

فرمولبندی هندسی کوانتش تغییر شکل برزین

رسول رکنی زاده
دانشگاه اصفهان - گروه فیزیک

دریافت نسخه نهایی: ۸۱/۲/۹۰

دریافت مقاله: ۸۰/۴/۱۰

چکیده

در این مقاله سعی می شود تا کوانتش برزین روی فضای هیلبرت تصویری $\mathbb{P}(H)$ مجدداً فرمولبندی شود تا از این طریق رابطه (پاد) کوانتش برزین با فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی آشکار شود. خواهیم دید از این طریق بروشنی می توان دینامیک در کوانتش برزین را مورد مطالعه قرار داد و از کوانتش برزین حد کلاسیک فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی را بدست آورد.

واژه های کلیدی: کوانتش برزین، هندسه مکانیک کوانتومی، کوانتش تغییر شکل

۱ مقدمه

فرض می شود یک چند گونای کیلری است. برزین نشان داد که که سمبلهای هموردا یک جبر h تشکیل می دهند که این جبر در حد $h \rightarrow 0$ به براکنهای پوآسون بین مشاهده پذیرهای متناظر کلاسیک منجر می شود. هر چند وجود جبر h برای همه چند گوناها ی سیمپلکتیک اثبات شده است [۴] اما ساختار این جبرها عمومی نمی باشد.

در این مقاله خواهیم دید که در واقع جبر h یک جبر پوآسون است که از طریق دو فرمی فوبینی - استادی روی فضای حالت های همدوس تعریف می شود. فضای حالت های همدوس را به صورت زیر تعریف می کنیم.

کوانتش کلیدواژه ای برای بیان انگیزه تلاشهایی است که در صدد توصیف همه انواع برهم کنشها، به خصوص گرانش، در چارچوب ریاضی هندسی واحدی می باشند. در کوانتش برزین از یک نمایش جبر C^* مشاهده پذیرهای کوانتومی، سمبلهای هموردای متناظر با آنها تعریف می شود. این سمبلها مقادیر چشم داشتی مشاهده پذیرها در حالت های همدوس برزین هستند. حالت های همدوس برزین توابع هولومورفیک روی فضای فاز کلاسیک M می باشند که

دینامیک : از طریق عملگر هامیلتونی H در معادله شرودینگر $H\psi = i\hbar\partial_t\psi$

کوانتش

کوانتش عبارت است از فرایندی که در آن این دو ساختار به هم مربوط می شوند.

۲ کوانتش برزین

برزین [۲] در سالهای ۱۹۷۴-۱۹۷۵ یک روش جالب برای کوانتش سیستم های کلاسیک براساس حالت های همدوس ارائه نمود. رویکرد اساسی در این روش آن است که فضای فاز کلاسیک $M^2(q_1, \dots, p_f)$ با f درجه آزادی را با فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به هم مربوط کنند. اینکار با استفاده از حالت های همدوس $\Phi_z \in \mathcal{H}$ انجام می شود که از طریق نقاط فضای فاز M پارامتریزه می شوند. حال اگر مقدار چشم داشتی یک عملگر کراندار را در حالت های همدوس محاسبه کنیم یک تابع دارای مقدار مختلط روی فضای فاز بدست می آید. برای یک زیر فضا از توابع روی فضای فاز، یعنی سمبل های هموردا، یک نگاشت کوانتش ساخته می شود. به این ترتیب به هر عملگر یک سمبل هموردا نسبت داده می شود که این سمبلها در یک جبر شرکت پذیر ناجابه جایی با ضرب $*$ ، که به $\hbar$ وابسته است شرکت می کنند. تغییر $\hbar$ مطابق با تغییر شکل این جبر است. ضرب $\hbar$ بایستی در حد $\hbar \rightarrow 0$ به حاصل ضرب نقطه به نقطه معمولی بین توابع تبدیل شود و اصل انطباق نیز برآورده شود

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0^+} \hbar^{-1} (f *_{\hbar} g - g *_{\hbar} f) = -i \{f_0, g_0\} \quad (1.2)$$

که در اینجا

$$f_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0^+} f, g_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0^+} g.$$

به این ترتیب کوانتش برزین یک کوانتش برای حالت ها و پاد کوانتش برای عملگرهاست

$$M \ni z \rightarrow \Phi_z \in \mathcal{H}, \quad A \rightarrow \frac{\langle \Phi_z | A | \Phi_z \rangle}{\langle \Phi_z, \Phi_z \rangle} \quad (2.2)$$

حالت های همدوس یک زیر فضای چگال $\tilde{\mathcal{H}}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را می پوشانند. $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{H}})$ ، فضای براکنشی حالت های همدوس را با M نمایش می دهیم. M یک خمینه کیلری با دو فرمی سیمپلکتیک فوینی-استادی است. می توان سمبل های هموردا را به عنوان توابعی روی این فضا در نظر گرفت که از طریق دو فرمی سیمپلکتیک یک جبر پوآسون تشکیل می دهند.

با نشان دادن اینکه بین M و M یک نگاشت نشانندگی وجود دارد که هر حالت $z \in M$ را به یک حالت $Z \in Z$ بطور پیوسته می نگارد، روشن می شود که در واقع کوانتش برزین رابطه این دو جبر پوآسون می باشد. به این ترتیب به یک فرمولبندی هندسی مشترک برای مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک دست می یابیم. بویژه این فرمولبندی روی خمینه فضای فاز، که ضرورتاً خطی نیست، انجام می شود. دینامیک کوانتومی در این فرمولبندی از طریق معادلات هامیلتون، به جای معادله شرودینگر، داده می شود. دینامیک در کوانتش برزین نیز به صورت رابطه معادلات هامیلتون در M و M تعریف می شود.

آنچه گفته شد را می توان به صورت زیر خلاصه نمود

ساختار مکانیک کلاسیک

محیط ریاضی : فضای فاز M که یک خمینه سیمپلکتیک عموماً غیرخطی است

حالت ها: نقاط (q, p) در فضای فاز M

مشاهده پذیرها: توابع f روی M

نتایج اندازه گیری : مقادیر دقیق توابع در نقاط $f(q, p) : M$

دینامیک : از طریق تابع هامیلتونی به صورت معادلات

هامیلتون : $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q^i$ و $\dot{q}^i = \partial H / \partial p_i$

ساختار مکانیک کوانتومی

محیط ریاضی : فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ ، که یک فضای برداری خطی نرم دار کامل است

حالت ها: بردارهای $\psi \in \mathcal{H}$

مشاهده پذیرها: عملگرهای خود الحاق A روی $\mathcal{H}$

نتایج اندازه گیری : مقادیر چشم داشتی عملگرها در

حالت های مختلف $\langle A \rangle_{\psi} = \langle \psi | A | \psi \rangle$

۱.۲ کوانتش برزین روی یک خمینه کیلری

فرض می‌کنیم M یک خمینه کیلری با فرم سیمپلکتیک ω و براکت پواسون $\{ \cdot, \cdot \}$ باشد. منظور از کوانتش برزین (M, ω) یک جبر شرکت پذیر $\mathcal{U}$ با خودوارونی است که شرایط زیر را برآورده می‌کند

(۱) یک خانواده $\mathcal{A}_h$ از جبرهای شرکت پذیر و ضرب $*_h$ با تعریفی که در بالا داده شده است یعنی

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1}(f *_h g - g *_h f) = -i\{f, g\} \quad (3.2)$$

که در اینجا

$$f_* = \lim_{h \rightarrow 0^+} f, g_* = \lim_{h \rightarrow 0^+} g.$$

وجود دارد که برای آن داریم

• (الف) هر $\mathcal{A}_h$ یک جبر از توابع روی M با جمع نقطه به نقطه و ضرب در اسکالر و مزدوج مختلط به عنوان خودوارونی می باشد؛

• (ب) $(0, \infty) \subset \Delta$ و $h \in \Delta$ و $0 \notin \Delta$ ؛

• (ج) $\mathcal{U}$ یک زیر جبر مستقیم $\oplus \mathcal{A}_h$ از جبرهای $\mathcal{A}_h$ است که برای آن $h \in \Delta$ می باشد. عناصر $\mathcal{U}$ به شکل $f(h|\cdot)$ نوشته می‌شوند که برای آنها $f(h|\cdot) \in \mathcal{A}_h$ و $z \in M$ و $h \in \Delta$ ؛

(۲) برای $f \in \mathcal{U}$ و $z \in M$ حد زیر وجود دارد

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h|z) = \varphi(f)(z), \quad (4.2)$$

نگاشت $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}(M)$ که $\mathcal{F}(M)$ مجموعه توابع هموار روی M است، دارای این ویژگی است که برای جبر خطی $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$

• (الف) $\varphi(f_1 * f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$

• (ب)

$$\varphi\left(\frac{1}{h}(f_1 * f_2 - f_2 * f_1)\right) = -i\{\varphi(f_1), \varphi(f_2)\}$$

در اینجا $f_1, f_2 \in \tilde{\mathcal{U}}$

• (ج) برای هر دو نقطه $z_1, z_2 \in M$

یک $f \in \tilde{\mathcal{U}}$ وجود دارد به طوری که $\varphi(f)(z_1) \neq \varphi(f)(z_2)$

شرایط (۲.الف) و (۲.ب) اصل انطباق ضعیف نامیده می‌شوند. اگر $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ آنگاه به آن اصل انطباق قوی می‌گویند. (ج) تضمین می‌کند که به اندازه کافی توابع کوانتش پذیر وجود دارد.

۲.۲ جبر سمبلهای هموردا

ابتدا فضای برگمن وزندار $\mathcal{H}_h$ را معرفی می‌کنیم

$$\mathcal{H}_h = \{f | \int |f(z)|^2 e^{-\frac{1}{h}\Psi(z, \bar{z})} d\nu(z, \bar{z}) = \|f\|_h^2 < \infty\} \quad (5.2)$$

این فضا یک زیر فضای $L^2(M, e^{-\frac{1}{h}\Psi})$ است. در واقع $\mathcal{H}_h$ فضای توابع تحلیلی مربعاً انتگرال پذیر روی خمینه کیلری M با سنجۀ زیر است

$$d\mu(z, \bar{z}) = e^{-\frac{1}{h}\Psi(z, \bar{z})} d\nu(z, \bar{z}) \quad (6.2)$$

دیگر ویژگی‌های این فضا در [۱۳] و [۱۵] آمده است. حالت‌های همدوس برزین $\Phi_{\bar{z}}$ یک مجموعه فوق کامل در این فضا می‌سازند. با توجه به تعریف حاصل ضرب داخلی در این فضا داریم

$$\Phi_{\bar{\zeta}}^h(z) = \langle \Phi_{\bar{z}}^h, \Phi_{\bar{\zeta}}^h \rangle_h =: K_h(\bar{\zeta}, z) \quad (7.2)$$

که در اینجا $K_h(\bar{\zeta}, z)$ کرنل برگمن است [۱۵] که دارای ویژگی مهم بازآفرینی است

$$f(\zeta) = \langle \Phi_{\bar{\zeta}}^h, f \rangle_h \quad (8.2)$$

به عبارت دیگر

$$\Phi_{\bar{\zeta}}^h(z) = K_h(\bar{\zeta}, z) = \int_M K_h(\bar{\zeta}, \zeta') K_h(\bar{\zeta}', z) d\mu(\bar{\zeta}', \zeta') \quad (9.2)$$

و از اینرو داریم

$$1 = \int |\Phi_{\bar{z}}^h| \langle \Phi_{\bar{z}}^h | d\mu(\bar{z}, z) \quad (10.2)$$

همچنین کرنل برگمن هرمیتی است یعنی

$$K_h(\bar{\zeta}, z) = \overline{K_h(\bar{z}, \zeta)} \quad (11.2)$$

با توجه به دو ویژگی فوق کرنل برگمن به طور یگانه برای هر فضا تعیین می‌شود. در واقع کرنل برگمن حامل ساختار

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^*(\bar{\zeta}, z) &= \overline{\widetilde{A}(\bar{z}, \zeta)}, \quad c\widetilde{A} = c\widetilde{A}, c \in \mathbb{C} \\ (Af)(z) &= \int_M \widetilde{A}(\bar{\zeta}, z) K_h(\bar{\zeta}, z) f(\zeta) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta).\end{aligned}\quad (16.2)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \widetilde{A} *_h \widetilde{B}(z) \\ &= \int_M \widetilde{A}(\bar{\zeta}, z) \widetilde{B}(\bar{z}, \zeta) \frac{|K_h(\bar{\zeta}, z)|^2}{K_h(\bar{z}, z)} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{h}\Psi(\bar{\zeta}, z)} d\mu(\bar{\zeta}, \zeta)\end{aligned}\quad (17.2)$$

تحدید $\widetilde{A}(\bar{\zeta}, z)$ به عناصر قطری

$$\widetilde{A}(z) = \widetilde{A}(\bar{z}, z), \quad z \in M \quad (18.2)$$

سمبل هموردای عملگر A نامیده می‌شود. $\widetilde{A}(z)$ مقدار چشم داشتی A در حالت همردوس Φ_* است که توسط z پارامتریزه می‌شود و لذا تابعی روی خمینه M است. بنا بر قضیه شوارتز داریم

$$|\widetilde{A}(z, \bar{z})| \leq \|A\|, \quad \forall z \in M, \quad (19.2)$$

یعنی $\widetilde{A}(z)$ یک تابع کراندار روی M است.

به این ترتیب ما به یک تحقق از جبر A می‌رسیم

$$A = \{\widetilde{A}(z) : \text{عملگر خود الحاق روی } \mathcal{H}\} \quad (20.2)$$

از آنجایی که یک تابع تحلیلی از دو متغیر z و $\bar{z}$ به طور یگانه از طریق تحدید به عناصر پاد قطری یعنی $\bar{z} = \bar{\zeta}$ معین می‌شود [۸] در نتیجه $\widetilde{A}(z)$ به طور یگانه $\widetilde{A}(\bar{\zeta}, z)$ را و بنابراین $K_A(\bar{\zeta}, z)$ و بالاخره A را تعیین می‌کند؛ لذا تناظر $\widetilde{A}(z) \leftrightarrow A$ یک به یک است. از اینرو می‌توان جمع را از طریق $(\widetilde{A} + \widetilde{B})(z) = \widetilde{(A + B)}(z)$ ، ضرب در یک اسکالر را از طریق $c\widetilde{A} = \widetilde{cA}$ و خودوارونی را از طریق $(\widetilde{A})^* = \widetilde{A}^*$ حاصل ضرب در A را از طریق (۱۷.۲) تعریف کرد.

بنابراین A_h یک جبر $*$ -شرکت پذیر روی M است که عنصر همانی آن $\widetilde{I} = 1$ می‌باشد. A_h جبر سمبلهای هموردای $\mathcal{H}_h$ نامیده می‌شود و با جبر همه عملگرهای خودالحاق روی $\mathcal{H}_h$ یکریخت است.

بنابراین در اینجا نیز به تحقق از جبر مجرد A_h رسیدیم که برای بدست آوردن مشاهده پذیرهای کوانتومی نیاز داشتیم.

هندسی فضای فاز به (فضای هیلبرت) حالت‌های همردوس است.

حال عملگر برافاکشنی P_h از $L^2(M, e^{-\frac{1}{h}\Psi})$ به $\mathcal{H}_h$ را تعریف می‌کنیم

$$(P_h f)(z) = \int f(\bar{\zeta}, \zeta) K_h(\bar{\zeta}, z) e^{-\frac{1}{h}\Psi(\bar{\zeta}, z)} d\nu(\bar{\zeta}, \zeta) \quad (12.2)$$

برای یک عملگر کراندار A روی $\mathcal{H}_h$ داریم

$$\begin{aligned}(Af)(z) &= \langle K_h(z, \cdot), Af \rangle_h = \langle A^\dagger K_h(z, \cdot), f \rangle_h \\ &= \int_M \overline{A^\dagger K_h(\bar{z}, \cdot)}(\bar{\zeta}) f(\zeta) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta) \\ &= \int_M f(\zeta) K_A(\bar{\zeta}, z) d\mu(\bar{\zeta}, \zeta),\end{aligned}\quad (13.2)$$

که در اینجا

$$\begin{aligned}K_A(\bar{\zeta}, z) &= \overline{(A^\dagger K_h(z, \cdot))(\bar{\zeta})} \\ \overline{\langle K_h(\bar{\zeta}, \cdot), A^\dagger K_h(z, \cdot) \rangle_h} &= \langle A^\dagger K_h(z, \cdot), K_h(\bar{\zeta}, \cdot) \rangle_h \\ &= \langle K_h(\bar{z}, \cdot), AK_h(\bar{\zeta}, \cdot) \rangle_h\end{aligned}\quad (14.2)$$

لذا هر عملگر کراندار A روی $\mathcal{H}_h$ یک عملگر انتگرالی با کرنل K_A می‌باشد. فرض می‌کنیم A و B عملگرهای کراندار باشند. با توجه به تعریف کرنل به سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}K_{A+B} &= K_A + K_B, \quad K_{cA} = cK_A, \quad c \in \mathbb{C} \\ K_{A^\dagger}(\bar{\zeta}, z) &= \overline{K_A(\bar{z}, \zeta)}, \quad K_I(\bar{\zeta}, z) = K_h(\bar{\zeta}, z) \\ K_{AB}(\bar{\zeta}, z) &= \int K_A(\bar{\xi}, z) K_B(\bar{\zeta}, \xi) d\mu(\bar{\xi}, \xi).\end{aligned}$$

(برای سادگی در نوشتن، شناسه h در بعضی موارد نوشته نمی‌شود).

تابع

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(\bar{\zeta}, z) &= \frac{K(\bar{\zeta}, z)}{K_A(\bar{\zeta}, z)} = \frac{\langle K_h(z, \cdot), AK_h(\bar{\zeta}, \cdot) \rangle_h}{K_h(\bar{\zeta}, z)} \\ &= \frac{\langle \Phi_z^h, A\Phi_{\bar{\zeta}}^h \rangle_h}{\langle \Phi_z^h, \Phi_{\bar{\zeta}}^h \rangle_h}\end{aligned}\quad (15.2)$$

یک تابع مرموفریک در z و پادمرموفریک در $\bar{z}$ است و در روابط زیر صدق می‌کند

$$\widetilde{I}(\bar{\zeta}, z) = 1, \quad \widetilde{(A+B)} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$$

۳.۲ فرضیات و اصل انطباق

فرض می‌کنیم $\bar{U} \subset U$ مجموعه همه توابعی باشد که بتوان آنها را به صورت زیر بسط داد

$$f(h|z) = f(\circ|\bar{z}, z) + hf_1(h|\bar{z}, z) + h^2 f_2(h|\bar{z}, z) \quad (24.2)$$

که در اینجا $f_1(h|\bar{z}, z)$ ، $f_2(h|\bar{z}, z)$ و $f_3(h|\bar{z}, z)$ توابع یک و نیم خطی (sesquilinear) روی $M \times \bar{M}$ هستند و یک گسترش تحلیلی روی آن دارند. با این فرضیات می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد

قضیه ۱.۲. اگر فرضیات A, B, C و D برقرار باشند و $h \in \Delta'$ در حد $h \rightarrow 0$ داریم

$$(f * g)(h|z) = f(\circ|z)g(\circ|z) + O(h) \quad (25.2)$$

$$\frac{1}{h}(f * g - g * f)(h|z) = -i\{f(\circ|\cdot), g(\circ|\cdot)\}(z) + O(h). \quad (26.2)$$

که در اینجا Δ' زیر مجموعه‌ای از Δ است که $f(h|z)$ با توجه به تعریف نرم در H_h مربعاً انتگرال پذیر است.

اثبات. [۲]

خلاصه. با توجه به فرایند (پاد)کوانتش برزین ما فضای هیلبرت حالت‌های همدوس را روی خمینه کیلری فضای فاز کلاسیک بنا کردیم به طوری که هر حالت با یک نقطه در فضای فاز به هم مربوط می‌شود (کوانتش حالتها) و جبر مشاهده پذیرهای کلاسیک را از سمبلهای هموردای مشاهده پذیرهای کوانتومی بدست آوردیم (پادکوانتش مشاهده پذیرها).

حال می‌خواهیم از روش فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی برای یک فرمولبندی هندسی کوانتش برزین استفاده کنیم.

در اینجا بایستی نشان داد که می‌توان از طریق جبر A_h در حد $h \rightarrow 0$ جبر پوآسون بین مشاهده پذیرهای کلاسیک متناظر با عملگرهای خودالحاق را بدست آورد. برای اینکار نیاز به فرضیات زیر است

• فرض A یک زیر مجموعه $\Delta \subset \mathbb{R}^+$ که $0 \notin \Delta$ وجود دارد که برای همه $h \in \Delta$ یک ثابت λ_h طوری وجود دارد که

$$K_h(\bar{z}, z) = \lambda_h e^{\frac{1}{h}\Psi(\bar{z}, z)} \quad (21.2)$$

• فرض B یک نقطه $h_0 \in \Delta$ وجود دارد که برای $h \leq h_0$ ، توابع $f(z) \in H_h$ نقاط M را جدا می‌کنند، یعنی برای $z_1, z_2 \in M$ و $z_1 \neq z_2$ ، یک تابع $f(z) \in H_h$ وجود دارد که $f(z_1) \neq f(z_2)$.

• فرض C اگر (z_n) یک دنباله در M باشد و حد $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ برای هر $f \in H_h$ وجود داشته باشد، آنگاه z_n به یک نقطه $z_0 \in M$ همگرا می‌شود.

• فرض D یک نقطه $z_0 \in M$ طوری وجود دارد که $\Psi(z_0, \cdot)$ برابر با یک ثابت است.

فرض D یک شرط بهنجارش است؛ می‌توان بدون ایجاد محدودیت قرار داد $\Psi(z_0, z) = 0$. فرض B تضمین می‌کند که H_h در $C^\infty(M)$ چگال است. فرض A در بعضی از خمینه‌ها می‌تواند مسئله ساز باشد اما در بسیاری از خمینه‌های جالب توجه در فیزیک می‌توان آن را بکاربرد [۶]. در ابتدای این بخش جبر سمبلهای هموردا A_h برای فضای هیلبرت H_h تبیین گردید. فرض می‌کنیم U مجموعه توابع $f(h|z)$ باشد، که در اینجا $h \in \Delta$ و $z \in M$ ، طوری که $f(h|\cdot) \in A_h$ و حد

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h|z) =: f(\circ|z) \quad (22.2)$$

برای هر $z \in M$ وجود داشته باشد. با توجه به عملیات زیر یک جبر شرکت پذیر است

$$(f + g)(h|z) = f(h|z) + g(h|z)$$

$$(cf)(h|z) = cf(h|z)$$

$$(f * g)(h|z) = (f(h|\cdot) * g(h|\cdot))(z). \quad (23.2)$$

۳ فضای فاز کوانتومی

در این مختصات خواهیم داشت $(\psi, \psi) = (1 + \sum_n Z_n^k Z_n^k)$ می توان نشان داد $\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}$ یک نگاشت هولومورف دو سویه است. بنابراین $\{\mathcal{V}_k, \varphi_k\}$ یک اطلس هولومورف است. می توان این اطلس را به صورت دیگری نیز بنا نمود. بنا بر تعریف

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_k &:= \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) : \lambda_k = \langle \phi_k, \psi \rangle \neq 0\} \\ \mathcal{W}_k &:= [\phi_k]^\perp \\ \varphi_k &: \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{W}_k, [\psi] \mapsto \varphi_k([\psi]) = \frac{\psi}{\langle \phi_k, \psi \rangle} - \phi_k.\end{aligned}\quad (4.3)$$

بنابراین برای $[\psi] \in \mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_{k'}$ داریم

$$\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}[\psi] = \frac{\psi + \phi_{k'}}{\langle \phi_k, \psi + \phi_{k'} \rangle} - \phi_k. \quad (5.3)$$

برای اثبات اینکه این یک اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می سازد به طریق زیر عمل می کنیم

مخرج کسر طرف راست برای هر $[\psi]$ متعلق به $\mathcal{V}_k$ غیر صفر است، بنابراین $\varphi_k \circ \varphi_{k'}^{-1}$ تابع هموار روی حوزه تعریف خود می باشد.

فرض می کنیم $\frac{\psi}{\langle \phi_k, \psi \rangle} - \phi_k = \frac{\psi'}{\langle \phi_k, \psi' \rangle} - \phi_k$ ؛ آنگاه

$$\psi' = \frac{\langle \phi_k, \psi' \rangle}{\langle \phi_k, \psi \rangle} \psi = c\psi$$

و بنا براین $[\psi] = [\psi']$. یعنی φ_k یک به یک است. چون برای $\chi \in \mathcal{W}_k$ داریم $\langle \phi_k, \chi \rangle = 0$ و $\langle \phi_k + \chi, \phi_k \rangle = 1 \neq 0$ بنا براین $\phi_k + \chi \in \mathcal{V}_k$. حال می توان نشان داد هر عنصر $\mathcal{W}_k$ به صورت تصویر یک عنصر از $\mathcal{V}_k$ می تواند نوشته شود $\varphi_k(\phi_k + \chi) = \frac{\phi_k + \chi}{\langle \phi_k, \phi_k + \chi \rangle} - \phi_k = \chi$ می باشد. از اینرو $(\mathcal{V}_k, \mathcal{W}_k; \varphi_k)$ یک اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می سازد.

۲.۳ میدان های برداری هامیلتونی روی فضای فاز کوانتومی

ابتدا یک میدان برداری هامیلتونی را روی یک خمینه سیمپلیکتیک (M, ω) تعریف می کنیم. میدان A را هامیلتونی

فرض می کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. فضای پرتوها در فضای هیلبرت را با $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ نشان می دهیم و به آن فضای هیلبرت برافکنشی می گوئیم. $\pi: \mathcal{H} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک برافکنش کانونیک است. هر نقطه در فضای برافکنشی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را با $[\psi]$ نشان می دهیم که متناظر با زیر فضای یک بعدی $\mathbb{C}\psi$ در $\mathcal{H}$ است. فضای $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک خمینه کیلری با دو فرمی فوبینی-استادی است که به صورت زیر تعریف می شود [۱۱]

$$\Omega_{[\psi]}^h(T_\psi \pi(\phi_1), T_\psi \pi(\phi_2)) = -2h(\langle \phi_1, \phi_2 \rangle) \quad (1.3)$$

که در اینجا $\phi \in (\mathbb{C}\psi)^\perp$ و $[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک نقطه در فضای برافکنشی و $T_\psi \pi(\phi)$ فضای مماسی در نقطه $[\psi]$ بر $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است که با $\mathcal{H} \setminus \mathbb{C}\psi$ یکرخت می باشد

$$T_\psi \pi: \mathcal{H} \rightarrow T_{[\psi]} \mathbb{P}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{H} / \mathbb{C}\psi$$

و به صورت زیر تعریف می شود

$$(T_\psi \pi)(\phi) = \frac{d}{dt} \pi(\psi + t\phi) |_{t=0}.$$

۱.۳ اطلس روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$

فرض می کنیم $\{\varphi_n\}$ یک دستگاه راست هنجار دلخواه در $\mathcal{H}$ باشد. ضرایب فوریه بردار ψ در این پایه عبارتند از $\lambda_k = \langle \phi_k, \psi \rangle$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_k &:= \{[\psi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \mid \lambda_k = \langle \phi_k, \psi \rangle \neq 0\} \\ \varphi_k &: \mathcal{V}_k \rightarrow l^2(\mathbb{C}) \\ \varphi_k([\psi]) &:= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}, \frac{\lambda_2}{\lambda_k}, \dots, \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}, \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}, \dots \right)\end{aligned}\quad (2.3)$$

که در اینجا $l^2(\mathbb{C})$ فضای هیلبرت دنباله های مربعاً انتگرال پذیر از اعداد مختلط است. مختصات $[\psi]$ در رابطه با مختصات $(\mathcal{V}_k, \varphi_k)$ را با Z_n^k نشان می دهیم. به طوری که

$$Z_n^k = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{\lambda_k} & : n < k \\ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k} & : n \geq k \end{cases} \quad (3.3)$$

surjective^۱

به صورت زیر در خواهد آمد

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n \lambda_n \phi_n = H_A \sum_n \lambda_n \phi_n \quad (10.3)$$

و یا

$$i\hbar \dot{\lambda}_n = \sum_m h_{nm}^A \lambda_m \quad (11.3)$$

که در اینجا $\dot{\lambda}_n = \partial \lambda_n / \partial t$. از اینجا به بعد ما $k \in \mathbb{N}$ را ثابت در نظر می گیریم و علامتگذاری زیر را معرفی می کنیم

$$\hat{n} = \begin{cases} n & : n < k \\ n+1 & : n \geq k \end{cases} \quad (12.3)$$

و بنابراین می توانیم مختصات جدید روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را تعریف کنیم

$$Z_n^k = \frac{\lambda_{\hat{n}}}{\lambda_k}. \quad (13.3)$$

در مختصات جدید معادله شرودینگر (۹.۳) به صورت زیر در می آید

$$i\hbar \dot{Z}_k^n = \sum_m h_{\hat{n}\hat{m}}^A Z_m^k + h_{\hat{n}k}^A - \sum_m h_{k\hat{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k. \quad (14.3)$$

در اینجا از رابطه

$$\sum_m h_{nm}^A \lambda_m = \sum_m h_{\hat{n}\hat{m}}^A \lambda_{\hat{m}} + h_{\hat{n}k}^A \lambda_k \quad (15.3)$$

استفاده کرده ایم. می خواهیم رابطه (۱۴.۳) را با معادله که از A بدست می آید مقایسه کنیم. همان طور که در ابتدای این بخش گفته شد مقدار چشم داشتی H_A تابع هامیلتونی میدان برداری A است

$$\langle H_A \rangle = \frac{\langle \psi, H_A \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\sum_{n,m} \bar{\lambda}_n h_{n\hat{m}}^A \lambda_m}{\sum_n \bar{\lambda}_n \lambda_n} \quad (16.3)$$

در مختصات Z_m^k مقدار چشم داشتی H_A به صورت زیر در خواهد آمد

$$\begin{aligned} \langle H_A \rangle &= \left[\sum_{m,n} \bar{Z}_n^k h_{\hat{n}\hat{m}}^A Z_m^k + \sum_n h_{\hat{n}k}^A Z_n^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_m \bar{Z}_m^k h_{\hat{m}k}^A h_{kk}^A \right] \left(1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k \right)^{-1} \end{aligned} \quad (17.3)$$

می نامیم اگر بتوان همواره روی M تابع هموار f را پیدا کرد که برای آن داشته باشیم

$$i_A \omega = df \quad (6.3)$$

که در اینجا i_A ضرب درونی دوفرمی ω نسبت به A است. مشاهده پذیرهای H مکانیک کوانتومی عملگرهای خودالحاق روی فضای هیلبرت اند. مقادیر چشم داشتی یک عملگر $\langle H \rangle$ در حالت های مختلف $\psi \in \mathcal{H}$ می توانند توابعی روی خمینه سیمپلکتیک $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ در نظر گرفته شوند. A یک میدان برداری هامیلتونی است اگر یک عملگر خودالحاق H_A طوری وجود داشته باشد که با دوفرمی فوبینی-استادی رابطه زیر برقرار باشد

$$i_A \Omega_{FS} = d\langle H_A \rangle. \quad (7.3)$$

که در اینجا $\langle H_A \rangle$ مقدار چشم داشتی H_A می باشد

$$\langle H_A \rangle = \frac{\langle \psi, H_A \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}. \quad (8.3)$$

H_A را عملگر هامیلتونی مربوط به A می گویند.

مسئله ای که در اینجا مطرح می شود آن است که وقتی عملگر هامیلتونی بیکران باشد مقدار چشم داشتی آن فقط روی یک زیر مجموعه چگال در $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و نه روی کل $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ ، یک تابع هموار تعریف می کند. در اینجا به مورد عملگرهای بیکران نمی پردازیم. حال می خواهیم نشان دهیم [۱۳، ۳]

قضیه ۱.۳. فرض می کنیم A یک میدان برداری هامیلتونی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و H_A عملگر هامیلتونی مربوط به آن باشد. معادله شرودینگر روی فضای هیلبرت با هامیلتونی H_A هم ارز با معادله ای است که توسط A روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ داده می شود.

اثبات. فرض می کنیم $\{\phi_n\}$ یک پایه راست هنجار در $\mathcal{H}$ و $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$ باشد. ضرایب فوریه در این پایه عبارتند از $\lambda_n = \langle \phi_n, \psi \rangle$ و عناصر ماتریسی H_A از رابطه $\langle \phi_m, H_A \phi_n \rangle = h_{mn}^A$ معین می شوند. معادله شرودینگر

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_A \psi \quad (9.3)$$

که در اینجا رابطه زیر بکار رفته است

$$\sum_n \bar{\lambda}_n \lambda_n = \sum_n \bar{\lambda}_{\hat{n}} \lambda_{\hat{n}} + \bar{\lambda}_k \lambda_k = (\bar{\lambda}_k \lambda_k) \left(1 + \sum_i \bar{Z}_i^k Z_i^k \right)$$

می توان معادله زیر را از روابط بالا بدست آورد

$$\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k} = \sum G_{np}^k \left(\sum_m h_{\hat{n}\hat{m}}^A Z_m^k + h_{\hat{n}k}^A - \sum h_{k\hat{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \right) \quad (18.3)$$

که در اینجا G_{np}^k همان دوفرمی فوبینی - استادی $\Omega_{np}^k / (\hbar)$ روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است که در مختصات موضعی به صورت زیر نوشته می شود

$$\Omega_{np}^k = \hbar \left[\left(1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k \right)^{-1} \delta_{np} - \left(1 + \sum_i Z_i^k \bar{Z}_i^k \right)^{-2} Z_n^k \bar{Z}_p^k \right] \quad (19.3)$$

در مختصات موضعی می توان میدان برداری A در رابطه (۶.۳) را به صورت زیر نوشت

$$A = -i \sum_{n,p} \Omega_{np}^k \left(\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k} \frac{\partial}{\partial Z_n^k} - \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_n^k} \right) \quad (20.3)$$

که در اینجا Ω_{np}^k و Ω_{np}^k وارون در مختصات موضعی است. چون $\langle H_A \rangle$ حقیقی است

$$\overline{\frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial \bar{Z}_p^k}} = \frac{\partial \langle H_A \rangle}{\partial Z_p^k} \quad (21.3)$$

بنابراین در این مختصات A به صورت زیر خواهد شد

$$A = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \left(\sum_m h_{\hat{n}\hat{m}}^A Z_m^k + h_{\hat{n}k}^A - \sum h_{k\hat{m}}^A Z_m^k Z_n^k - h_{kk}^A Z_n^k \right) \frac{\partial}{\partial Z_n^k} + c.c. \quad (22.3)$$

با استفاده از (۱۴.۳) داریم $A(Z_n^k) = -\frac{i}{\hbar} (i\hbar) \dot{Z}_n^k = \dot{Z}_n^k$ که از اینجا نتیجه می شود

$$\{\mathcal{H}, -\frac{i}{\hbar} H_A\} \equiv \{ \mathbb{P}(\mathcal{H}), A = X_{\langle H_A \rangle} \} \quad (23.3)$$

به عبارت دیگر

$$A[\psi] = \frac{1}{i\hbar} \frac{H_A \psi}{\|\psi\|} \quad (24.3)$$

در اینجا $A[\psi]$ یک بردار مماسی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ در نقطه $[\psi]$ است. ■

بخش مزدوج مختلط A معادله شرودینگر را برای ψ^* نتیجه می دهد.

به عنوان یک نتیجه خاص می توان گفت تحول زمانی یک دستگاه کوانتوم مکانیکی به صورت معادلات هامیلتونی مکانیک کلاسیک می تواند نوشته شود، که تابع هامیلتونی مقدار منتظره عملگر هامیلتونی است.

به این ترتیب می توان انتظار داشت که روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک ساختار پوآسون وجود داشته باشد. در گزاره زیر خواهیم دید که این ساختار پوآسونی بر حسب دوفرمی فوبینی - استادی تعریف می شود. روی یک خمینه سیمپلکتیک با دوفرمی Ω رابطه زیر برقرار است

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) \quad (25.3)$$

که در اینجا X_f و X_g به ترتیب میدانهای برداری هامیلتونی f و g هستند. ثابت می کنیم

گزاره ۲.۳. اگر $A, B : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow T\mathbb{P}(\mathcal{H})$ دو میدان برداری هامیلتونی خطی که به توابع $\langle H_A \rangle$ و $\langle H_B \rangle$ روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ باشند، آنگاه

$$\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\} = \langle \frac{1}{i\hbar} [H_A, H_B] \rangle \quad (26.3)$$

اثبات. چون $A = X_{\langle H_A \rangle}$ ، بنابراین

$$\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\} = \Omega(A, B)$$

و از طرف دیگر با توجه به تعریف دوفرمی فوبینی - استادی داریم

$$\Omega_{[\psi]}(A, B) = -2\hbar \text{Im} \langle A[\psi], B[\psi] \rangle \quad (27.3)$$

با استفاده از (۲۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} \{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\} \cdot &= \Omega(A, B) \\ &= \frac{-2\hbar}{\|\psi\|^2} \text{Im} \langle \frac{1}{i\hbar} H_A \psi, \frac{1}{i\hbar} H_B \psi \rangle \end{aligned}$$

می‌توان معادلات هامیلتونی را به شکل زیر نوشت

$$\frac{dx^a}{dt} = \sum_b \Omega^{ab} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x^b}, \quad (۳۵.۳)$$

که Ω^{ab} وارون دو فرمی فوبینی-استادی است. براکت پوآسون در رابطه با توابع روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\{f, g\} = \sum_{ab} \Omega^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \frac{\partial g}{\partial x^b}, \quad (۳۶.۳)$$

و از اینجا تحول زمانی یک تابع دلخواه f به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{df}{dt} = \{f, \langle H \rangle\}. \quad (۳۷.۳)$$

در فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی به صورت فوق تمایز بین تصویر شرودینگر و هایزنبرگ برداشته می‌شود، زیرا در هر دو تصویر مقدار چشم‌داشتی یک مشاهده پذیر در شکل یکسان (۳۷.۳) داده می‌شود.

نکته. ساختار پوآسونی که در اینجا مطرح گردید، یک ساختار کوانتوم مکانیکی است زیرا جبر پوآسون روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و نه روی فضای فاز کلاسیک M تعریف شده‌است.

مشابهاً می‌توانیم ساختار دیگری در رابطه با متریک فوبینی-استادی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را مطالعه کنیم. همانطور که گفته شد این متریک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{[\psi]}(A, B) = \frac{2\hbar}{\|\psi\|^2} \operatorname{Re} \left(\left\langle \frac{H_A}{i\hbar} \psi, \frac{H_B}{i\hbar} \psi \right\rangle \|\psi\|^2 \right) \quad (۳۸.۳)$$

که در اینجا A و B روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و H_A و H_B روی $\mathcal{H}$ عمل می‌کنند و $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$ چون H_A و H_B خودالحاق‌اند بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle \frac{H_A}{i\hbar} \psi, \frac{H_B}{i\hbar} \psi \right\rangle &= \frac{1}{2\hbar^2} (\langle H_A \psi, H_B \psi \rangle \\ &+ \langle H_B \psi, H_A \psi \rangle) \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} (\langle (H_A H_B + H_B H_A) \psi, \psi \rangle) \\ &= \frac{1}{2\hbar^2} \langle [H_A, H_B] + \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{i\hbar \|\psi\|^2} \langle H_A \psi, H_B \psi \rangle \\ &- \langle H_B \psi, H_A \psi \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar \|\psi\|^2} \langle [H_A, H_B] \psi, \psi \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{i\hbar} [H_A, H_B] \right\rangle. \end{aligned}$$

برای آنکه دینامیک روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را از نزدیک مورد مطالعه قرار دهیم، فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}$ ویژه حالت‌های عملگر هامیلتونی H باشند و بردار ψ را با نرم واحد انتخاب می‌کنیم یعنی $\langle \psi, \psi \rangle = 1$ آنگاه

$$H \phi_k = E_k \phi_k \quad \langle H \rangle = \langle H \psi, \psi \rangle = \sum_k |\lambda_k|^2 E_k. \quad (۲۸.۳)$$

اعداد مختلط λ_k را می‌توان به صورت حاصل جمع دو بخش حقیقی و موهومی نوشت

$$\lambda_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}}. \quad (۲۹.۳)$$

در اینجا q_k, p_k مختصات روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می‌باشند. بنابراین

$$\langle H \rangle = \sum \frac{1}{2\hbar} E_k (q_k^2 + p_k^2). \quad (۳۰.۳)$$

که شبیه به معادله هامیلتونی نوسانگر ساده‌است! شرط بهنجارش در این مختصات به صورت زیر است

$$\sum (q_k^2 + p_k^2) = 2\hbar. \quad (۳۱.۳)$$

وقتی معادله (۲۸.۳) در مختصات q_k, p_k بیان شود خواهیم داشت

$$i\hbar \left(\frac{\dot{q}_k + i\dot{p}_k}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \sum E_k \left(\frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2\hbar}} \right) \quad (۳۲.۳)$$

بنابراین

$$\dot{q}_k = \frac{E_k p_k}{\hbar}, \quad \dot{p}_k = -\frac{E_k q_k}{\hbar}. \quad (۳۳.۳)$$

با استفاده از (۲۸.۳) بدست می‌آوریم

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q_k}. \quad (۳۴.۳)$$

که همان معادلات هامیلتون در مکانیک کلاسیک است. در رابطه با دو فرمی سیمپلکتیک روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و مختصات

یک احتمال گذار طبیعی دانست. به این ترتیب می‌توان گفت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نتیجه‌ای از ساختار هندسی فضای هیلبرت و $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ است.

با توجه به مباحث فوق به طور خلاصه می‌توان فرمولبندی هندسی مکانیک کوانتومی را به صورت زیر بیان نمود:

یک میدان برداری حقیقی A روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک میدان برداری هامیلتونی است که از طریق دو فرمی Ω با مقادیر چشم‌داشتی یک عملگر خودالحاق H_A در فضای $\mathcal{H}$ متناظر است. معادله شرودینگری که H_A در $\mathcal{H}$ تعریف می‌کند متناظر با معادله حرکت تعریف شده توسط A روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می‌باشد. مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای هامیلتونی توابعی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می‌باشند.

حال می‌خواهیم در مورد شار بردارهای هامیلتونی بحث کنیم. فرض می‌کنیم $X_{\langle H_A \rangle}$ یک میدان برداری هامیلتونی روی خمینه سیمپلکتیک $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \Omega)$ با تابع هامیلتونی $\langle H \rangle : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. شار $X_{\langle H_A \rangle}$ مجموعه نگاشتهای $\varphi_t : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ است که با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(z) = X_{\langle H \rangle}(\varphi_t(z)) \quad (45.3)$$

که در اینجا $z \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ و $t \in \mathbb{R}$ است. بنا براین قضیه زیر برقرار است

قضیه ۴.۳. یک میدان برداری حقیقی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ یک میدان برداری هامیلتونی است اگر و فقط اگر شار آن یک گروه یک پارامتری دیفرانسیل پذیر از ایزومتري‌های کیلری روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ باشد. [۳]

این قضیه به معنی آن است که وقتی A یک میدان برداری هامیلتونی است آنگاه عملگر $U_A(t) = \exp(-iH_A t)$ شار A را تعریف می‌کند، که در اینجا H_A عملگر هامیلتونی مربوط به $A = X_{\langle H_A \rangle}$ است. برای میدان برداری هامیلتونی A داریم $\mathcal{L}_A g = 0$ ، که در اینجا g متریک فوبینی-استادی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{L}_A$ مشتق لی در امتداد A است. از اینرو

تعریف ۵.۳. فرض می‌کنیم $f \in C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \mathbb{R})$ یک تابع هموار حقیقی روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و X میدان برداری باتعریف $ix_f \Omega_{FS} = df$ باشد. تابع f کیلری نامیده می‌شود اگر $\mathcal{L}_A g = 0$ باشد. وقتی $f \in C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \mathbb{C})$ باشد، آنگاه f کیلری است اگر $Re f$ و $Im f$ کیلری باشند.

به این ترتیب می‌توان متریک رابه صورت زیر نوشت

$$g_{[\psi]}(A, B) = \frac{1}{\hbar} \frac{\langle [H_A, H_B]_+ \psi, \psi \rangle}{\|\psi\|^2} \quad (39.3)$$

در نتیجه

$$\frac{\hbar}{4} g_{[\psi]}(A\eta, B\eta) = \frac{1}{4} \langle [H_A, H_B]_+ \rangle (\psi). \quad (40.3)$$

علاوه براین برای پراکندگی یک عملگر داریم

$$(\Delta H_A)^2 = \langle H_A^2 \rangle - \langle H_A \rangle^2. \quad (41.3)$$

بنا براین نتیجه می‌شود

$$(\Delta H_A)^2 = \frac{\hbar}{4} g(A, A) + \langle H_A \rangle^2. \quad (42.3)$$

تعریف ۳.۳. فرض می‌کنیم $\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle$ متعلق به $C^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \mathbb{R})$ باشند. براکت ریمان $\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R$ یک تابع حقیقی هموار روی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R = \frac{\hbar}{4} g(X_{\langle H_A \rangle}, X_{\langle H_B \rangle}) = \frac{\hbar}{4} g(A, B). \quad (43.3)$$

متریک ریمانی هیچ مشابهی در مکانیک کلاسیک ندارد، زیرا فضای فاز کلاسیک در حالت کلی دارای یک ساختار ریمانی طبیعی نیست. می‌توان رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ را بر حسب متریک ریمانی به صورت زیر بیان نمود [۱۳]

$$\begin{aligned} (\Delta H_A)^2 (\Delta H_B)^2 &\geq \left\langle \frac{-i}{4} [H_A, H_B] \right\rangle^2 \\ &+ \left\langle \frac{1}{4} [H_A, H_B]_+ \right\rangle^2 = \left(\frac{\hbar}{4} \{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R \right)^2 \\ &+ \left(\{\langle H_A \rangle, \langle H_B \rangle\}_R - \langle H_A \rangle \langle H_B \rangle \right)^2. \end{aligned} \quad (44.3)$$

از اینرو

وجود یک ساختار ریمانی کانونیک با مشخصه احتمالی مکانیک کوانتومی متناظر است. از طریق این متریک می‌توان احتمال گذار بین دو حالت را بیان نمود. به این لحاظ می‌توان $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ را فضای فاز کوانتومی دارای

به عنوان یک نتیجه از قضیه فوق می توان نشان داد

گزاره ۶.۳. فرض کنید f یک تابع دارای مقدار مختلط روی $\mathbb{P}(H)$ باشد؛ آنگاه f کیلری است اگر و فقط اگر یک عملگر کراندار B وجود داشته باشد که $f = \langle B \rangle$.

نتیجه

می توان عملگرهای خودالحاق یعنی مشاهده پذیرهای کوانتومی را از طریق یک رده منتخب از توابع هموار روی فاز کوانتومی $\mathbb{P}(H)$ ، یعنی توابع کیلری، نمایش داد. چون ساختار هندسی $\mathbb{P}(H)$ (متریک و دوفرمی سیمپلکتیک) تحت کنش شارهای هامیلتونی پایسته می ماند، می توان گفت که مشاهده پذیرها، مولدهای تقارنهای ساختاری فضای فاز کوانتومی اند.

۳.۳ خمینه حالت‌های همدوس

یک دستگاه کوانتومی دارای تقارن سه مؤلفه دارد: یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر H ، یک گروه لی G و یک نمایش کاهش ناپذیر از G روی H . حالت‌های همدوس تعمیم یافته [ر.ک. [۱۵] و مراجع معرفی شده در آن] عبارتند از عناصر یک G -مدار که از کنش نمایش اعضای گروه روی یک حالت مرجع $\Phi_0 \in H$ بدست می آیند. حالت‌های همدوسی که به این ترتیب بدست می آیند به انتخاب حالت مرجع بستگی دارند. در مورد گروه‌های نیم‌ساده بردار با بالاترین وزن انتخاب می شود. زیر گروه G که عناصر آن حالت مرجع را، با صرف نظر از یک ضریب فاز ناوردا می گذارند، زیر گروه پایداری ماکزیمال $\mathcal{K}$ نامیده می شود و به صورت زیر نوشته می شود

$$h \cdot \Phi_0 = \Phi_0 e^{i\varphi(h)}, \quad h \in \mathcal{K}. \quad (46.3)$$

به این ترتیب G -مدار Φ_0 یک زیر فضای $\tilde{H}$ چگال در H می سازند به طوری که $\mathbb{P}(\tilde{H}) \subset \mathbb{P}(H)$. از رابطه فوق پیداست خمینه حالت‌های همدوس $\mathbb{P}(\tilde{H}) \equiv \mathcal{M}$ ایزومورف با فضای خارج قسمت $G/\mathcal{K}$ است و حالت‌های همدوس از طریق نقاط $G/\mathcal{K}$ پارامتریزه می شود، یعنی برای $g \in G$ داریم

$$[U_g \Phi_0] = [\Phi_g] \in \mathcal{M} \quad (47.3)$$

در اینجا $[U_g \Phi_0]$ برافکنش نمایش U_g روی فضای $\mathbb{P}(H)$ است. نشان داده شده است [۱۰] که در مورد گروه‌های نیم‌ساده (فشرده یا غیر فشرده) این مدارها زیرخمینه کیلری، یعنی خمینه سیمپلکتیک با ساختار مختلط، هستند. لذا $\mathcal{M}$ در $\mathbb{P}(H)$ نشانده می شود $\mathbb{P}(H) \hookrightarrow \mathcal{M} : \iota$ و از این طریق دو فرمی Ω_{FS} روی آن القا می شود

$$\Omega = \iota^* \Omega_{FS} = \Omega_{FS}|_{\mathcal{M}}$$

گاهی اوقات $\mathcal{M}$ فضای فاز کوانتومی نامیده می شود.

همه آنچه در مورد ساختار هندسی $\mathbb{P}(H)$ گفته شد در مورد $\mathcal{M}$ برقرار است، زیرا همانطور که گفته شد $\tilde{H}$ در H چگال و لذا $\mathbb{P}(\tilde{H})$ در $\mathbb{P}(H)$ چگال می باشد.

۴.۳ نشان دادن فضای فاز کلاسیک در فضای حالت‌های همدوس

حال می خواهیم رابطه بین فضای فاز کلاسیک M و فضای حالت‌های همدوس $\mathcal{M}$ را مورد مطالعه قرار دهیم. این موضوع کوانتش حالت‌های همدوس است [۱] همان طور که در بخش قبل دیدیم، مدارهای حالت‌های همدوس زیر فضای کیلری چگال در $\mathbb{P}(H)$ هستند که ساختار کیلری روی آنها القا می شود. با توجه به اینکه می توان مدار حالت‌های همدوس $\mathcal{M}$ را از طریق نقاط فضای فاز کلاسیک پارامتریزه نمود [۱۵] می توان از نشان دادن فضای فاز کلاسیک در فضای فاز کوانتومی سخن گفت. اگر از یک دستگاه کلاسیک شروع کنیم آنگاه این نشاندهی به کوانتش دستگاه کلاسیک منجر می شود. با استفاده از قضیه نشاندهی کوادیرا [۷] می توان اثبات کرد که یک نگاشت نشاندهی هولومورف برای یک خمینه کیلری M به صورت $\iota_h : M \rightarrow \mathcal{M}$ وجود دارد [۱۲]. دو ویژگی مهم این نشاندهی عبارت است از اینکه این نگاشتها یک به یک و همه جا دارای دیفرانسیل غیر صفرند. از بیانات فوق نتیجه می شود که یک نقطه در فضای فاز کلاسیک (M, ω) به یک حالت همدوس در فضای فاز کوانتومی مرتبط می شود و رابطه ساختارهای سیمپلکتیک آن دو به صورت $\omega = \lim_{h \rightarrow 0} \iota_h^* \Omega_{FS}$ به هم مربوط می شود، یعنی ι_h یک سیمپلکتومورفیسم تقریبی است. اگر حالت‌های همدوس از نمایش یک گروه لی G تولید شده باشند (M, Ω_{FS}) نیز یک خمینه سیمپلکتیک همگن است

مانند درجات آزادی داخلی، اصل طرد پاؤلی و تقارن‌های دینامیکی حفظ می‌شوند.

حد کلاسیک. با توجه به رابطه نشانندگی فضای فاز کلاسیک در فضای فاز حالت‌های همدوس و تشابه جبر مشاهده پذیرهای آنها، می‌توان حد کلاسیک برای یک دستگاه کوانتومی را با استفاده از رابطه (۴.۲) به صورت زیر نوشت

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_{\iota \cdot \Omega_{FS}}(Z) = \{\varphi(\tilde{A}), \varphi(\tilde{B})\}(z), \\ z \in M, Z \in \mathcal{M} \quad (51.4)$$

که در اینجا φ نگاشتی است که در معادله (۴.۲) تعریف شده است.

مراجع

- [1] S T Ali, J P Antoine, J P Gazeau
Coherent States, Wavelets and Their Generalization Springer-Verlag (2000).
- [2] F A Berezin,
Math.USSR-Izv. 8(1974)no 5, 1109-1165.
- [3] R Cirelli, P Lanyavecchia,
Nuovo Cimento B 79(1984) 271-283.
- [4] M De Wilde, P B A Lecompte,
Lett. Math.Phys. 7(1983), 487-496.
- [5] M Englis,
Trans.Amer.Math.Soc. 348, no 2 (1996) 411-479.
- [6] M Englis,
Trans.Amer.Math.Soc. 349, no 9(1997) 3717-3735.
- [7] Ph Griffith, P Harris,
Principles of algebraic geometry, John Wiley, New York (1978).

که گروه حرکت آن گروه لی G می باشد.

۴ جمع‌بندی نهایی و نتیجه گیری

تا اینجا ابزار ریاضی کافی برای فرمولبندی هندسی کوانتش برزین فراهم گردید. حال می‌توان با استفاده از ویژگیهای فضای برافکنشی $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{M}$ کوانتش برزین برای فضای فاز کلاسیک کیلری را به صورت زیر فرمولبندی کرد:

حالت‌ها. از طریق نگاشت نشانندگی $\iota_{\hbar}$ به هر نقطه M یک حالت همدوس، که به صورت یک نقطه در $\mathcal{M}$ نمایش داده می‌شود، منسوب می‌گردد. که این یک نگاشت یک به یک و دیفرانسیل پذیر است.

سمبلهای هموردا. سمبلهای هموردا عبارتند از توابع کیلری روی $\mathcal{M}$ که در واقع مقدار چشم داشتنی میدانهای برداری هامیلتونی هستند که ساختار هندسی فضای فاز کوانتومی را حفظ می‌کنند [تعریف (۵.۳)].

جبر $*_{\hbar}$. می‌توان به سادگی نشان داد که جبر $*_{\hbar}$ بین سمبلهای هموردا همان جبر پوآسون بین توابع کیلری روی $\mathcal{M}$ است. با استفاده از گزاره (۲.۳) داریم

$$\frac{1}{i\hbar}[\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}] = \{\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}\}_{\iota \cdot \Omega_{FS}} \quad (48.4)$$

از طرف دیگر از رابطه (۱۷.۲) بدست می‌آید

$$\frac{1}{i\hbar}[\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}] = \frac{1}{i\hbar}(\widetilde{Q_1} *_{\hbar} \widetilde{Q_2} - \widetilde{Q_2} *_{\hbar} \widetilde{Q_1}) \\ = \{\widetilde{Q_1}, \widetilde{Q_2}\}_{\iota \cdot \Omega_{FS}} \quad (49.4)$$

لذا ثابت می‌شود

جبر $*_{\hbar}$ و جبر پوآسون روی $\mathcal{M}$ با هم مطابقت دارند.

دینامیک. می‌توان معادله حرکت $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[Q, H]$ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\tilde{Q}(Z)}{dt} = \{\tilde{Q}(Z), \tilde{H}(Z)\}_{\iota \cdot \Omega_{FS}}, Z \in \mathcal{M} \quad (50.4)$$

که همان شکل معادله حرکت کلاسیک است. لازم است مجدداً یادآوری شود که این ساختار پوآسون روی فضای فاز کوانتومی تعریف شده است و ویژگیهای کوانتومی سیستم

- [12] A Odziejewicz,
Commun. Math. Phys., **150**(1992)385-413.
- [13] R Roknizadeh,
Geometrisierung der Quantenmechanik durch Berezin-Quantisierung, Phd. Thesis, Papierflieger(1999).
- [14] R Roknizadeh, H D Doebner,
Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Okrain (2002) Vol. 43, Part 2, 683-687.
- [15] رسول رکنی زاده، ماشین ریاضی تولید
حالت‌های هم‌دوس، آماده برای نشر.
- [8] S G Krantz,
Function Theory of Several Complex Variables, Wadsworth & Brooks, pasific Grove, California (1992).
- [9] N P Landsman,
Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics, Springer (1998).
- [10] W Lisiecki,
Ann. Ins. Henri Poincare **53**(1990)245-258.
- [11] J E Marsden, T S Ratiu,
Introduction to Mechanics and Symmetry, Springer (1994).