

شرایط اتصال در معادله سینوسی گوردون پله‌ای و برخورد سالیئونها

نعمت‌اله ریاضی

بخش فیزیک و رصدخانه ابوریحان بیرونی

دانشگاه شیراز، شیراز ۷۱۴۵۴

(دریافت مقاله: ۸۴/۳/۲۳ ؛ پذیرش: ۸۴/۴/۱۶)

چکیده

با بررسی معادله سینوسی گوردون پله‌ای (که در آن پارامتر سیستم برای مقادیر مثبت و منفی میدان نرده‌ای مقادیر متفاوتی دارد) و با اعمال شرایط اتصال مناسب، روابطی را بین سرعت سالیئونها قبل و بعد از برخورد به دست خواهیم آورد و امکان تبدیل جفت سالیئونهای سنگین با سرعت کم به جفت سالیئونهای سبک با سرعت بالا (که آن را تفنگ سالیئونی می‌نامیم) را مطرح خواهیم نمود. برخی از نتایجی که قبلاً توسط نگارنده به صورت عددی به دست آمده بود، در این مقاله به صورت تحلیلی استخراج شده است.

واژه‌های کلیدی: فیزیک غیر خطی، نظریه سالیئون، معادله سینوسی گوردون

۱. مقدمه

معادله سینوسی گوردون در زمینه‌های کاملاً متفاوتی، به طور طبیعی ظاهر می‌شود [۱]. این زمینه‌ها شامل فیزیک اتمی، ابررسانایی، نظریه میدان و غیره می‌شود. به عنوان مثال، نشان داده شده است که سیستم انتگرال‌پذیر زیر بنایی نظریه سایبرگ - ویتن، مدل سینوسی گوردون است [۲ و ۳].

یکی از راههای به دست آوردن معادله سینوسی گوردون، استفاده از هندسه دیفرانسیل و نظریه رویه‌ها می‌باشد. یک رویه دو بعدی غوطه‌ور در فضای سه بعدی اقلیدسی، توسط متریک (یا اولین فرم اساسی)

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \quad (1)$$

توصیف می‌شود که در آن $u^i, i=1,2$ مختصات ذاتی رویه می‌باشند. برای مشخص کردن موقعیت این رویه در فضای غوطه‌وری، دومین فرم اساسی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$II = b_{ij} du^i du^j, \quad (2)$$

که در آن

$$b_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$A = y_1 z_2 - y_2 z_1$$

$$B = z_1 x_2 - z_2 x_1 \quad (3)$$

$$C = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$x(u^1, u^2)$ مختصات یک نقطه از رویه در فضای غوطه‌وری اقلیدسی است و اندیسه‌های این مختصات در معادله‌های فوق، نشانگر مشتق‌گیری نسبت به مختصه‌های ذاتی رویه می‌باشند. در هندسه دیفرانسیل، نشان داده می‌شود که انحنا ی گوسی رویه از رابطه

$$K = \frac{\det(b)}{\det(g)} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (4)$$

به دست می‌آید [۴].

به راحتی می‌توان نشان داد که یک رویه شبه کروی (pseudo-spherical)، منجر به معادله سینوسی گوردون می‌شود.

رویه شبه کروی، رویه‌ای است که دارای انحنای گاوسی ثابت

$K = -1$ می‌باشد. برای چنین رویه‌ای

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}; \quad \det(g) = 1 - \cos^2 \varphi, \quad (5)$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}; \quad \det(b) = -\sin^2 \varphi, \quad (6)$$

فرمهای اساسی رویه مستقل از یکدیگر نیستند و بایستی از شرایط گاوس - کودازی تبعیت کنند:

شرط گاوس:

$$\det(b) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - \quad (7)$$

$$(\Gamma_{11}^s \Gamma_{22}^r - \Gamma_{12}^s \Gamma_{12}^r) g_{rs},$$

شرایط کودازی:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x^2} + \Gamma_{11}^s b_{s2} = \frac{\partial b_{12}}{\partial x^1} + \Gamma_{12}^s b_{s1}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial b_{21}}{\partial x^2} + \Gamma_{21}^s b_{s2} = \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} + \Gamma_{22}^s b_{s1}, \quad (9)$$

که در آنها Γ_{jk}^i نمادهای کریستوفل هستند. با مقداری محاسبه، می‌توان نشان داد که شرط گاوس به معادله سینوسی گوردون در مختصات مخروط نوری

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^2} = \sin \varphi, \quad (10)$$

منجر می‌گردد و معادلات کودازی به طور بدیهی ارضا می‌گردند. شکل فضایی رویه‌هایی که با فرمهای اساسی اول و دوم فوق و جوابهای تک سالیتمونی و دو سالیتمونی معادله سینوسی گوردون ایجاد می‌شوند، در مرجع [۵] ترسیم شده است.

معادله سینوسی گوردون را با انتخاب مناسب دستگاه مختصات و با در نظر گرفتن دیمانسیون میدان نرده‌ای φ ، معمولاً به صورت زیر می‌نویسند:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \sin \varphi, \quad (11)$$

که در آن a یک پارامتر ثابت است. معادله سینوسی گوردون،

یک معادله نسبیتی است که از چگالی لاگرانژی زیر به دست

می‌آید:

$$L = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - a^2 (1 - \cos \varphi). \quad (12)$$

با استفاده از قضیه نئودر، تانسور انرژی - تکانه به صورت

زیر به دست می‌آید [۶]

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} L, \quad (13)$$

که در آن $\eta^{\mu\nu}$ متریک مینکوسکی برای فضا - زمان ۱+۱ بعدی است. چگالی انرژی و تکانه خطی، به ترتیب از مولفه‌های T^0_0 و T^0_i به دست می‌آیند.

معادله سینوسی گوردون، یک معادله انتگرال‌پذیر است. یک سیستم انتگرال‌پذیر، به تعداد درجات آزادی دارای ثابتهای حرکت می‌باشد [۷]. با توجه به اینکه معادله سینوسی گوردون دارای بینهایت درجه آزادی است (همانند یک محیط پیوسته)، انتگرال‌پذیر بودن آن به معنی داشتن بینهایت ثابت حرکت است. معادلات انتگرال‌پذیر دارای جوابهای ویژه‌ای هستند که به جوابهای سالیتمونی موسوم می‌باشند. سالیتمونها، بسته موجهای جایگزیده‌ای هستند که ضمن حرکت در محیط غیر خطی دچار پاشندگی نمی‌شوند و حتی پس از برخورد با دیگر سالیتمونها یا ناهمگنیهای موجود در محیط، بدون تغییر شکل به حرکت خود ادامه می‌دهند. برای جوابهای تک سالیتمونی، می‌توان نشان داد که رابطه نسبیتی زیر برقرار است:

$$E^2 = M^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (14)$$

که در آن $E = \int T^0_0 dx$ انرژی کل، $p = \int T^0_i dx$ تکانه کل، $Mc^2 = \int T^0_i |_{v=0} dx$ و Mc^2 انرژی سکون سالیتمون است. جواب تک سالیتمونی (کینک) معادله سینوسی گوردون به شکل $\varphi(x,t) = 4 \arctan e^{\gamma a(x-vt)}$ است که به شیوه‌های مختلف (از جمله تبدیلات بکلوند و انتگرال‌گیری مستقیم و اعمال بوست) به دست می‌آید. واضح است که پهنای موثر کینک ساکن، در حدود $\frac{1}{a}$ است.

در بسیاری از مراجع، چنین عنوان شده که سالیتمونها پس از برخورد با یکدیگر، سرعت اولیه خود را باز می‌یابند و تنها

اصطلاحاً کینک نامیده می‌شوند. پاسخ کینک - پادکینک آزاد معادله سینوسی گوردون به صورت زیر است [۱۲]:

$$\varphi = -\varphi \arctan \left\{ \frac{m_i}{\sqrt{m_i^2 - 1}} \frac{\sinh(\sqrt{m_i^2 - 1} a_i c t)}{\cosh(m_i a_i x)} \right\}. \quad (18)$$

این جواب، برای دو بازه زمانی $t > 0$ و $t < 0$ برقرار می‌باشد، به شرط آنکه پارامتر مناسب هر بازه با توجه به پتانسیل و شرایط اتصال اختیار شود:

$$\begin{cases} t < 0, & a = a_+, & m = m_+, \\ t > 0, & a = a_-, & m = m_-. \end{cases} \quad (19)$$

با اندکی محاسبه، می‌توان نشان داد که شرط (۱۷) به نتیجه زیر منجر می‌گردد:

$$m_+ a_+ = m_- a_-. \quad (20)$$

می‌توان نشان داد که پارامتر m_i طی رابطه زیر با سرعت سالیته‌ها در نواحی دور از برهمکنش (v_i) مرتبط است:

$$m_i = \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}}. \quad (21)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که جرم (انرژی) سکون هر سالیته‌ها آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M_i c^2 = \hbar a_i. \quad (22)$$

با توجه به این روابط، در می‌یابیم که رابطه (۲۰) نشان دهنده اصل بقای انرژی کل طی فرآیند اضمحلال کینک - پاد کینک آزاد و خلق یک زوج با جرم متفاوت می‌باشد. این فرآیند در شکل ۱ نشان داده شده است.

۲.۲. کینک- پادکینک مقید (بریدر)

پاسخ کینک - پادکینک مقید از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi = -\varphi \arctan \left\{ \frac{m_i}{\sqrt{1 - m_i^2}} \frac{\sin(\sqrt{1 - m_i^2} a_i c t)}{\cosh(m_i a_i x)} \right\}. \quad (23)$$

با توجه به علامت φ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -t_1 < t < 0, & a = a_+, & m = m_+, \\ 0 < t < t_2, & a = a_-, & m = m_-, \end{cases} \quad (24)$$

که در آن،

دچار یک تغییر فاز یا جابه‌جایی زمانی می‌شوند [۸ و ۹]. در این مقاله، ما ضمن بررسی معادله سینوسی گوردون پله‌ای که در آن مقدار پارامتر a برای φ های مثبت و منفی متفاوت است، نشان خواهیم داد که سرعت حرکت سالیته‌ها در چنین سیستمی می‌تواند بر اثر برخورد با سالیته‌ها دیگر دچار تغییر شود. همچنین، امکان نابودی سالیته‌ها - پاد سالیته‌ها سنگین و خلق زوج سبکتر (یا بالعکس) نیز وجود دارد.

کاربردهای متعددی برای معادله سینوسی گوردون یافت شده است ([۱] و مراجع آن). تعمیم‌هایی از این معادله در مراجع [۱۰ و ۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است.

۲. معادله سینوسی گوردون پله‌ای و شرایط اتصال

در ادامه این مقاله، ما قید زیر را به معادله سینوسی گوردون اضافه می‌کنیم و برخی از نتایج این قید را بررسی می‌کنیم:

$$a = \begin{cases} a_+ & \text{for } \varphi < 0 \\ a_- & \text{for } \varphi > 0 \end{cases} \quad (15)$$

بدیهی است که هر یک از نواحی $\varphi > 0$ و $\varphi < 0$ ، به تفکیک رفتاری کاملاً شبیه به معادله سینوسی گوردون متعارف خواهند داشت و تنها ناحیه انتقالی بین این دو حالت به توجه خاص نیاز خواهد داشت، که با اعمال شرایط اتصال زیر، این امر تحقق خواهد یافت: با فرض اینکه دو ناحیه $\varphi > 0$ و $\varphi < 0$ در نقطه $x = 0$ با یکدیگر اتصال پیدا می‌کنند، می‌توان نشان داد

$$\forall t; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{+,0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{-,0}. \quad (16)$$

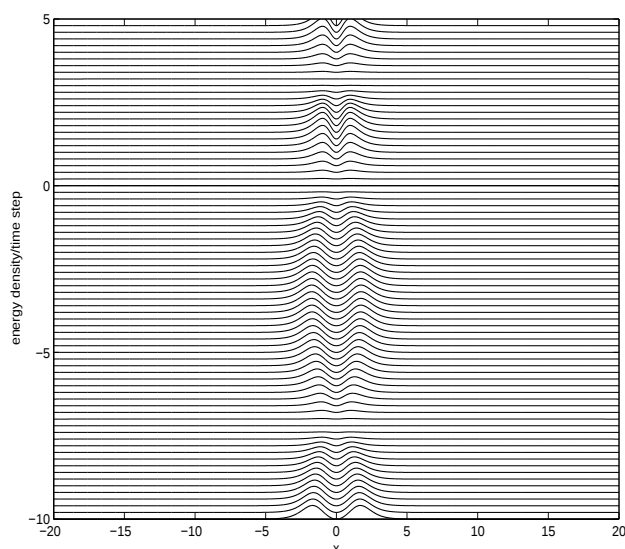
چنانچه در $t < 0$ وضعیت $\varphi < 0$ و در $t > 0$ وضعیت $\varphi > 0$ (و یا بالعکس) برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$\forall x; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{+,0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{-,0}. \quad (17)$$

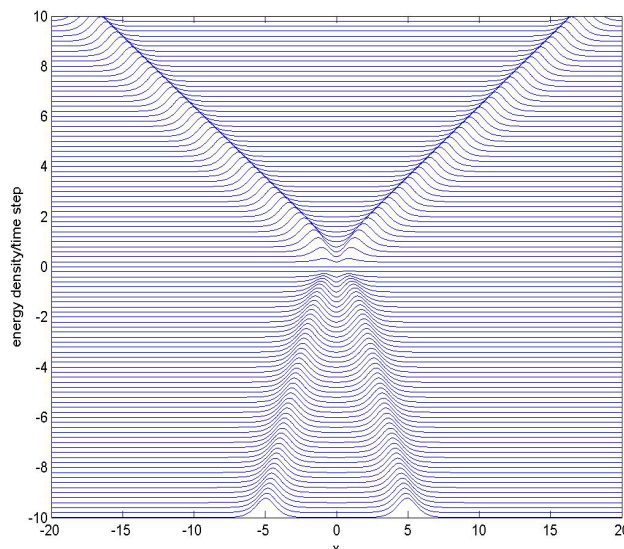
این دو شرط اتصال، به ما کمک می‌کند که دینامیک جوابهای دو سالیته‌ها را در معادله سینوسی گوردون پله‌ای بررسی نماییم.

۲.۱. برخورد کینک- پادکینک آزاد

سالیته‌های معادله سینوسی گوردون به علت شکل خاص آنها،



شکل ۲. جواب بریدر در سیستم سینوسی گوردون پله‌ای.



شکل ۱. نابودی یک زوج سنگین آزاد و خلق یک زوج سبک آزاد.

زوج e^+e^- آزاد می‌باشد (البته این شباهت صرفاً ظاهری است).

در صورت تنظیم مناسب شرایط اولیه، این امکان وجود دارد که یک زوج کینک - پادکینک سبک ضمن برخورد با یکدیگر، ابتدا یک بریدر سنگین را به وجود آورند و این زوج سپس به زوج آزاد اولیه وا بپاشد، که این پدیده چیزی شبیه تشکیل رزونانسها در فیزیک ذرات بنیادی است.

۳.۲. برخورد کینک - کینک

این حالت در صورت $m_i > 1$ ایجاد می‌گردد. با استفاده از جواب کینک - کینک

$$\varphi = \varphi \arctan \left\{ \frac{\sqrt{m_i^2 - 1}}{m_i} \frac{\sinh(m_i a_i x)}{\cosh(\sqrt{m_i^2 - 1} a_i c t)} \right\}, \quad (28)$$

و اعمال شرط اتصال (۱۶)، پس از اندکی محاسبه، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\sqrt{m_1^2 - 1} a_1 = \sqrt{m_2^2 - 1} a_2, \quad (29)$$

یا

$$\gamma_1 M_1 v_1 = \pm \gamma_2 M_2 v_2. \quad (30)$$

پس از برخورد، جهت سرعت هریک از کینکها عوض می‌شود (شکل ۴). وجود چنین حالتی، ادعای برخی از مراجع در

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1 - m_1^2} a_1 c}, \\ t_2 = \frac{\pi}{\sqrt{1 - m_2^2} a_2 c}. \end{cases} \quad (25)$$

اعمال شرایط اتصال (۱۷)، مجدداً به روابط زیر می‌انجامد:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad (26)$$

و بنابراین

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\frac{1 - m_1^2}{1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 m_1^2}} \quad (27)$$

بدیهی است که اگر $m_2 > 1$ ، در $t > 0$ بریدر نخواهیم داشت.

در این صورت، بریدر به یک زوج آزاد (با جرم سکون پایین) فرو خواهد پاشید. این دو وضعیت در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. بنابراین، حالت $a_2 < a_1$ را می‌توان به دو حالت

تقسیم کرد: (۱) حالت $m_1 < \frac{a_2}{a_1}$ که در آن، یک بریدر به یک

بریدر دیگر (با جرم سکون متفاوت) تبدیل می‌شود، و (۲) حالت

$m_1 > \frac{a_2}{a_1}$ که در آن، یک بریدر به یک زوج آزاد (با جرم سکون

پایین) وا می‌پاشد. ما از پدیده اخیر که جالبترین نتیجه این مقاله

می‌باشد، به تفنگ سالیتمونی تعبیر می‌کنیم (شکل ۳). این پدیده،

چیزی شبیه به اضمحلال یک زوج $\mu^+ \mu^-$ مقید و خلق یک

گوردون

گوردون (پله‌ای یا متعارف)، بر روی فضای فشرده S^1 همواره صفر می‌باشد.

$$Q = \frac{1}{2\pi} [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)] = \frac{1}{2\pi} \partial_1 (\varphi(+\infty), \varphi(-\infty)) \quad (33)$$

ملاحظه می‌کنیم که بار توپولوژیک را مستقیماً می‌توان با اثر دادن عملگر مرز روی زنجیره سالیتمی به دست آورد. در مثالهای بخش قبل، بار توپولوژیک به شرح زیر خواهد بود: کینک $(+1)$ ، پادکینک (-1) ، کینک $(+2)$ ، بریدر و زوج کینک $(-)$ پادکینک آزاد (0) . بار توپولوژیک کوانتیده است و مقدار آن به پارامتر a_i بستگی ندارد.

به همین طریق، جوابهای چند سالیتمی را می‌توان به صورت یک کمپلکس در فضای میدان نرده‌ای در نظر گرفت. چنانچه معادله سینوسی گوردون را به جای R بر روی S^1 تعریف کنیم، تک مقدار بودن میدان نرده‌ای φ ایجاب می‌کند که جواب تک سالیتمی نداشته باشیم و جوابهای چند سالیتمی به صورت یک (1-cycle) در فضای φ باشند. یک $-r$ سیکل (c) یک کمپلکس $-r$ بعدی جهت دار است که فاقد مرز می‌باشد $(\partial_r c = 0)$. در این صورت، بدیهی است که بار کل پاسخهای چند سالیتمی در یک فضای فشرده صفر می‌باشد $(Q = \frac{1}{2\pi} \partial_1 c = 0)$. به عبارت دیگر بار کل توپولوژیک برای سیستم سینوسی

۳. نتیجه‌گیری و مطالعات آینده

در این مقاله به بررسی معادله سینوسی گوردون پله‌ای پرداختیم که در آن، پارامتر سیستم برای مقادیر مثبت و منفی میدان نرده‌ای متفاوت است. جوابهای مورد نظر برای مقادیر مثبت و منفی میدان نرده‌ای مشابه سیستم سینوسی گوردون متعارف است، ولی جایی که این دو ناحیه با یکدیگر تماس می‌یابند، شرایط اتصال برقرار است. با استخراج و اعمال این شرایط اتصال، موفق شدیم بین سرعت سالیتمها قبل و بعد از برخورد روابطی را استخراج کنیم که با اصول بقای انرژی و تکانه سازگارند. حالات مختلف را به تفکیک بررسی نمودیم و نشان دادیم در چنین سیستمی، امکان تبدیل زوج سالیتمهای سبک به زوجهای سنگین و بر عکس وجود دارد. مفهوم تنگ سالیتمی که طی آن یک زوج مقید سنگین به یک زوج آزاد سبک با سرعت بسیار بالا تبدیل می‌شود، برای نخستین بار ارائه گردید. در مطالعات بعدی، در نظر است که پاسخهای پیچیده‌تر (از جمله پاسخهای سه سالیتمی) و همچنین زنجیره‌های سالیتمی [۱۴] مورد بررسی قرار گیرد.

مراجع

1. N Riazi and A R Gharaati, *Int. J. Theor. Phys.*, **37**,3(1998)1081.
2. A Gorskii, I Krichever, A Marshakov, A Mironov and A Morozov, *Phys. Lett. B*, **355** (1995) 466.
3. E Martinec and N Warner, *Nucl. Phys. B*, **459** (1996) 97.
4. A Guetz, *Differential Geometry*, Trans. By A Alemzadeh and Ostadbashi, Alavi Publications, Tehran (1366).
5. C L Terng, and K Uhlenbeck, *Notices of Am. M. Soc.*, Jan. issue (2000) 17.
6. M Guidry, *Gauge Field Theories*, Wiley Interscience, NY (1991).
7. A Das, *Integrable Models*, World Scientific, Singapore (1989).
8. R Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Elsevier, Amsterdam (1982).
9. P G Drazin and R S Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).
10. N Riazi, A Azizi and S M Zabarjad, *Phys. Rev. D*, **66** (2002) 065003.
11. N Riazi and K Mansouri, *Int. J. Theor. Phys.* (2005) to appear.
12. G L Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory*, John Wiley and Sons, New York (1980).
13. M Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, IOP Publishing Ltd., Bristol (1990).
14. I Bakas and C Sourdis, hep-th/0205007 (2002).