مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۷، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۸۶

ابرپتانسیلهای دیگری برای مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

علی دادخواه و منصور حقیقت

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۵/۵/۱۸ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۶/۱۰/۱۵)

چکیده

از مقاله‌هایی که در زمینهٔ مکانیک کوانتمی ابرتقارنی نوشته شده است چنین بر می‌آید که تاکنون برای معادلهٔ شرودینگر تعداد معدودی پتانسیل با حلهای دقیق معرفی شده است که برای به دست آوردن توابع موج و انرژی ترازهای مختلف با روش عملگری، اغلب آنها دارای یک پارامتر متغیر و یک پارامتر ثابتند. برخی دو پارامتر ثابت و برخی نیز دو پارامتر متغیر دارند. این پتانسیلها از توابعی که ابرپتانسیل نامیده می‌شوند به دست می‌آیند. در این مقاله ما ابتدا از یک ابرپتانسیل کلی با دو پارامتر ثابت و چهار پارامتر متغیر شروع کرده‌ایم، ولی در محاسبات، عملاً ملزم به اعمال قیودی شدیم که حاصل آن سه نوع ابرپتانسیل مختلف با خصوصیات زیر بود : ۱ـ به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به تعدادی از ابرپتانسیلهای مشهور قبلی تبدیل می‌شوند و این نتیجه خود تست مهمی برای اطمینان از صحت آنهاست. ۲ـ به این لحاظ که تاکنون چنین ابرپتانسیلهایی که هر یک مولد برخی از ابرپتانسیلهای قبلی باشند معرفی نشده جدیداند. ۳ـ همچنین این ادعا که غیر از سه ابرپتانسیل کولن، نوسانگر سه بعدی و نوسانگر انتقال یافته، بقیه ابرپتانسیلهای شناخته شده قبلی زیر مجموعه‌هایی از این سه ابرپتانسیل هستند هم ادعای جدیدی است. ۴ـ از هر یک از سه دسته ابرپتانسیل فوق، پتانسیلهایی ایجاد می‌شود که انرژیهای کلاین گوردان آنها دارای فواصل مساوی است، ولی قیدی که برای این منظور اعمال می‌کنیم سبب کاهش پارامترهای متغیر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ابرتقارن، ابرپتانسیل، پتانسیلهای همسازگار، شکل ناوردایی، ترازهای انرژی با فواصل مساوی

۱. مقدمه

با مراجعه به مقاله‌هایی که در زمینه مکانیک کوانتمی ابرتقارنی (Susy QM) و یا در زمینه پتانسیلهای دارای حل دقیق نوشته شده‌اند و تعدادی از آنها را در قسمت مراجع معرفی کرده‌ایم، از جمله مقاله مروری کوپر که در سال ۱۹۹۵ منتشر شده است [۱]، خواهیم دید که با فرض

$$\frac{\hbar^2}{2m}=1 , \tag{1}$$

و به کمک ابر پتانسیل $W(x)$ و مشتق آن $W'=\frac{dW}{dx}$ دو پتانسیل همسازگار $V^-(x)$ و $V^+(x)$ از دو رابطهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$V^{\mp}=W^2 \mp W' . \tag{2}$$

چنانچه برای همهٔ V_n^+ و V_{n+1}^-ها R_{n+1}هایی مستقل از x وجود داشته باشند که در رابطهٔ شکل ناوردایی زیر صدق کنند

$$V_n^+ = V_{n+1}^- + R_{n+1} , \tag{3}$$

آنگاه انرژی ترازها از رابطهٔ مهم زیر به دست می‌آیند :

$$\in_n^+ = \in_{n+1}^- = \sum_{i=1}^{n+1} R_i . \tag{4}$$

از طرف دیگر با فرض این که ψ_n تابع موج تراز n ام و $\psi_n''=\frac{d^2\psi_n}{dx^2}$ باشند، معادلهٔ شرودینگر برای این تراز به صورت زیر است

$$-\psi_n'' + V(x)\psi_n = \in_n \psi_n . \tag{5}$$

اگر انرژی تراز پایه برای پتانسیل V^- با تابع معلوم

$\psi_\circ^-(x)=\psi_\circ$ روی صفر $(\in_\circ^-=\circ)$ تنظیم شده باشد آنگاه از رابطهٔ (۵) داریم :

$$V^- = \frac{\psi_\circ''}{\psi_\circ} = \left(\frac{\psi_\circ'}{\psi_\circ}\right)^2 + \left(\frac{\psi_\circ'}{\psi_\circ}\right)' \qquad (۶)$$

اما با مقایسهٔ رابطهٔ (۶) با رابطهٔ (۲) می‌توان ابرپتانسیل W را از رابطهٔ زیر به دست آورد

$$W = -\frac{\psi_\circ'}{\psi_\circ} \ , \qquad (۷)$$

و برعکس چنانچه ابرپتانسیل $W(x)$ تابع مشخصی باشد می‌توان $\psi_\circ^-$ را از رابطهٔ

$$\psi_\circ^- = \psi_\circ(x) = N_\circ \exp\left(-\int^x W(x)\,dx\right) , \qquad (۸)$$

به دست آورد که در آن $N_\circ$ ضریب بهنجارش است.

سپس با روش عملگری و به کمک عملگر بالا برندهٔ

$$L_+ = W - \frac{d}{dx} \ , \qquad (۹)$$

توابع ویژهٔ سایر ترازهای انرژی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\psi_{n+1}^- = N_{n+1} L_+^{n+1} \psi_\circ = N_{n+1}\left(W - \frac{d}{dx}\right)^{n+1} \psi_\circ \ . \qquad (۱۰)$$

از آنجا که برای این گونه پتانسیلها می‌توان $\in_n$ و ψ_nهای معادلهٔ شرودینگر را به طور دقیق از روابط (۴) و (۸) و (۱۰) به دست آورد، آنها را پتانسیلهای دارای حل دقیق نامیده‌اند.

تا کنون با این روش تعداد معدودی پتانسیل پیدا شده است که حدود ۱۲ مورد آن مشهوراند و برای آنها $\in_n$ها و ψ_nها به صورت دقیق محاسبه شده است و سالها سعی می‌شده است پتانسیلهای جدیدتری نیز با روش فوق ایجاد گردد ولی به نظر می‌رسد بعد از مقالهٔ مروری کوپر که در سال ۱۹۹۵ نوشته شده است [۱] تا کنون در مجلات مشهور فیزیک ابر پتانسیل جدید و با اهمیتی معرفی نشده باشد.

۲. دسته بندی ابرپتانسیلهای مشهور

در بحث مکانیک کوانتمی ابرتقارنی تاکنون حدود ۱۲ ابرپتانسیل معروف در مراجع [۱ تا ۱۰]، معرفی شده‌اند که معادله شرودینگر با پتانسیلهای حاصل از آنها دارای حل دقیق است.

به لحاظ نوع پارامترها می‌توان ابرپتانسیلهای مشهور را به صورت زیر به سه دسته تقسیم بندی کرد.

۲. ۱. یک ابرپتانسیل با دو پارامتر ثابت A و B که عبارت است از :

$$B_n = B,\ A_n = A \quad \text{با} \quad W = \frac{A}{2}x - B \ , \qquad (۱۱)$$

که مولد پتانسیل نوسانگر انتقال یافته با انرژیهای $\in_n^- = 2nA$ است.

۲. ۲. ابر پتانسیلهایی با یک پارامتر متغیر A و یک پارامتر ثابت B که عبارتند از :

$$B_n = B,\ A_n = A+n \quad \text{با} \quad W = -\frac{A}{r} + Br \ , \qquad (۱۲)$$

که مولد پتانسیل نوسانگر سه بعدی با انرژیهای $\in_n^- = 4nA$ است.

$$B_n = B,\ A_n = A+n \quad \text{با} \quad W = -\frac{A}{r} + \frac{B}{A} \ , \qquad (۱۳)$$

که مولد پتانسیل کولن با انرژیهای $\in_n^- = B^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2}\right)$ است.

$$B_n = B,\ A_n = A - n\alpha \quad \text{با} \quad W = A - B\exp(-\alpha x) \ , \qquad (۱۴)$$

که مولد پتانسیل مورس با انرژیهای $\in_n^- = A^2 - A_n^2$ است.

$$B_n = B,\ A_n = A + n\alpha \quad \text{با} \quad W = -A\cot(\alpha x) - \frac{B}{A} \ , \qquad (۱۵)$$

که مولد پتانسیل روزن مورس ۱ با انرژیهای $\in_n^- = A^2 - A_n^2 + B^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2}\right)$ است.

$$B_n = B,\ A_n = A - n\alpha \quad \text{با} \quad W = A\ \tanh(\alpha x) + \frac{B}{A} \ , \qquad (۱۶)$$

که مولد پتانسیل روزن مورس ۲ با انرژیهای $\in_n^- = A^2 - A_n^2 + B^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2}\right)$ است.

$$B_n = B,\ A_n = A + n\alpha \quad \text{با} \quad W = -A\ \coth(\alpha r) + \frac{B}{A} \ , \qquad (۱۷)$$

که مولد پتانسیل اکارت با انرژیهای $\in_n^- = A^2 - A_n^2 + B^2\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_n^2}\right)$ است.

$B_n = B,\ A_n = A + n\alpha$ با $W = -A\ \tan(\alpha x) + B\sec(\alpha x)$, (۱۸)

که مولد پتانسیل اسکارف ۱ با انرژیهای $\in_n^- = A_n^2 - A^2$ است.

$B_n = B,\ A_n = A - n\alpha$ با $W = A\ \tanh(\alpha x) + B\,\mathrm{sech}(\alpha x)$, (۱۹)

که مولد پتانسیل اسکارف ۲ با انرژیهای $\in_n^- = A^2 - A_n^2$ است.

$W = A\ \coth(\alpha r) - B\ \mathrm{cosech}(\alpha r)$ با

$$B_n = B,\ A_n = A + n\alpha\ , \quad (۲۰)$$

که مولد پتانسیل پاشل - تلر تعمیم یافته با انرژیهای $\in_n^- = A^2 - A_n^2$ است.

۲.۳. ابر پتانسیلهایی با دو پارامتر متغیر B , A که عبارتند از :

$W = A\ \tan(\alpha x) - B\ \cot(\alpha x)$ با

$$B_n = B + n\alpha\ ,\ A_n = A + n\alpha\ , \quad (۲۱)$$

که مولد پتانسیل پاشل - تلر ۱ با انرژیهای $\in_n^- = (A_n + B_n)^2 - (A+B)^2$ است و

$W = A\ \tanh(\alpha r) - B\ \coth(\alpha r)$ با

$$B_n = B + n\alpha\ ,\ A_n = A - n\alpha\ , \quad (۲۲)$$

که مولد پتانسیل پاشل - تلر ۲ با انرژیهای $\in_n^- = (A-B)^2 - (A_n - B_n)^2$ است.

۳. ایجاد ابرپتانسیلهای مورد نظر

با توجه به فرم توابع W در روابط (۱۴) تا (۲۲) در این مقاله به کمک دو پارامتر ثابت β و γ و چهار پارامتر کلی C، D، F و G ابر پتانسیل کلی زیر را در نظر می‌گیریم

$$W = \frac{C e^{-2\beta x} + D e^{-\beta x} + F}{\gamma - e^{-2\beta x}} + G\ . \quad (۲۳)$$

با اعمال شرط شکل ناوردایی (۳) برای ابر پتانسیل فوق تعدادی رابطهٔ قیدی بین پارامترهای C، D، F، G، C_n، D_n، F_n و G_n پیدا می‌شود که حل آنها به صورت کلی به سادگی امکان پذیر نیست ولی اگر حالتهای خاص را مورد نظر قراردهیم، سه مورد از آنها منجر به سه دسته نتیجه زیر می‌شود:

۱.۳. ابرپتانسیلی با یک پارامتر متغیر

برای حالت خاص $G = 0$ قیود حاصل از شکل ناوردایی (۳) برای اولین مرحله $(n = 0)$ به صورت زیراند :

$$\begin{cases} F^2 - \gamma^2 C^2 = F_1^2 - \gamma^2 C_1^2\ , \\ 2FD - \beta\gamma D = 2F_1 D_1 - \beta\gamma D_1\ , \\ D^2 + 2FC - 2\beta\gamma C + 2\gamma C^2 - 2\beta F = \\ D_1^2 + 2F_1 C_1 + 2\beta\gamma C_1 + 2\gamma C_1^2 + 2\beta F_1\ , \\ 2DC - \beta D = 2D_1 C_1 + \beta D_1\ , \\ R_1 = C^2 - C_1^2\ . \end{cases} \quad (۲۴)$$

و برای این روابط انتخاب زیر صحیح است

$$C_1 = C - \beta\ ,\ D_1 = D\ ,\ F = \gamma C\ . \quad (۲۵)$$

یعنی در حالت $G = 0$ ابر پتانسیل مورد نظر ما برای تراز n ام باید به صورت زیر نوشته شود :

$$W_n = \frac{C_n(\gamma + e^{-2\beta x}) + D_n e^{-\beta x}}{\gamma - e^{-2\beta x}}, \quad (۲۶)$$

و روابط لازم برای شکل ناوردایی بین تراز n و $n+1$ به صورت زیراند :

$$D_n = D\ ,\ C_n = C - n\beta, \quad (۲۷)$$

و

$$\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_{n+1}^2\ , \quad (۲۸)$$

سپس با استفاده از روابط (۴) و (۲۸) انرژی ترازها به صورت زیر خواهند بود

$$\in_n^- = C^2 - (C - n\beta)^2\ . \quad (۲۹)$$

با دو تبدیل $C_n \to iC_n$ و $\beta \to -i\beta$ چهار رابطهٔ فوق به صورت زیر در می‌آیند :

$$W_n = \frac{iC_n(\gamma + e^{2i\beta x}) + D_n e^{i\beta x}}{\gamma - e^{2i\beta x}}\ , \quad (۳۰)$$

$$D_n = D\ ,\ C_n = C + n\beta\ , \quad (۳۱)$$

$$\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{C}_{n+1}^2 - \mathrm{C}^2\ , \quad (۳۲)$$

و

$$\in_n^- = (C + n\beta)^2 - C^2\ . \quad (۳۳)$$

در حالتهایی خاص از روابط (۲۶) و (۲۹) و (۳۰) و (۳۳) می‌توان تعدادی از ابر پتانسیلهای شناخته شده قبلی و انرژیهای مربوطه را به دست آورد که اهم آنها عبارتند از:

الف) با انتخاب $\gamma=0$ از رابطهٔ (۲۶) رابطه $W=-C-De^{\beta x}$ حاصل می‌شود که با فرض $-C=A$ و $D=B$ و $\beta=-\alpha$ ابر پتانسیل مورس (۱۴) با انرژیهای $\epsilon_n^-=A^2-(A-n\alpha)^2$ است.

ب) با انتخاب $\gamma=1$ از رابطهٔ (۲۶) $W=C\coth\beta x-\frac{D}{2}\operatorname{cosech}\beta x$ نتیجه می‌شود که با فرض $\beta=\alpha$، C=A و $D=-2B$ ابر پتانسیل پاشل - تلر تعمیم یافته (۲۰) با انرژیهای $\epsilon_n^-=A^2-(A-n\alpha)^2$ است.

ج) با انتخاب $\gamma=1$ از رابطهٔ (۲۶) $W=C\tanh\alpha x-\frac{D}{2}\operatorname{sech}\alpha x$ حاصل می‌شود که با فرض C=A و $D=-2B$ و $\beta=\alpha$ ابر پتانسیل اسکارف ۲ (۱۹) با انرژیهای $\varepsilon_n^-=A^2-(A-n\alpha)^2$ می‌باشد.

د) با انتخاب $\gamma=-1$، $\beta=\alpha$، $D=-2B$ و C=A از رابطهٔ (۳۰) می‌توان رابطهٔ $W=-A\tan\alpha x+B\sec\alpha x$ را نتیجه گرفت که ابرپتانسیل اسکارف ۱ (۱۸) است و انرژیهای آن از رابطهٔ (۳۳) به صورت $\varepsilon_n^-=(A+n\alpha)^2-A^2$ می‌باشد.

ه) با انتخاب $\gamma=1$، $\beta=-2\alpha$، $D=2i(A-B)$ و $C=A+B$ رابطهٔ (۳۰) به صورت $W=A\tan\alpha x-B\cot\alpha x$ در می‌آید که ابرپتانسیل پاشل - تلر ۱ است و با توجه به روابط (۳۱) و $C_n=-i(A_n+B_n)$ و $D_n=2i(A_n-B_n)$ باید $A_n=A+n\alpha$ و $B_n=B+n\alpha$ باشند و از رابطهٔ (۳۳) هم انرژیهای پاشل - تلر ۱ $\epsilon_n^-=(A+B+2n\alpha)^2-(A+B)^2$ به دست می‌آیند.

و) با انتخاب $\gamma=1$، $\beta=2\alpha$، $D=-2(A+B)$ و $C=A-B$ رابطهٔ (۲۶) به صورت $W=A\tanh\alpha x-B\coth\alpha x$ در می‌آید که ابرپتانسیل پاشل - تلر ۲ است و با توجه به روابط (۲۷) و $C_n=A_n-B_n$ و $D_n=-2(A_n+B_n)$ باید $A_n=A-n\alpha$ و $B_n=B+n\alpha$ باشند و از رابطهٔ (۲۹) هم انرژیهای پاشل - تلر ۲ به صورت $\epsilon_n^-=(A-B)^2(A-B-2n\alpha)^2$ به دست می‌آیند.

۳. ۲. ابر پتانسیلی با دو پارامتر متغیر

در حالت خاص $D=C=0$ با فرض $G=\frac{H}{F}$ رابطهٔ (۲۳) به صورت زیر در می‌آید

$$W=\frac{F}{\gamma-e^{-2\beta x}}+\frac{H}{F} \qquad (۳۴)$$

که برای آن با اعمال شرط ناوردایی (۳) برای $n=0$ لازم می‌شود:

$$F^2-F_1^2+2\gamma(H-H_1)=0\ ,$$
$$\beta(F+F_1)+(H-H_1)=0\ , \qquad (۳۵)$$

و

$$R_1=\frac{H^2}{F^2}-\frac{H_1^2}{F_1^2}\ . \qquad (۳۶)$$

پس از حذف $(H-H_1)$ از دو رابطهٔ (۳۵) می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$F(F-2\gamma\beta)=F_1(F_1+2\gamma\beta)\ ,$$

که در آن جوابی به صورت زیر صدق می‌کند

$$F_1=F-2\beta\gamma\ , \qquad (۳۷)$$

و با قرار دادن (۳۷) در رابطهٔ $\beta(F+F_1)+H-H_1=0$ خواهیم داشت:

$$H_1=H+2\beta F-2\beta^2\gamma\ . \qquad (۳۸)$$

همچنین با اعمال شرط ناوردایی (۳) برای تراز کلی n نیز به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} F_n=F-2n\,\beta\gamma\ , \\ H_n=H+2n\,\beta F-2n^2\,\beta^2\,\gamma\ , \end{cases} \qquad (۳۹)$$

و

$$R_{n+1}=\frac{H_n^2}{F_n^2}-\frac{H_{n+1}^2}{F_{n+1}^2}\ . \qquad (۴۰)$$

و سپس با روابط (۴)، (۳۹) و (۴۰) انرژی ترازها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\epsilon_n^-=\frac{H^2}{F^2}-\frac{H_n^2}{F_n^2}=\frac{H^2}{F^2}-\frac{(H+2n^2\gamma\beta^2)^2}{(F-2n\,\beta\,\gamma)^2}\ . \qquad (۴۱)$$

همچنین با تبدیل $\beta\to i\beta$ و $F_n\to iF_n$ روابط (۳۴)، (۳۹) و (۴۱) به ترتیب به صورت زیر در می‌آیند:

$$W=\frac{iF}{\gamma-e^{-2i\beta x}}-i\frac{H}{\mathrm{F}}\ , \qquad (۴۲)$$

$$\begin{cases} F_n = F - 2n\,\beta\gamma \ , \\ H_n = H - 2n\,\beta\,F + 2n^2\,\beta^2\,\gamma \ , \end{cases} \qquad (۴۳)$$

$$\epsilon_n^- = \frac{H_n^2}{F_n^2} - \frac{H^2}{F^2} = \frac{(H - 2n\beta F + 2n^2\beta^2\gamma)^2}{(F - 2n\beta\gamma)^2} - \frac{H^2}{F^2} \ . \qquad (۴۴)$$

در حالت خاص $\gamma = 0$ که ابرپتانسیل (۳۴) به صورت $W = \frac{H}{F} - F\,e^{+2\beta x}$ در می‌آید و با فرض $-2\beta = \alpha$، $F = B$ و $\frac{H}{F} = A$، همان ابرپتانسیل مورس $W = A - B\,e^{-\alpha x}$ است و از (۳۹) و (۴۱) روابط تبدیل $B_n = B$ و $A_n = A - n\alpha$ و انرژیهای $\varepsilon_n^- = A^2 - (A - n\alpha)^2$ که مربوط به ابرپتانسیل مورس (۱۴) است به دست می‌آیند. علاوه بر آن با $\gamma = \pm 1$ نیز حالتهای خاص $B = 0$ ابرپتانسیلهای اسکارف ۲، روزن مورس ۱ و ۲ و پاشل - تلر ۱ و ۲ از ابرپتانسیلهای (۳۴) و (۴۲) حاصل می‌شوند که این نتایج خود تسی برای اطمینان از صحت آنهاست.

۳.۳. ابرپتانسیلی با سه پارامتر متغیر

در حالت خاص $D = 0$ که رابطهٔ (۲۳) به صورت زیر در می‌آید :

$$W = \frac{F + C\,e^{-2\beta x}}{\gamma - e^{-2\beta x}} + G \ , \qquad (۴۵)$$

با اعمال شرط شکل ناوردایی (۳) برای اولین مرحله $(n = 0)$ ضرورتاً باید قیود زیر برقرار باشند :

$$F^2 - F_1^2 + 2\gamma\,(FG - F_1G_1) + 2\gamma^2(CG - C_1G_1) - \gamma^2(C^2 - C_1^2) = 0 \ , \qquad (۴۶)$$

$$\gamma(C^2 - C_1^2) - \gamma\,(CG - C_1G_1) + (FC - F_1C_1) - (FG - F_1G_1) - \gamma\beta(C + C_1) - \beta(F + F_1) = 0 \ , \qquad (۴۷)$$

$$R_1 = G^2 - G_1^2 + C^2 - C_1^2 - 2\,(CG - C_1G_1) = (G - C)^2 - (G_1 - C_1)^2 \ . \qquad (۴۸)$$

اکنون با به دست آوردن G_1 از (۴۶) و (۴۷) و مساوی گذاشتن آنها به نتیجه زیر می‌رسیم

,

$$(F + \gamma\,C)\,(F + \gamma\,C - 2\gamma\,\beta) = (F_1 + \gamma\,C_1)\,(F_1 + \gamma\,C_1 + 2\gamma\,\beta) \qquad (۴۹)$$

که در آن روابط زیر صدق می‌کنند

$$F_1 = F - \gamma\beta \ , \qquad (۵۰)$$

$$C_1 = C - \beta \ . \qquad (۵۱)$$

با قرار دادن (۵۰) و (۵۱) در رابطهٔ (۴۶) G_1 به صورت زیر به دست می‌آید :

$$G_1 = \frac{G(F + \gamma\,C) - \beta\,(\gamma\,C - F)}{F + \gamma\,C - 2\gamma\beta} \ . \qquad (۵۲)$$

در مرحلهٔ دوم نیز با اعمال شرط شکل ناوردایی (۳) خواهیم داشت :

$$\begin{cases} F_2 - F - 2\gamma\,\beta \ , \\ C_2 = C - 2\beta \ , \\ G_2 = \dfrac{G(F + \gamma\,C) - 2\beta(\gamma\,C - F)}{F + \gamma\,C - 4\gamma\,\beta} \ , \\ R_2 = (G_1 - C_1)^2 - (G_2 - C_2)^2 \ . \end{cases} \qquad (۵۳)$$

به همین ترتیب در مرحلهٔ n ام نیز خواهیم داشت :

$$F_n = F - n\,\gamma\beta \ , \qquad (۵۴)$$

$$C_n = C - n\,\beta \ , \qquad (۵۵)$$

$$G_n = \frac{G(F + \gamma\,C) - n\beta\,(\gamma\,C - F)}{F + \gamma\,C - 2\,n\gamma\beta} \ , \qquad (۵۶)$$

$$R_n = (G_{n-1} - C_{n-1})^2 - (G_n - C_n)^2 \ . \qquad (۵۷)$$

و با استفاده از رابطهٔ (۴) نیز انرژیهای آن به صورت زیراند:

$$\epsilon_n^- = (G - C)^2 - (G_n - C_n)^2 \ . \qquad (۵۸)$$

با تبدیل $\beta \to i\beta$، $C \to iC$، $F \to iF$ و $G \to iG$ روابط (۴۵) و (۵۸) به صورت زیر در می‌آیند

$$W = i\left(\frac{F + C\,e^{-2i\,\beta\,x}}{\gamma - e^{-2i\,\beta\,x}} + G\right) , \qquad (۵۹)$$

$$\epsilon_n^- = (G_n - C_n)^2 - (G - C)^2 \ . \qquad (۶۰)$$

ولی در روابط (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) تغییری حاصل نمی‌شود.

باز هم در اینجا برای اطمینان از صحت روابط فوق حالتهای خاصی از دوابرپتانسیل (۴۵) و (۵۹) را به ترتیب زیر به دست می‌آوریم :

الف) در حالت خاص $\gamma = 0$ رابطهٔ (۴۵) به صورت $W = G - C - F\,e^{2\beta x}$ و روابط (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) به صورت $F_n = F$، $C_n = C - n\beta$ و $G_n = G + n\beta$ در می‌آیند که با فرض $G - C = A$ و $F = \beta$ و $\beta = -\frac{\alpha}{2}$ به روابط مربوط به ابرپتانسیل مورس ($W = A - Be^{-\alpha x}$، $A_n = A - n\alpha$،

$B_n = B$) و از رابطهٔ (۵۸) نیز انرژیهای مورس $\in_n = A^2-(A-n\alpha)^2$ به دست می‌آیند.

ب) در حالت خاص $\gamma = 1$ که $F_n = F-n\beta$ و $C_n = C-n\beta$ است می‌توان فرض کرد $C=F$ و سپس با فرض $\beta=-\alpha$ معادلهٔ (۴۵) به $W=-F\coth h\alpha x+G$ در می‌آید و برای آن $F_n = F+n\beta$ و $G_n=\frac{GF}{F_n}$اند و با فرض $F=A$ و $G=\frac{B}{A}$ ابرپتانسیل اکارت $W=-A\coth\alpha x+G$ و از رابطهٔ (۵۸) انرژیهای اکارت به صورت زیر به دست می‌آیند :

$$\in_n=\left(\frac{B}{A}-A\right)^2-\left(\frac{B}{A+n\alpha}-(A+n\alpha)\right)^2= A^2-(A+n\alpha)^2+B^2\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{(A+n\alpha)^2}\right).$$

ج) در حالت خاص $\gamma=1$، $\beta=\alpha$، $F=C=-A$ و $G=i\frac{B}{A}$ نیز مشابه محاسبات فوق ابرپتانسیل (۵۹) به ابرپتانسیل روزن مورس ۱، $\left(W=-A\cot\alpha x-\frac{B}{A}\right)$ و انرژیهای (۶۰) نیز به انرژیهای روزن مورس ۱ تبدیل می‌شوند :

$$\in_n^-=(A+n\alpha)^2-A^2+\frac{B^2}{A^2}-\frac{B^2}{(A+n\alpha)^2}\ .$$

د) در حالت خاص $\gamma=-1$، $\beta=\alpha$، $C=-F=A$ و $G=\frac{B}{A}$ نیز ابرپتانسیل (۴۵) به ابرپتانسیل روزن مورس ۲، $\left(W=A\,taxh\ \alpha x+\frac{B}{A}\right)$ و انرژیهای (۵۸) نیز به انرژیهای روزن مورس ۲ تبدیل می‌شوند.

$$\in_n^-=A^2-(A-n\alpha)^2+\frac{B^2}{A^2}-\frac{B^2}{(A-n\alpha)^2}\ .$$

۴. کاربرد برای ذرات بنیادی

در مقاله‌های طیف سنجی کوارکونیم به کمک معادله کلاین گوردان [۱۱] و حالت همدوس برای ذره نسبیتی بدون اسپین [۱۲] کاربردهایی از انرژیهای معادله شرودینگر در به دست آوردن طیف انرژیهای ذرات نسبیتی وارد شده و اهمیت ترازهای انرژی معادله نسبیتی کلاین – گوردان با فواصل مساوی بررسی شده است و مقادیر ویژه معادله کلاین – گوردان (E_n ها) بر حسب مقادیر ویژه معادله شرودینگر ($\in_n$ها) به صورت زیر است که در آن m جرم سکون ذره است

$$E_n=\sqrt{2m\in_n}\ . \tag{61}$$

از طرف دیگر چنانچه برای پتانسیلی مثل V^- انرژیهای معادلهٔ شرودینگر به صورت $\in_n^-=f(n)-\delta$ باشند که در آن δ ثابتی مستقل از n است، آنگاه برای پتانسیل $V=V^-+\delta$ انرژیهای معادلهٔ شرودینگر به صورت $\in_n=f(n)$ و طبق رابطهٔ (۶۱) انرژیهای معادله کلاین گوردان را برای پتانسیل $V=V^-+\delta$ باید از رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$E_n=\sqrt{2m\,f(n)}\ . \tag{62}$$

لذا چنانچه E_n تابع مرتبهٔ اولی از n به دست آید ترازهای انرژی کلاین گوردان فواصل مساوی خواهند داشت و در این قسمت با منظور فوق از بعضی از $\in_n^-$های حاصل از ابرپتانسیلهایی که در قسمتهای ۳.۱، ۳.۲ و ۳.۳ به دست آورده‌ایم به ترتیب زیر استفاده می‌کنیم :

الف) با توجه به روابط (۳۰) و (۳۳) چنانچه با استفاده از

$$W=\frac{iC(\gamma+e^{2i\beta x})+D\,e^{i\beta x}}{\gamma-e^{2i\beta x}}\ , \tag{63}$$

پتانسیلی به صورت

$$V=W^2-W'+C^2\ , \tag{64}$$

تشکیل دهیم برای آن $f(n)$ به صورت زیر است

$$f(n)=\in_n'+C^2=(C+n\beta)^2\ . \tag{65}$$

در نتیجه با استفاده از (۶۲) و (۶۵) انرژیهای معادله کلاین گوردان عبارتند از :

$$E_n=\sqrt{2m}\ \ |C+n\beta|\ , \tag{66}$$

که ترازهای انرژی با فواصل مساوی $\left(E_{n+1}-E_n=\sqrt{2m\beta^2}\right)$ هستند.

ب) با توجه به رابطهٔ (۴۴) چنانچه پتانسیل را از رابطهٔ

$$V=W^2-W'+\frac{H^2}{F^2}\ , \tag{67}$$

و به کمک ابرپتانسیل (۴۲) به دست آوریم خواهیم داشت

$$f(n)=\left(\frac{H-2n\beta F+2n^2\beta^2\gamma}{F-2n\beta\gamma}\right)^2 . \qquad (68)$$

و لذا از (۶۲) و (۶۸) انرژیهای معادلهٔ کلاین گوردان آن را باید از رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$E_n=\sqrt{2m}\left|\frac{H-2n\beta F+2n^2\beta^2\gamma}{F-2n\beta\gamma}\right| , \qquad (69)$$

که برای ایجاد ترازهای با فواصل مساوی کافی است که از حالت خاص $H=\frac{F^2}{2\gamma}$ استفاده می‌شود که در این صورت داریم :

$$E_n=\sqrt{2m}\left|\frac{F}{2\gamma}-n\beta\right| , \qquad (70)$$

$$W=iF\left(\frac{1}{\gamma-e^{-2i\beta x}}-\frac{1}{2\gamma}\right)=\frac{iF}{2\gamma}\left(\frac{\gamma+e^{-2i\beta x}}{\gamma-e^{-2i\beta x}}\right) . \qquad (71)$$

با توجه به رابطهٔ (۶۷) برای پتانسیل $V=W^2-W'+\frac{F^2}{4\gamma^2}$ انرژیهای معادلهٔ کلاین گوردان از رابطهٔ (۷۰) به دست می‌آیند که دارای ترازهای انرژی با فواصل مساوی $\left(E_{n+1}-E_n=\sqrt{2m}\,\beta^2\right)$ هستند.

ج) با توجه به رابطهٔ (۶۰) اگر پتانسیل را از رابطه

$$V=W^2-W'+(G-C)^2 , \qquad (72)$$

و به کمک ابرپتانسیل (۵۹) به دست آوریم، داریم:

$$f(n)=(G_n-C_n)^2 . \qquad (73)$$

لذا از رابطهٔ (۶۲) E_nها عبارتند از

$$E_n=\sqrt{2m}\left|G_n-C_n\right|, \qquad (74)$$

که با استفاده از روابط (۵۵) و (۵۶) به صورت زیر در می‌آیند

$$E_n=\sqrt{2m}\left|\frac{G(F+\gamma C)-n\beta(\gamma C-F)}{F+\gamma C-2n\gamma\beta}-C+n\beta\right| . \qquad (75)$$

اگر از حالت خاص $F=\gamma(C-2G)$ استفاده کنیم رابطهٔ (۷۵) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$E_n=\sqrt{2m}\left|G-C+n\beta\right| . \qquad (76)$$

نتیجه اینکه وقتی پتانسیل (۷۲) از ابرپتانسیل

$$W=i(C-G)\frac{\gamma+e^{-2i\beta x}}{\gamma-e^{-2i\beta x}} , \qquad (77)$$

به دست آید انرژیهای معادلهٔ کلاین گوردان با این پتانسیل از رابطهٔ (۷۶) پیدا می‌شوند که دارای ترازهای انرژی با فواصل مساوی ($E_{n+1}-E_n=\sqrt{2m\,\beta^2}$) است.

بدیهی است بین دو تابع (۷۱) و (۷۷) تفاوت اساسی وجود ندارد ولی ابرپتانسیل (۶۳) کلی‌تر از (۷۱) و (۷۷) است.

۵. نتیجه‌گیری

به طور خلاصه می‌توان گفت که با این محاسبات توانسته‌ایم سه نوع ابرپتانسیل جدید پیدا کنیم، دستهٔ اول ابرپتانسیل (۲۶) همراه با روابط تبدیل (۲۷) و انرژیهای (۲۹) و یا ابرپتانسیل (۳۰) همراه با روابط تبدیل (۳۱) و انرژیهای (۳۳) که یک پارامتر متغیر دارند و به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به ابرپتانسیلهای مورس، پاشل – تلر تعمیم یافته، پاشل – تلر ۱ و ۲ و اسکارف ۱ و ۲ تبدیل می‌شوند.

دستهٔ دوم ابرپتانسیل (۳۴) همراه با روابط تبدیل (۳۹) و انرژیهای (۴۱) و یا ابرپتانسیل (۴۲) همراه با روابط تبدیل (۴۳) و انرژیهای (۴۴) که دو پارامتر متغیر دارند و به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به ابرپتانسیلهای مورس، اسکارف۲، روزن مورس ۱ و۲ و پاشل – تلر۱ و ۲ تبدیل می‌شوند.

دستهٔ سوم ابرپتانسیلهای (۴۵) و (۵۹) با روابط تبدیل (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) و به ترتیب با انرژیهای (۵۸) و (۶۰) که دارای سه پارامتر متغیرانـد و به ازای مقادیر خاصی از پارامترها به ابرپتانسیلهای مورس، اکارت و روزن مورس ۱ و ۲ تبدیل می‌شوند.

چنانچه بخواهیم نظیر مقالهٔ ″ حالت همدوس برای ذرهٔ نسبیتی بدون اسپین [۱۲] ″ برای ذرات بنیادی از معادلهٔ کلاین گوردان و پتانسیلهای جدیدی که پیدا کرده‌ایم استفاده کنیم دستهٔ اول دارای ترازهای انرژی با فواصل مساوی‌اند ولی به ازای مقادیر کلی پارامترها دستهٔ دوم و سوم ترازهای انرژی با فواصل غیر مساوی دارند و با اعمال قید مساوی شدن فواصل ترازها، این دو دسته نیز به ابرپتانسیلهایی با یک پارامتر متغیر تبدیل می‌شوند.

مراجع

1. F Cooper, A Khare and U Sukhatme, *Phys. Rep*. **251** (1995) 267.
2. F Cooper, J N Ginocchio and A Wipf, *Phys. Lett*. A **129** (1988) 145.
3. F Cooper, J N Ginocchio and A Khare, *Phys. Rev*. D **36** (1987) 2458.
4. A Khare and U Sukhatme, *J. of Phys*. A **26** (1993) L 901.
5. A Khare and U Sukhatme, *J. of Phys*. A **21** (1988) L 501.
6. C Chuan, *J. of Phys*. A **24** (1991) L 1165.
7. R Dutt, A Khare and U Sukhatme, *Am. J. of Phys*. **58** (1988) 163.
8. R Dutt, A Khare and U Sukhatme, *Phys. Lett* B **181** (1986) 295.
9. J Dabrowska, A Khare and U Sukhatme, *J. of Phys*. A **21** (1988) L 195.
10. L Gedenshtein, *JETP Lett* **38** (1983) 356.
11. منصور حقیقت، بهروز میرزا و علی دادخواه، *مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران*، **۲**، ۳ (۱۳۷۹).
12. M Haghighat and A Dadkhah, *Phys. Lett*. A **316** (2003) 271.