند که یک آهنگ شارش بحرانی وجود دارد که برای آهنگ‌های شارش بیشتر از آن، لایه‌بندی وجود ندارد. ما در این مقاله اثر آهنگ شارش و فاصله سلولها را بررسی می‌کنیم. همچنین یک دیاگرام فاز ارائه می‌کنیم که تابعی از نسبت آهنگ شارش و فاصله دیواره‌های

مخلوط‌های دانه‌ای وقتی درون سلول هل - شاو عمودی ریخته می‌شوند، رفتار عجیبی مثل جداسازی و لایه‌بندی نشان می‌دهد. مکث و دیگران [۳، ۲، ۱] پیشنهاد می‌کنند هر وقت یک مخلوط دانه‌ای با دانه‌هایی با اندازه‌های مختلف درون یک سلول هل - شاو عمودی ریخته شود، همیشه انتظار جداسازی می‌رود و مهم نیست که مقدار زاویه ته‌نشست^۱ چقدر باشد. اما آنها نشان دادند که لایه‌بندی فقط وقتی رخ می‌دهد که دانه بزرگ، زاویه ته‌نشست بزرگتری از ذرات کوچک دارد. هرمن و همکارانش

۱. Repose

طول موج نسبت به آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها را نشان می‌دهد.

۲.۲. اثر فاصله دیواره‌های سلول

مشاهد کردیم که فاصله دیواره‌های سلول نیز، اثر واضحی روی طول موج دارد. بنابراین با تغییر دادن این فاصله در یک سری آزمایشها و با حفظ آهنگ شارش ثابت، این اثر را بررسی کردیم. دریافتیم که با افزایش فاصله دیواره‌ها، طول موج با یک تابع هموگرافیک کاهش می‌یابد. شکل ۲ این وابستگی را نشان می‌دهد.

۳.۳. دیاگرام فاز

از آنجایی که برای یک مخلوط دانه‌ای دو پارامتر یعنی آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها وجود دارند که روی کیفیت و کمیت طبقه‌بندی اثر می‌گذارد، یک دیاگرام فاز از فاصله دیواره‌ها و آهنگ شارش رسم کردیم (شکل ۳). همان‌طور که این دیاگرام نشان می‌دهد برای هر دری آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها یک ناحیه محدود وجود دارد که لایه‌بندی در آن اتفاق می‌افتد. دو خط چین شاید از مبدأ مختصات بگذرند (برای نقاط نزدیک مبدأ اطلاعات موجود نیست) و شیب آنها متناسب با طول موج است. با عبور از یک مرز مشخص، گذار قاطعی از لایه‌بندی به جداسازی وجود دارد.

۴. تفسیر داده‌ها

مکث و دیگران [۱ تا ۳ و ۷] وابستگی خطی λ به ضخامت بخش غلظنده در سطح تپه را پیش بینی کرده‌اند. و گراسلی و هرمن [۴] با در نظر گرفتن استدلال بقای جرم، بیان ساده‌ای برای طول موج لایه، به دست آوردند. آنها آهنگ شارش را به صورت $\lambda = d \rho V(w)$ بیان کردند که در آن d فاصله دیواره‌های سلول و ρ میانگین چگالی ذرات و V سرعت پایین آمدن ذرات غلظنده در یک حرکت بهمنی است [۴].

در مقالات قبلی [۱ تا ۷] استدلال شد که لایه‌بندی فقط وقتی می‌تواند اتفاق بیفتد که ریزش بهمنی اتفاق افتد. این بستگی به

سلولهاست. ما دریافتیم که طول موج کاملاً از آهنگ شارش تأثیر می‌پذیرد و با آن زیاد می‌شود. در واقع بر حسب نسبت آهنگ شارش و فاصله سلولها مقیاس‌بندی می‌شود. ما همچنین پیشبینی می‌کنیم که اگر فاصله سلولها مناسب باشد هیچ آهنگ شارش بحرانی بالایی برای تشکیل لایه‌بندی وجود ندارد.

ما همچنین مخلوط‌هایی از نخود و لوبیا را در سلولهای هل - شاو بزرگتر آزمایش کردیم، نه لایه‌بندی مشاهده کردیم و نه جدایی لایه‌ها. بنابراین، به نظر می‌رسد که اندازه، خود نقشی در این پدیده بازی می‌کند. نتایج ما با نتایج کارهای قبلی [۱ تا ۵ و ۷] که حرکت‌های بهمنی حاصل بین دو زاویه آستانه موجود متفاوت را مسئول لایه‌بندی می‌داند، توافق دارد.

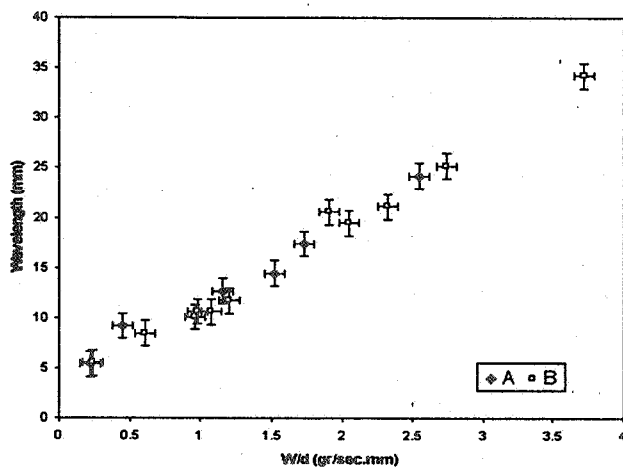
۲. مراحل آزمایش

وسیله تجربی ما شامل دو قطعه شیشه عمودی با ضخامت ۳ mm و اندازه ۲۰×۳۰ cm است که با تعدادی جداکننده متغییر به صورت موازی یکدیگر و عمود بر صفحه پایه در مقابل هم قرار دارند. فاصله دیواره‌ها می‌تواند از ۳ تا ۴۰ mm تغییر کند. یک مخلوط شکر (ذرات کم و بیش استوانه‌ای با ارتفاع متوسط ۰/۸mm چگالی $0/15 \text{ g/cm}^3$ و شن $1/5 \text{ g/cm}^3$) که خوب مخلوط شده‌اند از طریق قیفی با دهانه‌های متفاوت (که در نتیجه آهنگ شارشهای متفاوت ایجاد می‌کند) درون سلول هل - شاو ریخته می‌شود. آهنگ شارش می‌تواند از $1/2 \text{ g/sec}$ تا ۶۰ تغییر کند. آزمایشها چند بار تکرار شدند. نتایجی که ارائه می‌شود حاصل میانگین گیری بیش از ۲۰ آزمایش است. ما این آزمایشها را در دامنه وسیعی از آهنگهای شارش و جدایی دیواره‌ها تکرار کردیم. با استفاده از یک دوربین CCD عکسهای لایه‌ها در کامپیوتر ثبت شد. طول موج نقش لایه‌ها را با تحلیل پیکسلی اندازه گرفتیم.

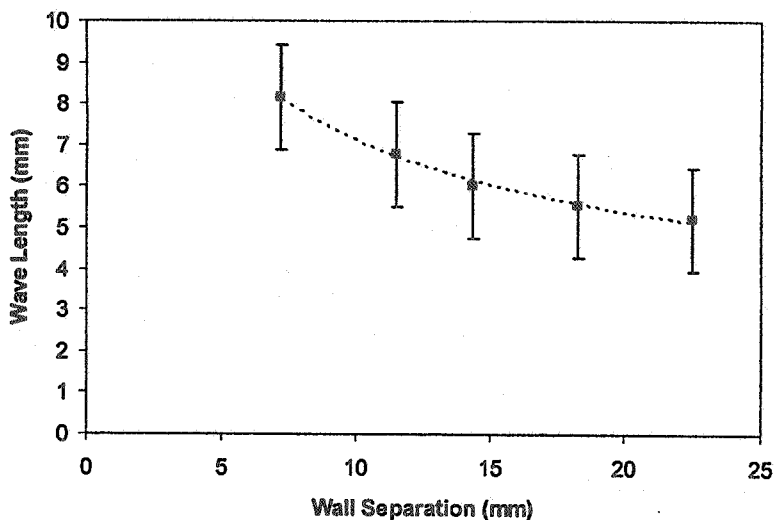
۳. تحلیل

۳.۱. اثر آهنگ شارش

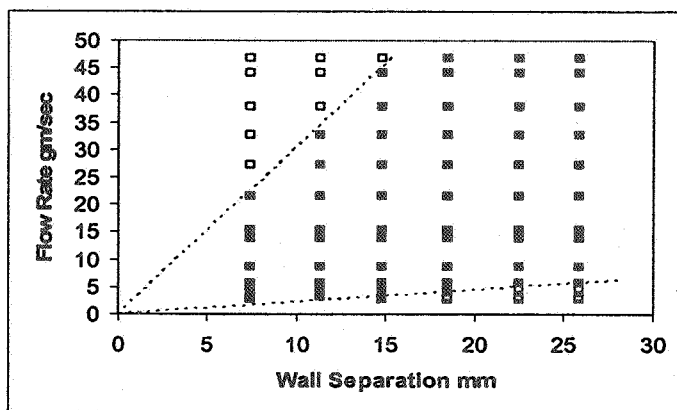
مشاهده کردیم که طول موج لایه‌بندی از آهنگ شارش تأثیر می‌پذیرد. و به طور خطی با آن زیاد می‌شود. شکل ۱ بستگی



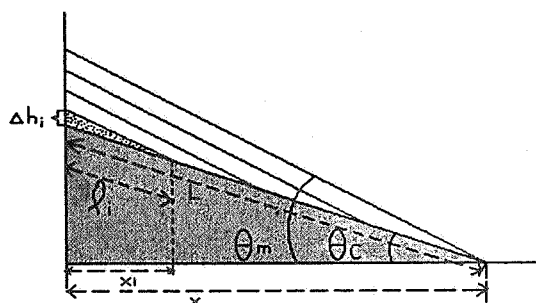
شکل ۱. بستگی خطی طول موج نسبت به نسبت آهنگ شارش به جدایی دیواره‌های سلول. فاصله دیواره‌ها برای A 10.75 mm است و برای B 14.7 mm است.



شکل ۲. وقتی که آهنگ شارش ثابت است، طول موج با افزایش دیواره‌ها به‌طور هموگرافیک کاهش می‌یابد.



شکل ۳. دیاگرام فاز، مربعهای توپر، ناحیه لایه‌بندی هستند و مربعهای توخالی ناحیه جداسازی هستند.



شکل ۴. زاویه‌های آستانه θ_m و θ_c ، متغیرهای Δh_i ، l_i ، X_i ، حسب موقعیتهای متغیر آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها نشان داده شده‌اند.

از طرف دیگر از شکل ۴ وقتی کپه به زاویه ته نشست ماکزیمم می‌رسد داریم:

$$\frac{\Delta h_i}{\gamma t_i} l_i d \cong \lambda dV \cong W \quad (3)$$

که t_i زمان لازم برای شکل‌گیری کپه بین θ_m و θ_c است. زیرا این کپه ریزش بهمنی می‌کند و لایه را شکل می‌دهد. و ما داریم:

$$l_i \cong \frac{X_i}{\cos \theta_c} \quad (4)$$

همچنین می‌دانیم که زاویه‌های آستانه طبق رابطه زیر به وضعیت هندسی شکل بستگی دارد:

$$\Delta h_i \cong X_i (tg \theta_m - tg \theta_c) \quad (5)$$

با ترکیب روابط (۳) و (۴) و (۵) داریم:

$$\frac{X_i^2 (tg \theta_m - tg \theta_c) d}{\gamma t_i \cos \theta_c} \approx \frac{\Delta h_i X_i d}{\gamma t_i \cos \theta_c} \quad (6)$$

$$\approx \frac{\Delta h_i^2 d}{\gamma t_i \cos \theta_c (tg \theta_m - tg \theta_c)} \approx \lambda dV \approx W$$

یا به طور خلاصه:

$$W \approx \frac{1}{\gamma \cos \theta_c (tg \theta_m - tg \theta_c)} \frac{d \Delta h_i^2}{t_i} \quad (7)$$

در حالت w ثابت وقتی d زیاد می‌شود، $\frac{\Delta h_i^2}{t_i}$ باید کم شود تا w ثابت نگه داشته شود. در حالت عمومی، هر دوی Δh_i و

وجود دو زاویه ته نشست آستانه یعنی زاویه بحرانی θ_c و زاویه ماکزیمم θ_m دارد. زاویه θ_c مستقیماً از اندازه‌گیری شکل‌های دیجیتالی تپه در سلول هل - شاو به دست می‌آید و θ_m از زاویه لازم برای خم کردن سلول تا زمانی که تپه ثابت شروع به ریزش کند تعیین می‌شود. شارش بهمنی دو فاز دارد، دانه‌ها روی مثلث اولیه تشکیل کپه کوچکی می‌دهند تا وقتی که زاویه θ_m به وجود آید. همینکه از زاویه ماکزیمم θ_m گذشتند فروریزش بهمنی کپه رخ می‌دهد که فاز دوم شارش است. همینکه کپه حرکت کرد فرآیند تکرار می‌شود. بنابراین لایه‌بندی اتفاق می‌افتد. اگر T_i زمان ریزش بهمن باشد، پس صرفاً بقای جرم مستلزم آن است

$$\lambda \sim \left(\frac{w}{d} \right) \left(\frac{T_i}{L} \right) \quad (1)$$

که L اندازه فیزیکی شیب است (شکل ۴ را نگاه کنید). آهنگ شارش بیشتر صرفاً منجر به تشکیل کپه بزرگتری می‌شود. در پرتو این استدلال می‌توانیم دیاگرام فاز را به صورت زیر بفهمیم. هنگامی که فاصله d ثابت نگه داشته شود، وقتی آهنگ شارش w تغییر می‌کند، دو طول موج حدی وجود دارد. برای w بزرگ، کپه‌هایی بزرگ شکل می‌گیرد تا جایی که اندازه کپه به حد فیزیکی، یعنی زاویه آستانه شیب محدود شود (شکل ۴). برای w ‌های خیلی کوچک کپه‌های کوچک شکل می‌گیرد و حد پائینی اندازه کپه به اندازه دانه‌ها محدود می‌شود. از طرف دیگر وقتی w ثابت است و اندازه سلول متغیر، وقتی d (فاصله دیواره‌ها) تغییر می‌کند، دوباره دو طول موج حدی وجود دارد، برای d کوچک، باز کپه‌های بزرگ شکل می‌گیرد تا اندازه کپه به شیب محدود شود و برای d بزرگ کپه‌های کوچک شکل می‌گیرد چون دانه‌ها در جهت d بسط می‌یابند. به همین صورت باز این ارتفاع‌های کوچکتر کپه را نتیجه می‌دهد. باز اندازه دانه‌ها حد پائینی ارتفاع کپه را محدود می‌کند. این فرآیند وابستگی λ به $\frac{1}{d}$ را نتیجه می‌دهد. همان‌طور که گراسلی و هرمن اشاره کردند، داریم:

$$W \approx \lambda dV \quad (2)$$

همچنین:

$$\lambda = \frac{\Delta h_i x_i}{v t_i v \cos \theta_c} = \frac{\Delta h_i x_i T_i}{\gamma x t_i} \quad (9)$$

که T_i زمان فرو ریزش بهمن و t_i زمان لازم برای شکل‌گیری کپه بین θ_c و θ_m قبل از ریزش بهمن است، بنابراین λ با Δh_i تغییر می‌کند (که لزوماً خطی نیست). این امر بستگی به w و d را توجیه می‌کند (دیدیم که Δh_i وقتی d ثابت است با w تغییر می‌کند و وقتی w ثابت است با d تغییر می‌کند.) و همچنین به درک ناحیه لایه‌بندی در دیاگرام فاز کمک می‌کند.

۵. نتیجه‌گیری

نتیجه می‌گیریم که، طول موج بافاصله به صورت $\frac{1}{d}$ کاهش می‌یابد و این به خوبی با داده‌ها سازگار است. طول موج با آهنگ شارش افزایش می‌یابد و در حقیقت به صورت خطی با نسبت آهنگ شارش به فاصله دیواره‌ها افزایش می‌یابد. در نهایت این یعنی طول موج لایه‌بندی با این آهنگ مقیاسبندی می‌شود.

اعتقاد داریم که مکانیسم شکل‌گیری لایه‌بندی، به وجود دو زاویه آستانه و بهمنهای تناوبی ناشی از آن، و نیز وجود امکان تشکیل تاب (*kink*) وابسته است. لایه‌بندی فقط در آن ناحیه‌ای از فضای فاز (آهنگ شارش و فاصله دیواره‌های سلول) اتفاق می‌افتد که بهمنهای تناوبی داشته باشیم. مشاهده کردیم که برای آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها، ناحیه محدودی وجود دارد که بهمنهای تناوبی در آن می‌توانند اتفاق افتند.

ما همچنین حدس می‌زنیم که ایجاد یک کپه بحرانی بدون توجه به آهنگ شارش و فاصله دیواره، مدت زمان ثابتی لازم دارد. البته این در صورتی است که درون محدودی که دیاگرام فاز تعیین می‌کند باشیم. مکانیزم این پدیده برای ما روشن نیست به نحوی شهودی می‌توان استدلال کرد که سرعت‌های افقی و عمودی دانه‌ها، در حالی که این گونه کپه‌ها شکل می‌گیرند با آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها به نحوی رابطه

t_i می‌تواند به نحوی تغییر کنند، که $\frac{\Delta h_i}{t_i}$ کاهش یابد تا w ثابت بماند به عبارت دیگر هیچ دلیلی (به دلایل منطقی یا شهود تجربی) وجود ندارد که (فقط) t_i تغییر کند بنابراین در حالت w ی ثابت، با افزایش d کاهش می‌یابد و برعکس. اما Δh_i تغییراتش محدود است و این کلید درک حدود ناحیه‌ای در دیاگرام فاز است که لایه‌بندی در آن اتفاق می‌افتد. برای d ی کوچک وقتی آهنگ شارش ثابت است، Δh_i و همچنین x_i خیلی زیاد است (از آنجا که $\Delta h_i \cong X_i (tg\theta_m - tg\theta_c)$) و وقتی X_i بزرگتر از X است، هیچ لایه‌بندی وجود ندارد، زیرا هیچ تابی (*kink*) نمی‌تواند وجود داشته باشد [۷،۴]. اما جدا سازی^۱ همیشه می‌تواند اتفاق بیفتد، پس در این ناحیه فقط جداسازی داریم و لایه‌بندی وقتی شروع می‌شود که $X_i = X$ باشد و مادامی معتبر است که X_i کوچکتر از X بماند. این امر وجود آستانه چپ برای آهنگ شارش ثابت در دیاگرام فاز را توجیه می‌کند. برای d بزرگ (دوباره وقتی w ثابت است) Δh_i کوچک است و وقتی d خیلی زیاد شود Δh_i آن قدر کوچک می‌شود که ممکن است مقدار دانه‌هایی که یک کپه مثلثی شکل بین دو زاویه آستانه تشکیل می‌دهند، برای شکل‌گیری یک لایه به ضخامت اندازه ذره کافی نباشد و باز هم در این ناحیه فقط جداسازی داریم. این همچنین کاهش طول موج با فاصله دیواره‌ها را توضیح می‌دهد.

از طرف دیگر وقتی فاصله دو دیوار سلول d ، ثابت بماند به هنگام افزایش w ، Δh_i یا X_i باید افزایش یابد تا همان‌طور که در بالا اشاره شده d ثابت نگه داشته شود. باز به طور کلی هر دوی X_i و t_i ممکن است تغییر کنند، بنابراین X_i باید با w زیاد شود. باز هم شرط $X_i \leq X$ تغییرات آن را محدود می‌کند و کاهش همان‌طور که قبلاً هم گفته شد به وسیله اندازه ذرات محدود می‌شود.

به معادله (۱) بر می‌گردیم، داریم:

$$\frac{\Delta h_i x_i d}{v t_i \cos \theta_c} \approx w \approx \lambda d v \quad (8)$$

آزمون قرار گرفت دارای اندازه‌های $100 \times 92/5 \times 5$ cm بود. بازهم نه لایه‌بندی مشاهده کردیم و نه جداسازی آزمایشهای ما روی حبوبات نشان داد که احتمالاً برای تشکیل جداسازی، نیز شرایطی وجود دارد. شاید برای تشکیل جدا سازی بین اندازه ذرات و اندازه کپه رابطه‌ای وجود دارد. از طرف دیگر برخی نویسندگان نشان داده‌اند که برای آن که لایه‌بندی صورت گیرد دانه‌ها باید سطح زبری داشته باشند و شاید زبری حبوبات کافی نباشد. اما جداسازی باید حتماً بدون زبری هم رخ داده باشد. البته می‌پذیریم که آزمایشهای انجام شده ممکن است کافی نبوده باشند و کار بیشتری باید انجام شود.

قدردانی

مایلم از آقای اسامه مشتاق عسکری به خاطر کمک ایشان در بر نامه نویسیهای رایانه‌ای تشکر کنیم.

دارند که تشکیل یک کپه بحرانی همیشه مدت زمان ثابتی طول می‌کشد. البته مقیاس زمانی با سرعت یک تاب در حال پیش آمدن رابطه دارد. ما امیدواریم این مکانیزم را در آینده بررسی کنیم.

سرانجام چنین حدس می‌زنیم که برای آهنگ شارش و فاصله دیواره‌ها در تشکیل لایه‌ها حد مطلقى وجود ندارد و می‌توانیم در همه آهنگهای شارش لایه‌بندی داشته باشیم، به این شرط که فاصله مناسب این دیواره‌ها را انتخاب کنیم، و برعکس، به این معنی که در سه بعد می‌توانیم لایه‌بندی داشته باشیم، همان‌گونه که در طبیعت داریم.

ما همچنین همه مخلوطهای ممکن نخود با شکل تقریباً کروری، لویا سفید، لویا چشم بلبلی، لویا قرمز، عدس، ماش و لپه به اندازه‌های $10/25$ و $8/75$ و $8/5$ و $3/87$ و $4/8$ میلیمتر را بررسی کردیم، نه لایه‌بندی مشاهده کردیم و نه جداسازی. برای بالا بردن مقیاسها، این مخلوطها را در سلولهای هل-شاو نخیلی بزرگتری آزمایش کردیم. بزرگترین سلول هل-شای که مورد

مراجع

1. H A Makse, S Havlin, P R King and H E Stanley, *Nature* 386 (1997) 379-381.
2. H A Makse, P Cizeau and H E Stanley, *Phys. Rev. Lett.*, 78 (1997) 3298-3301.
3. H A Makse, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 7008-7016.
4. Y Grasselli and Herrmann, *Granular Matter* 1 (1998) 43.
5. H A Makse and H J Herrmann, *Europhys. Lett.* 43 (1998) 1-6.
6. J PKoeppe, M Enz and JKakalios, *Phys. Rev. E* 58 (1998) R4104-R4107.
7. H A Makse, R C Ball, H A Stanley, and S Warr, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 3357-3367.