یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۵، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۸۴

دسته‌ای از جوابهای دقیق گرانش با مشتقات بالاتر در چهار بعد

محمدحسین دهقانی و حنیف محمدپور

بخش فیزیک و رصدخانه ابوریحان بیرونی

دانشگاه شیراز، شیراز ۷۱۴۵۴

(دریافت مقاله: ۸۳/۱۲/۲۷ ؛ دریافت نسخه‌نهایی:۸۴/۷/۱۵)

چکیده

در این مقاله ما کنش گرانش تا توانهای دوم اسکالر ریچی و اسکالرهای ساخته شده از تانسور انحناء و تانسور ریچی را که در واقع کنش گرانش با مشتقات بالاتر تا مرتبه دو می‌باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از اتحاد باخ- لانچوز مربوط به تانسور وایل در چهار بعد نشان می‌دهیم که جوابهای معادلات اینشتین با ثابت کیهان شناسی در خلاء، که به متریکهای اینشتین مشهور می‌باشند، معادلات میدان گرانش مشتقات بالاتر را ارضاء می‌نمایند. همچنین خواهیم دید که جوابهای معادلات اینشتین در ابعاد بالاتر و یا در حضور ماده، معادلات گرانش مشتقات بالاتر را ارضاء نمی‌کنند.

واژه‌های کلیدی: گرانش مشتقات بالاتر، جوابهای دقیق در گرانش، متریکهای اینشتین

۱. مقدمه

به دنبال کشف این واقعیت که جهان کنونی ما، جهانی در حال انبساط با شتاب مثبت است [۱]، کیهان شناسان بر این شده‌اند تا به طریقی این انبساط شتابدار را از نظر فیزیکی توجیه کنند. بر اساس مشاهدات کیهانی و تحلیلهای انجام شده، دانشمندان بر این باورند که عمده‌ترین دلیل وجود چنین انبساطی در عالم، نوعی انرژی ناشناخته است که آن را انرژی تاریک نامیده و گاه نیز از آن به عنوان عنصر پنجم یاد می‌کنند [۲].

برای توضیح این مساله و رسیدن به نتایجی که چنین انبساطی را در پی داشته باشد رهیافتهای مختلفی ارائه شده است که به دو دسته کلی تحت عناوین زیر تقسیم می‌شوند:

۱- گرانش دیلاتونی که در آن یک میدان اسکالر متغیر به میدان تانسوری $g_{\mu\nu}$ جفت می‌گردد. البته باید توجه داشت حالت خاصی از این رهیافت با ثابت در نظر گرفتن این میدان اسکالر حاصل می‌شود که همان گرانش اینشتین با ثابت کیهان شناسی است. ۲- گرانش با مشتقات بالاتر [۳].

در این مقاله ما بحث خود را به رهیافت دوم محدود می‌کنیم. مسئله اصلی در اینجا پرداختن به نسبیت عام به گونه‌ای است که معادلات اینشتین را به عنوان حالت خاصی یا بهتر بگوییم تقریب اولی از معادلات پیچیده‌تری معرفی می‌کند و آنها را در مبحثی با نام گرانش با مشتقات مرتبه بالاتر بررسی می‌کنند. منظور از گرانش با مشتقات مرتبه بالاتر که بخشی ازپیش‌بینیهای نظریه ریسمان می‌باشد، وارد کردن عباراتی در کنش گرانش است که علاوه بر اسکالر ریچی شامل جملاتی از توانهای بالاتر این کمیت و نیز کمیتهایی نظیر تانسور ریمان، تانسور ریچی و مشتقات آنها خواهد بود [۴].

یکی از حالتهای خاص گرانش با مشتقات بالاتر، گرانش لاولاک می‌باشد که در آن همانند گرانش اینشتین حداکثر

مشتقات مرتبه دوم متریک به صورت خطی ظاهر می‌شوند [۵]. البته باید متذکر شد که معادلات و در نتیجه جوابهای گرانش لاولاک و گرانش اینشتین در ابعاد بالاتر از چهار یکسان نخواهند بود. اولین مرتبه گرانش لاولاک گرانش اینشتین بوده و مرتبه دوم آن که توانهای دوم تانسور انحناء ظاهر می‌شوند به گرانش گوس- بونه مشهور است. تعداد اندکی از جوابهای گرانش گوس- بونه به دست آمده‌اند. جوابهای با تقارن کروی در [۶] مورد بررسی قرار گرفته و دسته‌ای از جوابهای چرخان باردار در [۷] به دست آمده و خواص آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

در اینجا ما به دنبال جوابهای خاصی از گرانش مرتبه دو در چهار بعد هستیم. در چهار بعد معادلات دیفرانسیل گرانش گوس- بونه با معادلات دیفرانسیل گرانش اینشتین یکسان است، اما در حالت کلی گرانش با مشتقات بالاتر این معادلات در چهار بعد یکسان نخواهند بود. در واقع می‌خواهیم نشان دهیم که جوابهای معادلات اینشتین در خلاء، معادلات گرانش مرتبه دو را نیز ارضاء می‌کنند.

۲. معادلات میدان

کلی‌ترین شکل کنشی که می‌توان برای توصیف یک میدان گرانشی در $d+1$ بعد فضا - زمانی در نظر گرفت به صورت زیر است:

$$A=\frac{1}{16\pi G}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}\,f\left(R,R_{\mu\nu}R^{\mu\nu},R_{\mu\nu\lambda\kappa}R^{\mu\nu\lambda\kappa},\dots\right), \tag{۱}$$

که در آن g قرینه دترمینان متریک و $R^{\mu\nu\lambda\kappa}, R^{\mu\nu}, R$ به ترتیب اسکالر انحناء، تانسور ریچی و تانسور ریمان بوده و f تابع دلخواهی از کمیتهای اشاره شده و مشتقات آنهاست.

با فرض اینکه مشتقات کمیتهای یاد شده، در کنش گرانش ظاهر نشود، مرتبه اول این کنش همان کنش اینشتین- هیلبرت با ثابت کیهان شناسی بوده و کنش فوق تا مرتبه دوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A=\frac{1}{16\pi G}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda+aR^2+bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+ cR_{\mu\nu\lambda\kappa}R^{\mu\nu\lambda\kappa})+A_{matter}\ , \tag{۲}$$

که در آن A_{matter} کنش ماده می‌باشد.

وردش این کنش نسبت به تانسور متریک منجر به معادلات میدان زیر می‌شود [۸]:

$$\begin{aligned}
&R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+\Lambda g^{\mu\nu}\\
&-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(aR^2+bR_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}+cR_{\rho\sigma\lambda\tau}R^{\rho\sigma\lambda\tau}\right)\\
&-a\left(-2RR^{\mu\nu}+\nabla^\mu\nabla^\nu R+\nabla^\nu\nabla^\mu R-2g^{\mu\nu}(\nabla_\rho\nabla^\rho R)\right)\\
&-b\left(\frac{1}{2}\left(\nabla^\mu\nabla^\nu R+\nabla^\nu\nabla^\mu R\right)-2R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\rho\sigma}-\right.\\
&\qquad\left.\nabla_\rho\nabla^\rho R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\rho R\right)\\
&-c\left(-2R^{\mu\rho\sigma\tau}R^{\nu}_{\rho\sigma\tau}-4\nabla_\rho\nabla^\rho R^{\mu\nu}+\nabla^\mu\nabla^\nu R+\right.\\
&\qquad\left.\nabla^\nu\nabla^\mu R-4R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\rho\sigma}+4R^{\mu}_{\rho}R^{\nu\rho}\right)=8\pi GT^{\mu\nu}_{matter}\ .
\end{aligned} \tag{۳}$$

باید توجه کرد که با قرار دادن ضرایب c,b,a برابر صفر، رابطه (۳) همان معادله اینشتین با ثابت کیهان شناسی Λ خواهد بود:

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+\Lambda g^{\mu\nu}=8\pi GT^{\mu\nu}_{matter} \tag{۴}$$

همچنین اگر $a=c=-\frac{b}{4}$ در نظر گرفته شود معادله (۳) به معادله اینشتین- گوس- بونه تبدیل می‌شود.

۳. دسته‌ای ازجوابهای گرانش با مشتقات بالاتر

همان گونه که قبلاً اشاره کردیم در گرانش با مشتقات بالاتر می‌توانیم جوابهای کیهان شناسی داشته باشیم که توصیف کننده یک جهان در حال انبساط شتابدار باشد بدون اینکه نیازی به ثابت کیهان شناسی و یا یک میدان اسکالر Φ داشته باشیم. این گونه جوابها در گرانش گوس- بونه در مرجع [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین جوابهای مجانبا دوسیته و یا آنتی دوسیته گرانش گوس- بونه بدون ثابت کیهان شناسی در [۱۰] به دست آمده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

اکنون به بررسی این معادلات در فضای چهار بعدی در غیاب ماده پرداخته و نشان می‌دهیم که جوابهای معادلات اینشتین در چهار بعد، معادلات میدان (۳) را که مشتقات بالاتر

متریک نیز در آن ظاهر شده ارضاء می‌کنند. برای نشان دادن این موضوع ابتدا یادآوری می‌کنیم که تانسور وایل در $n \geq 3$ بعد به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{2}{n-2}\left(g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} - g_{\beta[\gamma}R_{\delta]\alpha}\right) + \frac{2R}{(n-1)(n-2)} g_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta} \,. \qquad (۵)$$

در چهار بعد برای تانسور وایل اتحاد زیر که به اتحاد باخ- لانچوز [۱۲] معروف است برقرار است:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2C^{\mu\alpha\beta\gamma} C^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \,. \qquad (۶)$$

حال با جایگذاری رابطه (۵) در اتحاد باخ- لانچوز و انجام مقداری عملیات جبری به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R^{\mu\alpha\beta\gamma} R^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} + \frac{5}{8} g^{\mu\nu} R^2 - \frac{5}{4} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{5}{2} R R^{\mu\nu} + 2R^{\mu\alpha\nu\gamma} R_{\alpha\gamma} + \frac{5}{2} R^{\mu\gamma} R^{\nu}_{\gamma} + \frac{1}{2} R^{\nu\gamma} R^{\mu}_{\gamma} = 0 \,. \qquad (۷)$$

با توجه به اینکه برای جوابهای معادلات اینشتین با ثابت کیهان شناسی در خلاء که به متریکهای اینشتین موسوم می‌باشند داریم

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}, \quad R = 4\Lambda \qquad (۸)$$

می‌توان نشان داد که معادله (۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R^{\mu\alpha\beta\gamma} R^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad (۹)$$

با استفاده از معادلات (۸) و (۹) می‌توان دریافت که معادله (۳) خود به خود برقرار است، به عبارت دیگرملاحظه می‌شود که تمام جملات معادله (۳) برای متریکهای اینشتین یکدیگر را حذف کرده و معادلات به ازای این متریکهای خاص برآورده می‌شوند.

البته باید در اینجا اضافه کنیم که این موضوع تنها در چهار بعد درست است و با تنجش معادله (۳) در ابعاد بالاتر از چهار می‌توان نشان داد که این معادله برای جوابهای معادله اینشتین در خلاء درست نمی‌باشد. همچنین بد نیست اشاره کنیم در حالتی که انرژی- تکانه صفر نباشد ($T^{\mu\nu} \neq 0$) نیز جوابهای معادله اینشتین معادله (۳) را برآورده نمی‌کنند.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

رصدهای کنونی نشان دهنده این واقعیت هستند که جهان ما در حال انبساط با شتاب مثبت می‌باشد. این واقعیت که گرانش اینشتین بدون ثابت کیهان شناسی نمی‌تواند آن را توجیه نماید- ما را ملزم به یافتن جایگزینی برای آن می‌کند. از جمله مواردی که می‌توانند جایگزین مناسبی برای گرانش اینشتین باشد، گرانش مشتقات بالاتر است که در واقع گرانش اینشتین را به عنوان تقریب مرتبه اول آن می‌توان در نظر گرفت. در واقع برای فضاهایی که انحنای عالم زیاد باشد به نظر می‌رسد که توانهای بالاتر تانسور انحناء، تانسور ریچی و یا اسکالر انحناء را باید در کنش گرانش در نظر گرفت. در این مقاله ما با در نظر گرفتن کنش با اسکالرهایی که از توانهای دوم تانسور ریچی، تانسور انحناء و اسکالر ریچی می‌توان ساخت، به کمک اتحاد باخ- لانچوز در رابطه با تانسور وایل نشان دادیم که جوابهای معادلات اینشتین با ثابت کیهان شناسی در خلاء، معادلات میدان گرانش مشتقات بالاتر را در چهار بعد ارضاء می‌کنند. نکته قابل توجه اینکه با تنجش معادلات گرانش مشتقات بالاتر در ابعاد بیشتر از چهار و یا در حضور ماده می‌توان نشان داد که این معادلات توسط جوابهای معادلات اینشتین ارضاء نمی‌گردند.

پیوست

معادلات میدان (۳) حتی برای حالتهای بسیار ساده از جمله فضای استاتیک با تقارن کروی بسیار طولانی بوده و در آن مشتقات متریک تا مرتبه چهار ظاهر می‌شوند. پیچیدگی این معادلات به حدی است که در وهله اول به نظر نمی‌رسد که بتوان جواب دقیقی برای آن یافت. در این پیوست به منظور روشن شدن این نکته معادلات میدان (۳) را برای فضا- زمان چهار بعدی که قسمت فضایی آن دارای حداکثر تقارن می‌باشد و در نتیجه تعداد جملات آن خیلی زیاد نیست مورد بررسی قرار می‌دهیم. مولفه‌های غیر صفر معادله (۳) که همان معادلات توصیف کننده میدان می‌باشند مستقل از یکدیگر نیستند و کافی است که یکی از مولفه‌ها را بررسی کنیم. برای متریک اشاره شده در بالا که به صورت زیر می‌باشد:

$$ds^2=-dt^2+R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2(\theta)d\varphi^2\right)\right].\quad (10)$$

مولفه rr معادلات میدان (۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$(3a+b+c)\left(6\dot{R}^4+4k\dot{R}^2-24R\dot{R}^2\ddot{R}+6R^2\ddot{R}^2-8kR\ddot{R}+8\dot{R}R^2\dddot{R}+4R^3R^{(4)}-2k^2\right)-\Lambda R^4+R^2k+R^2\dot{R}^2+2R^3\ddot{R}=0\ ,\quad (11)$$

که در آن $R^{(n)}$ مشتق مرتبه nام $R(t)$ نسبت به t می‌باشد. همان گونه که ملاحظه می‌شود مشتقات $R(t)$ تا مرتبه چهار نسبت به زمان ظاهر شده‌اند. این معادله یک جواب تحلیلی به صورت زیر دارد:

$$R(t)=\frac{1}{2\sqrt{\Lambda MN}}\left(Me^{\pm t\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}+3Nke^{\mp t\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}\right),\quad (12)$$

که درآن M و N ثابتهای دلخواه هستند. این جواب علاوه بر اینکه در تمام مولفه‌های دیگر معادله (۳) صدق می‌کند، معادلات اینشتین با ثابت کیهان شناسی را نیز برآورده می‌سازد.

در اینجا بد نیست به این نکته اشاره کنیم که در حالت $a=c=-\frac{b}{4}$ که گرانش اینشتین- گوس- بونه می‌باشد پرانتز اول در معادله (۱۱) صفر شده و در نتیجه این معادله، به معادله اینشتین کاهش می‌یابد. به طور کلی وردش لاگرانژی گوس- بونه در چهار بعد هیچ گونه جمله‌ای را به معادلات میدان اضافه نمی‌نماید [۱۳].

مراجع

1. A G Riess et al., *Astrophys. J.* **607** (2004) 665; J L Tonry et al., *Astrophys. J.* **594** (2003) 1; S Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517** (1999) 565; A G Riess et al., *Astron. J.* **116** (1998) 1009.
2. S Capozzielo et al., *Int. J. Mod. Phys.* D **12** (2003) 1969; S Capozzielo, *Int. J. Mod. Phys.* D **11** (2002) 483.
3. Y Ezawa et al., *Class. Quant. Grav*. **20** (2003) 4933.
4. P Candelas, G T Horowitz, A Strominger and E Witten, *Nucl. Phys*. B **258**, (1985) 46; M B Greens, J H Schwarz and E Witten, *Supersting Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1987); D Lust and S Theusen, *Lectures on String Theory*, Springer, Berlin, (1989); J Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1998).
5. D Lovelock, *J. Math. Phys*. **12** (1971) 498.
6. D G Boulware and S Deser, *Phys. Rev. Lett*. **55** (1985) 2656.
7. M H Dehghani, *Phys. Rev*. D **67** (2003) 064017; M H Dehghani, *Phys. Rev*. D **69** (2004) 064024.
8. S D Odintsov, *Nucl. Phys*. B **628** (2002) 295.
9. M H Dehghani, *Phys. Rev*. D **70** (2004) 064009.
10. M H Dehghani, *Phys. Rev*. D **70** (2004) 064019.
11. R d'Inverno, *Introducing Einstein Relativity*, Clarendon Press, Oxford, (1996).
12. R Bach, *Math Zeitscher* **9** (1921) 110; J Madore, *Class. Quant. Grav*. **3** (1986) 361.
13. F Müller-Hoissen, *Phys. Lett*. B **163** (1985) 106.