

معادله بته سالپتر در فضای ناجابه جایی

منصور حقیقت^۱ و آزاده احمدیان

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

۱. پست الکترونیکی: mansour@cc.iut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۳/۵/۳ ؛ پذیرش: ۸۳/۱۱/۱۲)

چکیده

در این مقاله اثر فضای ناجابه جایی بر معادله بته سالپتر برای حالت مقید دو ذره بررسی شده است. در این بررسی حالات مقید دو ذره‌ای با ذرات اسپین ۰- اسپین ۰، اسپین ۱/۲- اسپین ۱/۲ و اسپین ۱- اسپین ۰ در نظر گرفته شده است. در طیف انرژی، پایینترین تصحیح مستقل از اسپین در همه موارد از مرتبه $\theta\alpha^4$ شروع می‌شود. در همین حال تصحیح وابسته به اسپین در فضای ناجابه جایی از مرتبه $\theta\alpha^6$ می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: فضای ناجابه جایی، معادله بته - سالپتر، حالت مقید

۱. مقدمه

جنبه‌های پدیده‌شناسی فضا‌های ناجابه جایی اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۱-۱۱]. در واقع سؤال اصلی چگونگی اندازه‌گیری و آشکار کردن اثر ناجابه جایی بر پدیده‌های فیزیکی است. به نظر می‌رسد الکترو دینامیک کوانتومی در فضای ناجابه جایی (NCQED) راه مستقیم برای محاسبه چنین اثراتی است. اختلاف اساسی NCQED با QED در حضور برهمکنشهای جدید (رأسهای سه و چهار فوتونی) است که خود باعث پیچیدگی محاسبات می‌گردد. برای بررسی این گونه اثرات حالات مقید دو ذره‌ای مانند اتم هیدروژن، پوزیترونیم و ... را می‌توان به عنوان یکی از نمونه‌های مورد توجه نام برد. برای این منظور علاوه بر داده‌های بسیار دقیق آزمایشگاهی، محاسبات نظری نیز باید با دقت کافی انجام گردد. با وجود اینکه قواعد فایمن برای NCQED کاملاً معلوم است [۱-۳] ولی در مورد حالات مقید باید این قواعد را در روشهای خاص،

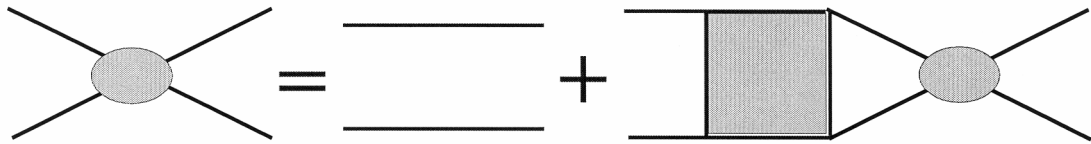
مثل معادله بته سالپتر و یا الکترو دینامیک کوانتومی غیر نسبیتی (NRQED) به کار برد [۱۲].

۲. معادله بته سالپتر

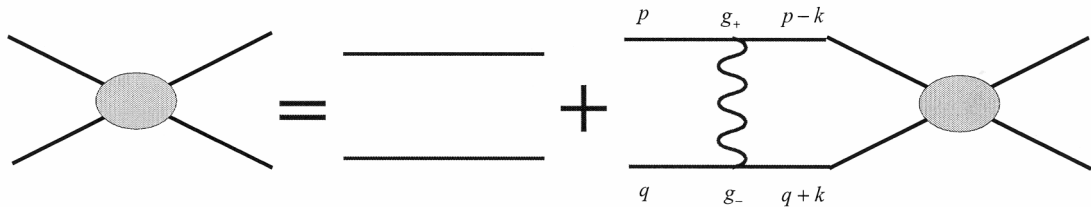
برای توصیف یک دستگاه شامل حالت مقید دو ذره‌ای به صورت هموردا باید از معادله بته سالپتر استفاده کرد. این معادله برای حالت مقید دو ذره‌ای (شکل ۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\Psi(p, q) = S(p)S(q) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} I(k; p, q) \Psi(p+k, q-k), \quad (1)$$

که در آن $\Psi(p, q)$ دامنه برای حالت مقید، $S(p)$ و $S(q)$ انتشارگر میدان ذره و $I(k, p, q)$ هسته برهمکنش است که خود از مجموع همه نمودارهای کاهش ناپذیر تشکیل شده است. باید توجه داشت در مورد یک ذره با اسپین ۱/۲، S ، انتشارگر فرمیونی و برای ذرات بدون اسپین انتشارگر بوزونی است. در QED



شکل ۱. معادله بته سالپتر.



شکل ۲. معادله بته سالپتر در تقریب نردبانی.

$$\Psi(p, q) = S(p)S(q) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_c \Psi(p+k, q-k), \quad (6)$$

را به دست آورد. برای این منظور به راحتی می توان دید که

$$\Psi(p) = D_{\pm\pm}^{-1} \frac{\Lambda_{\pm}^{\pm} \Lambda_{\mp}^{\pm}}{i\pi} v\phi(p), \quad (7)$$

که در آن داریم:

$$v\phi(p) = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^4 p'}{(p-p')^2} \phi(p'), \quad (8)$$

$$\phi(p) = \int dp^0 \Psi(p^0, p), \quad (9)$$

و

$$D_{\pm\pm}^{-1} = \frac{1}{\left[\frac{E}{2} + p_0 \mp (\omega - i\epsilon)\right] \left[\frac{E}{2} - p_0 \mp (\omega - i\epsilon)\right]}. \quad (10)$$

با انتگرال گیری از معادله (۷) بر روی p^0 می توان تابع موج

$\phi(p)$ را به صورت زیر به دست آورد

$$\phi(p) = \int dp^0 D_{\pm\pm}^{-1} \frac{\Lambda_{\pm}^{\pm} \Lambda_{\mp}^{\pm}}{i\pi} v\phi(p). \quad (11)$$

اکنون با توجه به تعیین تابع موج کولنی می توان اثر اختلال

بر روی انرژی به صورت جابجایی در انرژی را به صورت زیر

محاسبه کرد [۱۳]

$$\Delta E = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \tilde{\Psi}(p) (\delta V \Psi)(p), \quad (12)$$

که در آن داریم:

$$(\delta V \Psi)(p) = \int d^4 p' \delta V(p, p') \Psi(p'). \quad (13)$$

اگر اختلال به p و p' بستگی نداشته باشد یا

$\delta V(p, p') = \delta V(p, p')$ در آن صورت جابجایی انرژی به

صورت زیر ساده می شود

$$\Delta E = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \tilde{\phi}(p) (\delta V \phi)(p). \quad (14)$$

تقریب نردبانی (شکل ۲) به نظر تقریب معقولی است، بنابراین در پایینترین مرتبه، هسته برهمکنش را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I\Psi = (I_{obe} + I_a)\Psi, \quad (2)$$

که در آن obe به معنی تبادل یک بوزن و a نابودی یک بوزن می باشد. البته فقط در مورد حالت مقید یک ذره و پاد همان

ذره وجود خواهد داشت. در ادامه در پیمانه فایمن ضمن جداسازی برهمکنشهای لحظه ای و تأخیری، برهمکنش تأخیری را به کمک اختلال محاسبه می کنیم. برای این منظور به عنوان

مثال I_{obe} را برای دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ می توان به صورت زیر

نوشت [۱۳]

$$I_{obe} = -\frac{4\pi\alpha\gamma_1^0\gamma_2^0}{k^2} + 4\pi\alpha\left(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0 k_0^2}{k^2 k^2} - \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{k^2}\right), \quad (3)$$

که در آن k چار تکانه و k تکانه بوزن مبادله شده است.

به طور کلی I را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I = V_c + \delta V, \quad (4)$$

که در آن V_c هسته برهمکنش ناشی از پتانسیل کولنی و

δV ناشی از مجموع پتانسیلهای اختلالی است. بنابراین معادله

(۱) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\Psi(p, q) = S(p)S(q) \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_c \Psi(p+k, q-k) + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta V \Psi(p+k, q-k) \right). \quad (5)$$

با توجه به کوچک بودن جمله دوم ابتدا باید جواب معادله

نمودار ضرب می شود برابر با یک است. همچنین $I'(\theta)$ داده شده در معادله (۱۹) نشان دهنده برهمکنشهای ناشی از فضای ناجابه جایی است.

۳.۱. معادله بته سالیتر در فضای ناجابه جایی برای دو ذره با اسپین صفر

در این حالت دو ذره با اسپین صفر و بار مخالف تشکیل حالت مقید می دهند. بنابراین S در معادله (۱) انتشارگر بوزونی است و δV را می توان به کمک $I'(\theta)$ در دستگاه مرکز جرم به صورت

$$\text{زیر به دست آورد} \quad I'(\theta) = \frac{4\pi\alpha}{k^2} (1 - e^{ip \wedge p'}) - \frac{4\pi\alpha k_o^2}{k^2 k'^2} (1 - e^{ip \wedge p'}), \quad (20)$$

که در آن $p' = p - k$ ، باید توجه داشت که پایتترین تغییر در انرژی توسط پتانسیل داده شده در معادله (۲۰) مربوط به جمله اول و از مرتبه θ^4 می باشد. در واقع هر عامل تکانه در پتانسیل منجر به اضافه شدن یک α به انرژی می گردد. اکنون می توان تغییر در انرژی را با استفاده از رابطه (۱۲) در پایتترین مرتبه به صورت زیر محاسبه کرد

$$\Delta E = -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 p \int d^3 p' \phi^*(p) \left(\frac{4\pi\alpha}{(p-p')^2} (1 - e^{ip \wedge p'}) \right) \phi(p'). \quad (21)$$

با استفاده از تبدیل فوریه توابع موج می توان عبارت بالا را با کمی عملیات جبری به صورت زیر تبدیل کرد

$$\Delta E = -4\pi\alpha \int d^3 r \phi^*(r) \left(\frac{1}{4\pi r} \phi(r) - \phi(r + i\theta \cdot \nabla) \frac{1}{4\pi r} \right), \quad (22)$$

و یا تا مرتبه اول از θ خواهیم داشت

$$\Delta E = \alpha \int d^3 r \phi^*(r) \left(-\frac{r \cdot \theta \cdot i \nabla}{r^3} \phi(r) \right), \quad (23)$$

همچنین برای دو بردار اختیاری A و B داریم [۵]

$$A \cdot \theta \cdot B = \Theta \cdot (A \times B), \quad (24)$$

که در آن

$$\Theta = (\theta^{23}, \theta^{31}, \theta^{12}). \quad (25)$$

بنابراین تغییر در انرژی تا پایتترین مرتبه از θ به صورت

زیر خواهد شد

$$\Delta E = \alpha \int d^3 r \phi^*(r) \left(\frac{\Theta \cdot L}{r^3} \right) \phi(r). \quad (26)$$

با انتخاب Θ در راستای z می توان به راحتی نتایج گزارش

۳. معادله بته سالیتر در فضای ناجابه جایی

معادله (۱) یک معادله کاملاً کلی است و شکل آن به نوع برهمکنش بستگی ندارد. بنابراین برای نوشتن معادله بته سالیتر در NCQED کافی است، با توجه به قواعد فایمن داده شده در NCQED، تنها هسته برهمکنش درست نوشته شود. اختلاف QED و NCQED علاوه بر حضور برهمکنشهای جدید (سه و چهار فوتونی) در وجود عاملهای فاز وابسته به تکانه ای است که در هر رأس QED ضرب می گردد. برای نمونه هسته برهمکنش در مورد دو ذره با بارمخالف در سطح نمودار درختی و در دستگاه مرکز جرم به صورت زیر می باشد:

$$I_\theta^l(k; p, -p) = e^{\frac{i}{2} P \cdot (\theta_+ + \theta_-) \cdot k} I^l(k), \quad (15)$$

که در آن l نشان دهنده تقریب نردبانی است، $I^l(k)$ هسته برهمکنش در فضای جابه جایی است که به عنوان مثال عبارت ریاضی آن برای دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ در رابطه (۳) داده شده است و پارامتر ناجابه جایی θ یک تانسور پاد متقارن است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\theta^{\mu\nu} = -i[x^\mu, x^\nu]. \quad (16)$$

در ادامه θ^i را صفر فرض خواهیم کرد زیرا $\theta^i \neq 0$ مشکلاتی درباره یکانی بودن نظریه های میدانی و مفهوم علیت به وجود می آورد [۴ و ۱۵]. انتخاب $\theta_\pm$ در معادله (۱۵) این امکان را می دهد که بتوان پارامترهای ناجابه جایی متفاوت برای ذرت با بار مخالف در نظر گرفت.

به طور کلی هسته برهمکنش در فضای ناجابه جایی را می توان با مقایسه با رابطه (۲) به صورت زیر نوشت:

$$I^{NC} \Psi = (I_{obe}^{NC} + I_a^{NC}) \Psi, \quad (17)$$

که در آن

$$I_a^{NC} = I_a, \quad (18)$$

و

$$I_{obe}^{NC} = I_{obe} + I'(\theta), \quad (19)$$

باید توجه داشت که جمله I_a فقط وقتی که ذره و پادذره همان ذره حالت مقید تشکیل دهند وجود دارد در این حالت به راحتی می توان نشان داد که عامل فازی که در هر رأس این

جمله دوم معادله (۳۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D_{ij} = \frac{i}{k^2}(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) + \frac{-ik_o^2}{k^2 k^2}(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}), \quad (31)$$

که در آن جمله اول مربوط به انتشارگر فوتونهای نرم و جمله دوم که مرتبه بزرگی آن کوچکتر از اولی است انتشارگر فوتونهای فوق نرم را توصیف می‌کند. بنابراین تغییر در انرژی

در پایینترین مرتبه از θ از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\Delta E = -\frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^6} \int d^4 p' \int d^4 p \tilde{\Psi}(p') \left(\frac{-\gamma_1^0 \gamma_2^0}{k^2} + \frac{\gamma_1^i \gamma_2^j}{k^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) \right) (1 - e^{2ip \wedge p'}) \Psi(p). \quad (32)$$

با توجه به رابطه زیر

$$\Lambda_1^+ \Lambda_2^+ \begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{\sigma_1 \cdot p}{E+m_1} \chi_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \frac{\sigma_2 \cdot p}{E+m_2} \chi_2 \end{pmatrix} = u_1(p) \otimes u_2(p), \quad (33)$$

می‌توان ΔE را به صورت زیر نوشت

$$\Delta E = -\frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^6} \int d^4 p' d^4 p \psi^*(p') \bar{u}_1(p') \bar{u}_2(p') \left(\frac{-\gamma_1^0 \gamma_2^0}{k^2} + \frac{\gamma_1^i \gamma_2^j}{k^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) \right) (1 - e^{2ip \wedge p'}) u_1(p) u_2(p) \psi(p), \quad (34)$$

که در آن

$$\psi(p) = \int dp^0 D_{++}^{-1} \frac{1}{2i\pi} v \phi(p). \quad (35)$$

در به دست آوردن رابطه (۳۴) از این واقعیت که $A_1^- A_2^- = A_1^+ A_2^+ = A_1^- A_2^+ = A_1^+ A_2^- = 0$ بسیار بزرگتر از $A_1^- A_2^-$ است استفاده شده است. اکنون با استفاده از روابط زیر می‌توان تغییر در انرژی را محاسبه کرد

$$\bar{u}(p') \gamma_i u(p) = -\chi'^{\dagger} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} \chi + i\chi'^{\dagger} \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \boldsymbol{\sigma}}{2m} \chi + \mathcal{O}(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}), \quad (36)$$

و همچنین

$$\bar{u}(p') \gamma_0 u(p) = \chi'^{\dagger} \chi + i\chi'^{\dagger} \frac{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m^2} \chi - \chi'^{\dagger} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{4m^2} \chi + \mathcal{O}(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}), \quad (37)$$

که در آن اسپینور دو مؤلفه‌ای χ به یک بهنجار می‌باشد.

بنابراین اکنون برای ΔE داریم

$$\Delta E = 4\pi\alpha \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi)^6} \psi^*(p') \sum_i \Gamma_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (1 - e^{2ip \wedge p'}) \psi(\mathbf{p}), \quad (38)$$

شده در مراجع [۴]، [۵] و [۹] که با روشهای متفاوت به دست

آمده است را به صورت زیر به دست آورد

$$\Delta E = \alpha^4 \Theta \frac{P_{n,l}}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)}, \quad (27)$$

که در آن $P_{n,l}$ یک چندجمله‌ای از اعداد کوانتومی n و l

است.

۲.۳. معادله بته سالیتر در فضای ناجابه‌جایی برای دو ذره با

اسپین $\frac{1}{2}$

در این قسمت حالت مقید دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ ، برای مثال

پوزیترونیم، را بررسی می‌کنیم. بنابراین S در معادله (۱) انتشارگر فرمیونی است و δV را در این حالت می‌توان با تعیین

$I'(\theta)$ به کمک معادله (۳) به صورت زیر به دست آورد

$$I'(\theta) = \frac{4\pi\alpha\gamma_1^0\gamma_2^0}{k^2} (1 - e^{2ip \wedge p'}) - \quad (28)$$

$$4\pi\alpha \left(\frac{\gamma_1^i \gamma_2^j k_o^2}{k^2 k^2} - \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{k^2} \right) (1 - e^{2ip \wedge p'}).$$

در اینجا نیز همانند حالت بررسی شده در بخش قبل جمله اول

از مرتبه $\theta\alpha^4$ می‌باشد و به راحتی همانند آنچه قبلاً انجام شد

قابل محاسبه است. تفاوت مجموعه حاضر با حالت بدون اسپین

در جملات وابسته به اسپین موجود در هسته برهمکنش

می‌باشد (جمله سوم). این جملات در پایینترین مرتبه از مرتبه

$\theta\alpha^6$ می‌باشند. برای محاسبه تغییر در انرژی باید از رابطه (۱۲)

استفاده کنیم

$$\Delta E = -\frac{1}{(2\pi)^6} \int d^4 p \int d^4 p' \psi^*(p) (-4\pi\alpha \left(\frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0 k_o^2}{k^2 k^2} - \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{k^2} \right) (1 - e^{2ip \wedge p'})) \psi(p'). \quad (29)$$

با نگاهی به معادله بالا می‌توان دید محاسبه مربوط به تعیین

تغییر در انرژی به علت وابستگی هسته برهمکنش به p و p'

بسیار پیچیده‌تر می‌باشد. با توجه به اینکه در این مقاله به دنبال

محاسبه پایینترین تغییر در انرژی هستیم برای راحتی محاسبات

را در پیمانه کولن انجام می‌دهیم. در این پیمانه انتشارگر فوتونی

به صورت زیر می‌باشد

$$D_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \rightarrow D_{00} = \frac{-i}{k^2}, \quad (30)$$

$$D_{ij} = \frac{-i}{k^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}), \quad D_{i0} = D_{0j} = 0.$$

$$\Delta E_{\gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma m_e^{\gamma}} \int d^3r [\psi^*(\mathbf{r}) - \psi^*(\mathbf{r} + i\theta \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot \sigma_1}{r^{\gamma}}] \psi(\mathbf{r}), \quad (49)$$

و یا

$$\Delta E_{\gamma} = -\frac{\gamma \alpha}{\gamma m_e^{\gamma}} \int d^3r [\Theta \cdot \mathbf{L} \psi^*(\mathbf{r})] \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{L}}{r^{\delta}} \psi(\mathbf{r}). \quad (50)$$

برای بقیه جملات می توان نشان داد که

$$\Delta E_{\gamma} = \Delta E_{\gamma}(S_1 \rightarrow S_{\gamma}), \quad (51)$$

و

$$\Delta E_{\gamma} + \Delta E_{\gamma} = \frac{1}{\gamma} (\Delta E_{\gamma} + \Delta E_{\lambda}) = -\frac{\gamma \alpha}{\gamma m_e^{\gamma}} \int d^3r [\Theta \cdot \mathbf{L} \psi^*(\mathbf{r})] \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{r^{\delta}} \psi(\mathbf{r}), \quad (52)$$

که در آن $S = S_{\gamma} + S_r$ است. بنابراین معادله (۵۲) فقط در حالت $S=1$ مقداری غیر صفر دارد. جمله ΔE_{γ} که عبارت ریاضی معادل با جمله ΔE_e در مرجع [۹] دارد در هر دو حالت اسپینی کل صفر می باشد. اکنون به کمک انرژیهای محاسبه شده شکافت فوق ریز اتم پوزیترونیم در فضای ناجابه جایی به صورت زیر منجر می شود

$$\Delta E(S=1) - \Delta E(S=0) = -\frac{9\alpha}{\gamma m_e^{\gamma}} \int d^3r [\frac{\Theta \cdot \mathbf{L}}{r^{\delta}} \psi^*(\mathbf{r})] l \psi(\mathbf{r}). \quad (53)$$

که دقیقاً برابر با مقدار به دست آمده در مرجع [۹] به کمک روش NRQED می باشد.

۳.۳. معادله بته سالیتر در فضای ناجابه جایی برای دو ذره با

اسپین - صفر و اسپین $\frac{1}{2}$

در این قسمت به بررسی حالت مقید دو ذره با اسپینهای صفر و $\frac{1}{2}$ می پردازیم. بنابراین در این حالت یکی از انتشارگرها فرمیونی و دیگری بوزونی است. با توجه به اینکه در این حالت در یک رأس γ_{μ} و در رأس دیگر یک عامل تکانه داریم تغییر در انرژی از رابطه زیر به دست می آید

$$\Delta E = -\frac{\gamma \pi \alpha}{(\gamma \pi)^{\gamma}} \int d^3p' \int d^3p \tilde{\Psi}(p') \left(\frac{-\gamma_1^0 p_1^0}{k^{\gamma}} + \frac{\gamma_1^i p_1^j}{k^{\gamma}} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^{\gamma}}) \right) (1 - e^{\gamma i p \wedge p'}) \Psi(p), \quad (54)$$

که در آن

و

$$\Gamma_1 = \frac{1}{k^{\gamma}}, \quad (39)$$

$$\Gamma_2 = i \frac{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \cdot \sigma_1}{\gamma m_1^{\gamma}} \frac{1}{k^{\gamma}}, \quad (40)$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_2 (1 \rightarrow 2), \quad (41)$$

$$\Gamma_4 = -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{\lambda m_1^{\gamma}} \frac{1}{k^{\gamma}}, \quad (42)$$

$$\Gamma_5 = \Gamma_4 (1 \rightarrow 2), \quad (43)$$

$$\Gamma_6 = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_i}{\gamma m_1} \left(\frac{-1}{k^{\gamma}} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^{\gamma}}) \right) \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_j}{\gamma m_{\gamma}}, \quad (44)$$

$$\Gamma_7 = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_i}{\gamma m_1} \left(\frac{1}{k^{\gamma}} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^{\gamma}}) \right) \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \sigma_1}{\gamma m_{\gamma}} \right]_j, \quad (45)$$

$$\Gamma_8 = \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \sigma_{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}} \right]_i \left(\frac{1}{k^{\gamma}} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^{\gamma}}) \right) \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_j}{\gamma m_1}, \quad (46)$$

$$\Gamma_9 = \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \sigma_{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}} \right]_i \left(\frac{-1}{k^{\gamma}} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^{\gamma}}) \right) \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \sigma_1}{\gamma m_1} \right]_j. \quad (47)$$

در معادله (۳۸) جمله Γ_1 از مرتبه $\theta \alpha^4$ شروع می شود و مقدار آن در معادلات (۲۶) و (۲۷) محاسبه شده است. مرتبه بقیه جملات $(\Gamma_7 - \Gamma_9)$ همگی از $\theta \alpha^6$ شروع می شوند. بنابراین برای تعیین بزرگترین تغییر در انرژی تنها کافی است جمله اول را در نظر بگیریم اما برای تعیین اثر ناجابه جایی بر بعضی پدیده های مهم فیزیکی که با دقت بسیار بالا در آزمایشگاه اندازه گیری می شوند مثل شکافت فوق ریز در اتم پوزیترونیم $E(2^3S_1) - E(2^3P_2)$ [۲۰-۱۶] جمله اول هیچ نقشی ندارد در این مورد جملات وابسته به اسپین یعنی $\Gamma_7, \Gamma_8, \Gamma_9$ مقدار شکافت فوق ریز را نسبت به فضای معمولی تغییر می دهند. بنابراین با محاسبه تغییر در انرژی برای جملات ذکر شده می توان شکافت فوق ریز پوزیترونیم $(m_1=m_2=m_e)$ را در فضای ناجابه جایی براحتی محاسبه کرد:

$$\Delta E_{\gamma} = -\frac{i\pi}{m_e^{\gamma}} \int \frac{d^3p' d^3p}{(\gamma \pi)^{\gamma}} \psi^*(\mathbf{p}') \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{p}' \cdot \sigma_1}{k^{\gamma}} (1 - e^{\gamma i p \wedge p'}) \psi(\mathbf{p}), \quad (48)$$

که با انجام کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

Γ_5 و Γ_7 را محاسبه کرد:

$$\Delta E_7 = -\frac{\Upsilon\alpha}{2m_1} \int d^3r [\Theta \cdot \mathbf{L} \psi^*(\mathbf{r})] \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{L}}{r^5} \psi(\mathbf{r}), \quad (64)$$

و

$$\Delta E_5 = -\frac{\Upsilon\alpha}{m_1 m_2} \int d^3r [\Theta \cdot \mathbf{L} \psi^*(\mathbf{r})] \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{L}}{r^5} \psi(\mathbf{r}). \quad (65)$$

۴. نتیجه

در این مقاله حالت مقید دو ذره با اسپین صفر و $\frac{1}{4}$ به کمک معادله بته سالیتر بررسی شد. حالت اسپین صفر-اسپین صفر و حالت اسپین $\frac{1}{4}$ -اسپین $\frac{1}{4}$ قبلاً با روشهایی غیر از روش به کار گرفته شده در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۴]، [۵] و [۹]، که نتایج حاصل از این مقاله، داده شده در روابط (۵۳) و (۲۶) در توافق کامل با روشهای قبلی است. با توجه به اینکه تاکنون هم ارزی روش NRQED و معادله بته سالیتر نشان داده نشده است توافق کامل جوابها برای مسئله حل شده در این مقاله خود به تنهایی می‌تواند دارای اهمیت باشد. در این مقاله همچنین برای اولین بار حالت اسپین صفر-اسپین $\frac{1}{4}$ نیز به کمک معادله بته سالیتر بررسی شد که نتایج آن در روابط (۶۴) و (۶۵) داده شده است. به‌طور کلی اهمیت روش بته سالیتر در این است که حالات مقید دو ذره‌ای در فضای ناجابه‌جایی را در حالت کلی (جرمها و اسپینهای متفاوت) به‌طور سیستماتیک می‌توان بررسی کرد.

قدردانی

قسمتی از هزینه‌های طرح پژوهشی فوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان پرداخت شده است.

$$p_7 = (p_0 + p'_0, \mathbf{p} + \mathbf{p}'). \quad (55)$$

برای به دست آوردن بهنجارش صحیح در حد غیر نسبیتی چارتکانه موجود در رأس اسکالر را بر $\sqrt{2E}\sqrt{2E'}$ بخش می‌کنیم. بنابراین بسط $\frac{1}{m}$ رأس اسکالر به صورت زیر خواهد شد [۲۱]

$$\frac{p_0 + p'_0}{\sqrt{2E}\sqrt{2E'}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right), \quad (56)$$

$$\frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{\sqrt{2E}\sqrt{2E'}} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right). \quad (57)$$

بنابراین ΔE برای دو ذره با اسپین صفر و $\frac{1}{4}$ همانند رابطه

(۳۸) به صورت زیرنوشته می‌شود

$$\Delta E = \Upsilon\pi\alpha \int \frac{d^3p' d^3p}{(2\pi)^3} \psi^*(\mathbf{p}') \sum_i \Gamma_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (1 - e^{\Upsilon i \mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'}) \psi(\mathbf{p}), \quad (58)$$

که در آن Γ_i ها به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \quad (59)$$

$$\Gamma_2 = i \frac{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) \cdot \sigma_1}{2m_1^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \quad (60)$$

$$\Gamma_3 = -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{4m_1^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \quad (61)$$

$$\Gamma_4 = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_i}{2m_1} \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}) \right) \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_j}{2m_2}, \quad (62)$$

$$\Gamma_5 = \left[\frac{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \sigma_1}{2m_1} \right]_i \left(\frac{-1}{\mathbf{k}^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}) \right) \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')_j}{2m_2}. \quad (63)$$

در اینجا نیز جمله اول یعنی Γ_1 ، که مقدار آن در رابطه

(۲۶) تعیین شده است، از مرتبه $\theta\alpha^2$ شروع می‌شود و

بزرگترین جمله در تعیین مقدار ΔE است. بقیه جملات همگی

از مرتبه $\theta\alpha^2$ شروع شده و بسیار کوچکتر از جمله اول

می‌باشند. پس تنها کافی است جملات وابسته به اسپین یعنی

مراجع

3. H Arfaei and M H Yavartanoo, *hep-th/0010244*.
4. M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari and A Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 2716.

1. M Hayakawa, *hep-th/9912167*.
2. I F Riad and M M Sheikh-Jabbari, *JHEP* **0008** (2000) 045.

14. N Seiberg, L Susskind and N Toumbas, *JHEP* **0006** (2000) 044.
15. J Gomis and T Mehen, *Nucl.Phys. B* **591** (2000) 265.
16. K Pachucki and S G Karshenboim, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2101.
17. E W Hagen, et al., *Phys. Rev. Lett.* **72** (1993) 2887.
18. S Hatamian, R S Conti and A Rich, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1833.
19. R Ley, et al., *Hyperfine Interactions* **89** (1984) 327.
20. A P Mills, S Berko and K F Canter, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 1541.
21. S M Zebarjad, McGill Univesity Ph.D. Thesis (1997).
5. M Haghighat and F Loran, *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001) 1435.
6. Y Liao, *JHEP* **11** (2001) 067.
7. J Gamboa, M Loewe and J C Rojas, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 067901.
8. P M Ho and H C Kao, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 151602.
9. M Haghighat, S M Zebarjad and F Loran, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 016005.
10. M Haghighat and F Loran, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 096003.
11. M Haghighat and M M Ettefaghi, *to appear in Phys. Rev. D*, hep-ph/0405270.
12. W E Caswell and G P Lapage, *Phys. Lett. B* **167** (1986) 437.
13. C Itzykson and Zuber, *Quantun Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).