مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۵، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۸۴

# شرایط اتصال در معادله سینوسی گوردون پله‌ای و برخورد سالیتونها

**نعمت‌اله ریاضی**
بخش فیزیک و رصدخانه ابوریحان بیرونی
دانشگاه شیراز، شیراز ۷۱۴۵۴

(دریافت مقاله: ۸۴/۳/۲۳ ؛ پذیرش: ۸۴/۴/۱۶)

## چکیده
با بررسی معادله سینوسی گوردون پله‌ای (که در آن پارامتر سیستم برای مقادیر مثبت و منفی میدان نرده‌ای مقادیر متفاوتی دارد) و با اعمال شرایط اتصال مناسب، روابطی را بین سرعت سالیتونها قبل و بعد از برخورد به دست خواهیم آورد و امکان تبدیل جفت سالیتونهای سنگین با سرعت کم به جفت سالیتونهای سبک با سرعت بالا (که آن را تفنگ سالیتونی می‌نامیم) را مطرح خواهیم نمود. برخی از نتایجی که قبلاً توسط نگارنده به صورت عددی به دست آمده بود، در این مقاله به صورت تحلیلی استخراج شده است.

**واژه‌های کلیدی**: فیزیک غیر خطی، نظریه سالیتون، معادله سینوسی گوردون

## ۱. مقدمه

معادله سینوسی گوردون در زمینه‌های کاملاً متفاوتی، به طور طبیعی ظاهر می‌شود [۱]. این زمینه‌ها شامل فیزیک اتمی، ابررسانایی، نظریه میدان و غیره می‌شود. به عنوان مثال، نشان داده شده است که سیستم انتگرال‌پذیر زیر بنایی نظریه سایبرگ – ویتن، مدل سینوسی گوردون است [۲و۳].

یکی از راههای به دست آوردن معادله سینوسی گوردون، استفاده از هندسه دیفرانسیل و نظریه رویه‌ها می‌باشد. یک رویه دو بعدی غوطه‌ور در فضای سه بعدی اقلیدسی، توسط متریک (یا اولین فرم اساسی)

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j , \qquad (1)$$

توصیف می‌شود که در آن $u^i, i=1,2$ مختصات ذاتی رویه می‌باشند. برای مشخص کردن موقعیت این رویه در فضای غوطه‌وری، دومین فرم اساسی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$II = b_{ij}du^i du^j , \qquad (2)$$

که در آن

$$b_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{ij} & y_{ij} & z_{ij} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$A = y_1 z_2 - y_2 z_1$$
$$B = z_1 x_2 - z_2 x_1 \qquad (3)$$
$$C = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$x(u^1,u^2)$ مختصات یک نقطه از رویه در فضای غوطه‌وری اقلیدسی است و اندیسهای این مختصات در معادله‌های فوق، نشانگر مشتق‌گیری نسبت به مختصه‌های ذاتی رویه می‌باشند. در هندسه دیفرانسیل، نشان داده می‌شود که انحنای گاوسی رویه از رابطه

$$K = \frac{\det(b)}{\det(g)} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} , \qquad (4)$$

به دست می‌آید [۴].

به راحتی می‌توان نشان داد که یک رویه شبه کروی (pseudo-spherical)، منجر به معادله سینوسی گوردون می‌شود. رویه شبه کروی، رویه‌ای است که دارای انحنای گاوسی ثابت $K=-۱$ می‌باشد. برای چنین رویه‌ای

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} ۱ & \cos\varphi \\ \cos\varphi & ۱ \end{pmatrix};\quad \det(g)=۱-\cos^{۲}\varphi\,, \tag{۵}$$

$$b_{ij}=\begin{pmatrix} ۰ & \sin\varphi \\ \sin\varphi & ۰ \end{pmatrix};\quad \det(b)=-\sin^{۲}\varphi\,, \tag{۶}$$

فرمهای اساسی رویه مستقل از یکدیگر نیستند و بایستی از شرایط گاوس- کودازی تبعیت کنند:

شرط گاوس:

$$\det(b)=\frac{\partial^{۲}g_{۱۲}}{\partial u^{۱}\partial u^{۲}}-\frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲}g_{۱۱}}{\partial u^{۲}\partial u^{۲}}-\frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲}g_{۲۲}}{\partial u^{۱}\partial u^{۱}}-(\Gamma^{s}_{۱۱}\Gamma^{r}_{۲۲}-\Gamma^{s}_{۱۲}\Gamma^{r}_{۱۲})g_{rs}\;, \tag{۷}$$

شرایط کودازی:

$$\frac{\partial b_{۱۱}}{\partial x^{۲}}+\Gamma^{s}_{۱۱}b_{s۲}=\frac{\partial b_{۱۲}}{\partial x^{۱}}+\Gamma^{s}_{۱۲}b_{s۱}\,, \tag{۸}$$

$$\frac{\partial b_{۲۱}}{\partial x^{۲}}+\Gamma^{s}_{۲۱}b_{s۲}=\frac{\partial b_{۲۲}}{\partial x^{۱}}+\Gamma^{s}_{۲۲}b_{s۱}\,, \tag{۹}$$

که در آنها $\Gamma^{i}_{jk}$ نمادهای کریستوفل هستند. با مقداری محاسبه، می‌توان نشان داد که شرط گاوس به معادله سینوسی گوردون در مختصات مخروط نوری

$$\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial u^{۱}\partial u^{۲}}=\sin\varphi\,, \tag{۱۰}$$

منجر می‌گردد و معادلات کودازی به طور بدیهی ارضا می‌گردند. شکل فضایی رویه‌هایی که با فرمهای اساسی اول و دوم فوق و جوابهای تک سالیتونی و دو سالیتونی معادله سینوسی گوردون ایجاد می‌شوند، در مرجع [۵] ترسیم شده است.

معادله سینوسی گوردون را با انتخاب مناسب دستگاه مختصات و با در نظر گرفتن دیمانسیون میدان نرده‌ای φ، معمولاً به صورت زیر می‌نویسند:

$$\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial x^{۲}}-\frac{۱}{c^{۲}}\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial t^{۲}}=a^{۲}\sin\varphi\,, \tag{۱۱}$$

که در آن a یک پارامتر ثابت است. معادله سینوسی گوردون، یک معادله نسبیتی است که از چگالی لاگرانژی زیر به دست می‌آید:

$$L=\frac{۱}{۲}\partial^{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi-a^{۲}(۱-\cos\varphi)\,. \tag{۱۲}$$

با استفاده از قضیه نئودر، تانسور انرژی - تکانه به صورت زیر به دست می‌آید [۶]

$$T^{\mu\nu}=\partial^{\mu}\varphi\partial^{\nu}\varphi-\eta^{\mu\nu}L\,, \tag{۱۳}$$

که در آن $\eta^{\mu\nu}$ متریک مینکوسکی برای فضا - زمان ۱+۱ بعدی است. چگالی انرژی و تکانه خطی، به ترتیب از مولفه‌های $T^{۰}_{۰}$ و $T^{۱}_{۰}$ به دست می‌آیند.

معادله سینوسی گوردون، یک معادله انتگرال‌پذیر است. یک سیستم انتگرال‌پذیر، به تعداد درجات آزادی دارای ثابتهای حرکت می‌باشد [۷]. با توجه به اینکه معادله سینوسی گوردون دارای بینهایت درجه آزادی است (همانند یک محیط پیوسته)، انتگرال‌پذیر بودن آن به معنی داشتن بینهایت ثابت حرکت است. معادلات انتگرال‌پذیر دارای جوابهای ویژه‌ای هستند که به جوابهای سالیتونی موسوم می‌باشند. سالیتونها، بسته موجهای جایگزیده‌ای هستند که ضمن حرکت در محیط غیر خطی دچار پاشندگی نمی‌شوند و حتی پس از برخورد با دیگر سالیتونها یا ناهمگنیهای موجود در محیط، بدون تغییر شکل به حرکت خود ادامه می‌دهند. برای جوابهای تک سالیتونی، می‌توان نشان داد که رابطه نسبیتی زیر برقرار است:

$$E^{۲}=M^{۲}c^{۴}+p^{۲}c^{۲} \tag{۱۴}$$

که در آن $E=\int T^{۰}_{۰}\,dx$ انرژی کل، $p=\int T^{۱}_{۰}\,dx$ تکانه کل، و $Mc^{۲}=\int T^{۰}_{۰}\big|_{v=۰}dx$ انرژی سکون سالیتون است. جواب تک سالیتونی (کینک) معادله سینوسی گوردون به شکل $\varphi(x,t)=۴\arctan e^{\gamma a(x-vt)}$ است که به شیوه‌های مختلف (از جمله تبدیلات بکلوند و انتگرال‌گیری مستقیم و اعمال بوست) به دست می‌آید. واضح است که پهنای موثر کینک ساکن، در حدود $\frac{۱}{a}$ است.

در بسیاری از مراجع، چنین عنوان شده که سالیتونها پس از برخورد با یکدیگر، سرعت اولیه خود را باز می‌یابند و تنها

دچار یک تغییر فاز یا جابه‌جایی زمانی می‌شوند [۸ و۹]. در این مقاله، ما ضمن بررسی معادله سینوسی گوردون پله‌ای که در آن مقدار پارامتر a برای φهای مثبت و منفی متفاوت است، نشان خواهیم داد که سرعت حرکت سالیتونها در چنین سیستمی می‌تواند بر اثر برخورد با سالیتون دیگر دچار تغییر شود. همچنین، امکان نابودی سالیتون - پاد سالیتون سنگین و خلق زوج سبکتر (یا بالعکس) نیز وجود دارد.

کاربردهای متعددی برای معادله سینوسی گوردون یافت شده است ([۱] و مراجع آن). تعمیمهایی از این معادله در مراجع [۱۰و۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲. معادله سینوسی گوردون پله‌ای و شرایط اتصال

در ادامه این مقاله، ما قید زیر را به معادله سینوسی گوردون اضافه می‌کنیم و برخی از نتایج این قید را بررسی می‌کنیم:

$$a=\begin{cases}a_1 & for\ \ \varphi<0\\ a_2 & for\ \ \varphi>0\end{cases} \qquad (15)$$

بدیهی است که هر یک از نواحی $\varphi>0$ و $\varphi<0$، به تفکیک رفتاری کاملاً شبیه به معادله سینوسی گوردون متعارف خواهند داشت و تنها ناحیه انتقالی بین این دو حالت به توجه خاص نیاز خواهد داشت، که با اعمال شرایط اتصال زیر، این امر تحقق خواهد یافت: با فرض اینکه دو ناحیه $\varphi>0$ و $\varphi<0$ در نقطه $x=0$ با یکدیگر اتصال پیدا می‌کنند، می‌توان نشان داد

$$\forall t;\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{0^+}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{0^-} \qquad (16)$$

چنانچه در $t<0$ وضعیت $\varphi<0$ و در $t>0$ وضعیت $\varphi>0$ (و یا بالعکس) برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$\forall x;\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{0^+}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{0^-} \qquad (17)$$

این دو شرط اتصال، به ما کمک می‌کند که دینامیک جوابهای دو سالیتونی را در معادله سینوسی گوردون پله‌ای بررسی نماییم.

### ۲. ۱. برخورد کینک- پادکینک آزاد

سالیتونهای معادله سینوسی گوردون به علت شکل خاص آنها، اصطلاحاً کینک نامیده می‌شوند. پاسخ کینک - پادکینک آزاد معادله سینوسی گوردون به صورت زیر است [۱۲]:

$$\varphi=-4\arctan\left\{\frac{m_i}{\sqrt{m_i^2-1}}\frac{\sinh\left(\sqrt{m_i^2-1}a_ict\right)}{\cosh(m_ia_ix)}\right\}. \qquad (18)$$

این جواب، برای دو بازه زمانی $t>0$ و $t<0$ برقرار می‌باشد، به شرط آنکه پارامتر مناسب هر بازه با توجه به پتانسیل و شرایط اتصال اختیار شود:

$$\begin{cases}t<0, & a=a_2, \quad m=m_2\ ,\\ t>0, & a=a_1, \quad m=m_1\ .\end{cases} \qquad (19)$$

با اندکی محاسبه، می‌توان نشان داد که شرط (۱۷) به نتیجه زیر منجر می‌گردد:

$$m_1a_1=m_2a_2\ . \qquad (20)$$

می‌توان نشان داد که پارامتر $m_i$ طی رابطه زیر با سرعت سالیتون در نواحی دور از برهمکنش ($v_i$) مرتبط است:

$$m_i=\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}\ . \qquad (21)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که جرم (انرژی) سکون هر سالیتون آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M_ic^2=8a_i\ . \qquad (22)$$

با توجه به این روابط، در می‌یابیم که رابطه (۲۰) نشان دهنده اصل بقای انرژی کل طی فرآیند اضمحلال کینک - پاد کینک آزاد و خلق یک زوج با جرم متفاوت می‌باشد. این فرآیند در شکل ۱ نشان داده شده است.

### ۲. ۲. کینک- پادکینک مقید (بریدر)

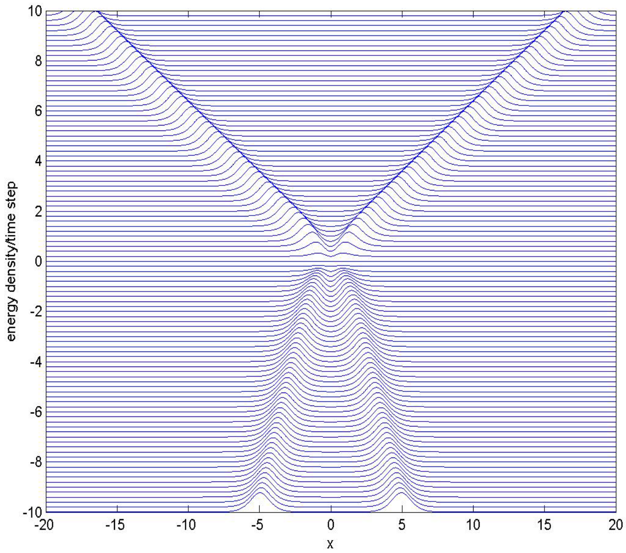
پاسخ کینک - پادکینک مقید از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi=-4\arctan\left\{\frac{m_i}{\sqrt{1-m_i^2}}\frac{\sin\left(\sqrt{1-m_i^2}\,a_ict\right)}{\cosh(m_ia_ix)}\right\}. \qquad (23)$$

با توجه به علامت $\varphi$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}-t_1<t<0, & a=a_1, \quad m=m_1\ ,\\ 0<t<t_2, & a=a_2, \quad m=m_2\ ,\end{cases} \qquad (24)$$

که در آن،




**شکل ۱.** نابودی یک زوج سنگین آزاد و خلق یک زوج سبک آزاد.

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-m_1^2}\, a_1 c} \quad , \\ t_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-m_2^2}\, a_2 c} \quad . \end{cases} \tag{۲۵}$$

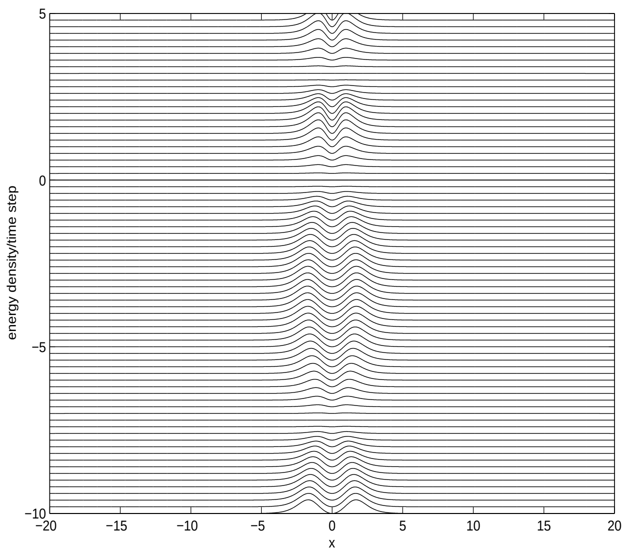
اعمال شرایط اتصال (۱۷)، مجدداً به روابط زیر می‌انجامد:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \tag{۲۶}$$

و بنابراین

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{1-m_1^2}{1-\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^2 m_1^2}} \tag{۲۷}$$

بدیهی است که اگر $m_2 < 1$، در $t > 0$ بریدر نخواهیم داشت. در این صورت، بریدر به یک زوج آزاد (با جرم سکون پایین) فرو خواهد پاشید. این دو وضعیت در شکلهای ۲ و ۳ نشان داده شده است. بنابراین، حالت $a_2 < a_1$ را می‌توان به دو حالت تقسیم کرد: ۱) حالت $m_1 < \frac{a_2}{a_1}$ که در آن، یک بریدر به یک بریدر دیگر (با جرم سکون متفاوت) تبدیل می‌شود، و ۲) حالت $m_1 > \frac{a_2}{a_1}$ که در آن، یک بریدر به یک زوج آزاد (با جرم سکون پایین) وا می‌پاشد. ما از پدیده اخیر که جالبترین نتیجه این مقاله می‌باشد، به تفنگ سالیتونی تعبیر می‌کنیم (شکل ۳). این پدیده، چیزی شبیه به اضمحلال یک زوج $\mu^+\mu^-$ مقید و خلق یک




**شکل ۲.** جواب بریدر در سیستم سینوسی گوردون پله‌ای.

زوج $e^+e^-$ آزاد می‌باشد (البته این شباهت صرفاً ظاهری است).

در صورت تنظیم مناسب شرایط اولیه، این امکان وجود دارد که یک زوج کینک - پادکینک سبک ضمن برخورد با یکدیگر، ابتدا یک بریدر سنگین را به وجود آورند و این زوج سپس به زوج آزاد اولیه وا بپاشد، که این پدیده چیزی شبیه تشکیل رزونانسها در فیزیک ذرات بنیادی است.

## ۲. ۳. برخورد کینک - کینک

این حالت در صورت $m_i > 1$ ایجاد می‌گردد. با استفاده از جواب کینک- کینک

$$\varphi = 4\arctan\left\{\frac{\sqrt{m_i^2-1}}{m_i}\frac{\sinh(m_i a_i x)}{\cosh(\sqrt{m_i^2-1}\,a_i ct)}\right\}, \tag{۲۸}$$

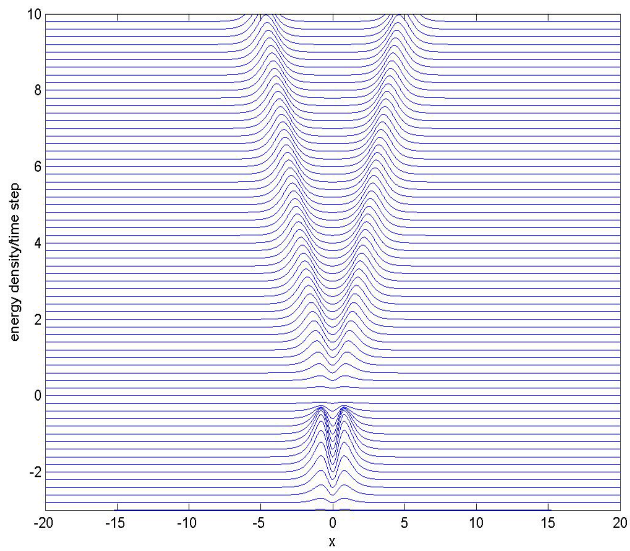
و اعمال شرط اتصال (۱۶)، پس از اندکی محاسبه، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\sqrt{m_1^2-1}\,a_1 = \sqrt{m_2^2-1}\,a_2\,, \tag{۲۹}$$

یا

$$\gamma_1 M_1 v_1 = \pm\gamma_2 M_2 v_2\,. \tag{۳۰}$$

پس از برخورد، جهت سرعت هریک از کینکها عوض می‌شود (شکل ۴). وجود چنین حالتی، ادعای برخی از مراجع در

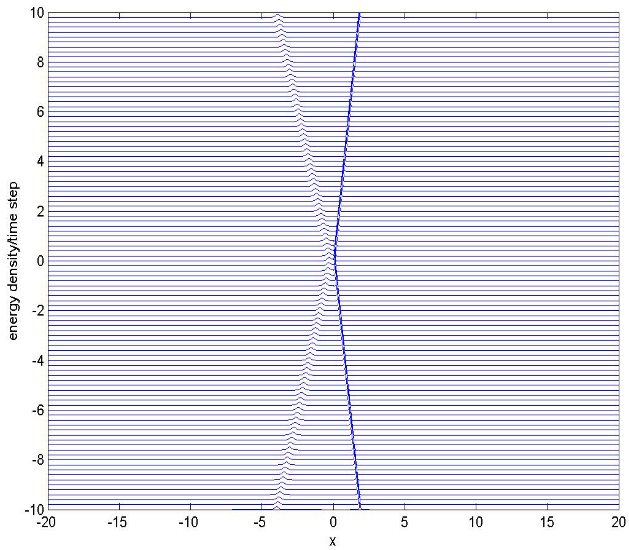



**شکل ۳.** نابودی یک زوج مقید سنگین (بریدر) و خلق یک زوج آزاد سبک و پر سرعت (تفنگ سالیتونی).

خصوص اینکه سالیتونها پس از برخورد سرعتهای اولیه خود را باز می‌یابند و تنها دچار یک انتقال زمانی می‌شوند را مورد تردید قرار می‌دهد. با توجه به نسبیتی بودن سیستم مورد بررسی، می‌توان ناظری را در نظر گرفت که در آن یکی از سالیتونها قبل از برخورد ساکن است و پس از برخورد، با سرعت خاصی به حرکت در می‌آید (چیزی شبیه برخورد یک توپ بیلیارد متحرک با یک توپ ساکن).

### ۲. ۴. ساختار سیمپلکسی و بار توپولوژیک

سیمپلکس، یک ساختار هندسی r- بعدی است که با نماد $< p_0 p_1 ... p_r >$ نشان داده می‌شود. به عنوان مثال، نقطه $< p_0 >$ یک سیمپلکس صفر بعدی و پاره خط $< p_0 p_1 >$ یک سیمپلکس یک بعدی است. مجموعه‌ای از چند سیمپلکس که به طریق مناسبی به هم وصل شده باشند، یک کمپلکس (K) را تشکیل می‌دهند. مقصود از "طریق مناسب"، برآورده شدن دو شرط زیر است: الف) کلیه زیر سیمپلکسهای هر سیمپلکس نیز در K موجود باشند، ب) اشتراک هر دو سیمپلکس دلخواه در K، یا تهی باشد یا زیر سیمپلکسی از هر دو سیمپلکس باشد. چنانچه سیمپلکس جهت دار باشد، زنجیره (chain) نامیده و با نماد $(p_0 ... p_r)$ نشان داده می‌شود. عملگر مرز




**شکل ۴.** برخورد دو سالیتون با جرمهای متفاوت در سیستم سینوسی گوردون پله‌ای. جرم سکون سالیتون سمت راست ۵ برابر جرم سالیتون سمت چپ است.

(operator boundary) که بر روی یک زنجیره اثر می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_r (p_0 ... p_r) = \sum_i (-1)^i (p_0 ... \hat{p}_i ... p_r). \qquad (۳۱)$$

که در عبارت سمت راست، نقطه $\hat{p}_i$ از مجموعه نقاط زنجیره حذف می‌شود. بدیهی است که مرز یک زنجیره r بعدی، مجموعه‌ای از زنجیره‌های r-1 بعدی است [۱۳].

هر سالیتون معادله سینوسی گوردون پله‌ای را می‌توان یک زنجیره یک بعدی در فضای φ در نظر گرفت. خلاءهای کلاسیک پتانسیل سیستم سینوسی گوردون پله‌ای، همانند سیستم سینوسی گوردون متعارف، متشکل از نقاط منفصل $\varphi_n = 2n\pi, \quad (n \in Z)$ است. مثلاً پاسخ کینک به صورت سیمپلکس جهت دار (زنجیره) $(\varphi_n \varphi_{n+1})$ و پاد کینک مربوطه به صورت زنجیره $(\varphi_{n+1}\varphi_n) = -(\varphi_n \varphi_{n+1})$ قابل نمایش است. چنانچه عملگر مرز را بر روی یک جواب تک سالیتونی (کینک) اثر دهیم خواهیم داشت:

$$\partial_1 (\varphi_n \varphi_{n+1}) = \varphi_{n+1} - \varphi_n = 2\pi. \qquad (۳۲)$$

با توجه به تعریف بار توپولوژیک در سیستم سینوسی

گوردون

$$Q = \frac{1}{2\pi}\left[\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)\right] = \frac{1}{2\pi}\partial_1\left(\varphi(+\infty), \varphi(-\infty)\right) \qquad (۳۳)$$

ملاحظه می‌کنیم که بار توپولوژیک را مستقیماً می‌توان با اثر دادن عملگر مرز روی زنجیره سالیتونی به دست آورد. در مثالهای بخش قبل، بار توپولوژیک به شرح زیر خواهد بود: کینک (۱+)، پادکینک (۱−)، کینک − کینک (۲+)، بریدر و زوج کینک − پادکینک آزاد (۰). بار توپولوژیک کوانتیده است و مقدار آن به پارامتر $a_i$ بستگی ندارد.

به همین طریق، جوابهای چند سالیتونی را می‌توان به صورت یک کمپلکس در فضای میدان نرده‌ای در نظر گرفت. چنانچه معادله سینوسی گوردون را به جای R بر روی $S^1$ تعریف کنیم، تک مقدار بودن میدان نرده‌ای φ ایجاب می‌کند که جواب تک سالیتونی نداشته باشیم و جوابهای چند سالیتونی به صورت یک − سیکل (1−cycle) در فضای φ باشند. یک r− سیکل (c) یک کمپلکس r− بعدی جهت دار است که فاقد مرز می‌باشد ($\partial_r c = 0$). در این صورت، بدیهی است که بار کل پاسخهای چند سالیتونی در یک فضای فشرده صفر می‌باشد ($Q = \frac{1}{2\pi}\partial_1 c = 0$). به عبارت دیگر بار کل توپولوژیک برای سیستم سینوسی گوردون (پله‌ای یا متعارف)، بر روی فضای فشرده $S^1$ همواره صفر می‌باشد.

## ۳. نتیجه‌گیری و مطالعات آینده

در این مقاله به بررسی معادله سینوسی گوردون پله‌ای پرداختیم که در آن، پارامتر سیستم برای مقادیر مثبت و منفی میدان نرده‌ای متفاوت است. جوابهای مورد نظر برای مقادیر مثبت و منفی میدان نرده‌ای مشابه سیستم سینوسی گوردون متعارف است، ولی جایی که این دو ناحیه با یکدیگر تماس می‌یابند، شرایط اتصال برقرار است. با استخراج و اعمال این شرایط اتصال، موفق شدیم بین سرعت سالیتونها قبل و بعد از برخورد روابطی را استخراج کنیم که با اصول بقای انرژی و تکانه سازگارند. حالات مختلف را به تفکیک بررسی نمودیم و نشان دادیم در چنین سیستمی، امکان تبدیل زوج سالیتونهای سبک به زوجهای سنگین و بر عکس وجود دارد. مفهوم تفنگ سالیتونی که طی آن یک زوج مقید سنگین به یک زوج آزاد سبک با سرعت بسیار بالا تبدیل می‌شود، برای نخستین بار ارائه گردید. در مطالعات بعدی، در نظر است که پاسخهای پیچیده‌تر (از جمله پاسخهای سه سالیتونی) و همچنین زنجیره‌های سالیتونی [۱۴] مورد بررسی قرار گیرد.

## مراجع


1. N Riazi and A R Gharaati, *Int. J. Theor. Phys.*, **37**,3(1998)1081.
2. A Gorskii, I Krichever, A Marshakov, A Mironov and A Morozov, *Phys. Lett. B*, **355** (1995) 466.
3. E Martinec and N Warner, *Nucl. Phys. B*, **459** (1996) 97.
4. A Guetz, *Differential Geometry*, Trans. By A Alemzadeh and Ostadbashi, Alavi Publications, Tehran (1366).
5. C L Terng, and K Uhlenbeck, *Notices of Am. M. Soc.*, Jan. issue (2000) 17.
6. M Guidry, *Gauge Field Theories,* Wiley Interscience, NY (1991).
7. A Das, *Integrable Models,* World Scientific, Singapore (1989).
8. R Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Elsevier, Amsterdam (1982).
9. P G Drazin and R S Johnson, *Solitons: an Introduction* , Cambridge University Press, Cambridge (1989).
10. N Riazi, A Azizi and S M Zebarjad, *Phys. Rev. D*, **66** (2002) 065003.
11. N Riazi and K Mansouri, *Int. J. Theor. Phys.* (2005) to appear.
12. G L Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory,* John Wiley and Sons, New York (1980).
13. M Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, IOP Publishing Ltd., Bristol (1990).
14. I Bakas and C Sourdis, hep-th/0205007 (2002).