

بررسی شارش فراکتالی سیالات ناهمگن روی سطوح شیبدار هموار و تعیین بعد فراکتالی و دسته جهانی آنها

ناهید ملکی جیرسرایی^۱، بهاره قانع مطلق^۱، سمانه برادران^۱، الهام شکریان^۱ و شاهین روحانی^۲

۱. آزمایشگاه سیستمهای پیچیده، گروه فیزیک، دانشگاه الزهرا

۲. دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۸۲/۸/۱۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۳/۴)

چکیده

طرحها و نقشهایی که شارش یک مایع ناهمگن (سوسپانسیون) روی سطوح شیبدار هموار تشکیل می‌دهند و نقشهای فراکتالی آنها مورد مطالعه قرار گرفتند. یک زاویه آستانه برای شیب وجود دارد که برای زوایای بالاتر از آن مقدار، نقشهای فراکتالی سرتاسری به وجود می‌آید. این زاویه بستگی به اندازه ذرات سوسپانسیون دارد. مشاهده کردیم که دو بعد فراکتالی برای این نقشها وجود دارد که بستگی به نقطه‌ای دارد که نقش در آن شکل می‌گیرد. اگر طرح از ابتدا و بالاترین جای سطح شیبدار یعنی مراحل آغازین تشکیل نقش گرفته شده باشد، بعد فراکتالی ۱/۴۵-۱/۳۵ پیدا می‌شود و اگر طرح از سایر قسمتها تشکیل شده باشد، بعد فراکتالی ۱/۷-۱/۶ مشاهده می‌شود. اولین بعد فراکتالی متعلق است به شارش آب روی سطوح ناهمگن و نیز نتایج نارایان و فیشر و دومی متعلق به شبکه رودخانه‌ای است، این احتمالاً دلالت بر این دارد که هر دو دسته جهانی در اینجا موجود است. در آغاز که هنوز شاخه‌ها به هم متصل نشدند در دسته جهانی نخست قرار می‌گیرند اما وقتی شاخه‌ها به هم می‌پیوندند فیزیک شبکه رودخانه‌ای عمل می‌کند. هر چند در اینجا بی‌نظمی در مایع وجود دارد و پس از شارش به سطح منتقل می‌شود. بعد فراکتالی نقشهای زیر زاویه آستانه نیز به روش تابع همبستگی به دست آمدند که حاصل ۱/۵۷ تا ۱/۷ بوده است.

واژه‌های کلیدی: نقش فراکتالی، بعد فراکتالی، سیالات ناهمگن، دسته جهانی

۱. مقدمه

نارایان و فیشر [۴] دید، در همه این مثالها، محیط قویاً بی‌نظم است اما در میان این محیط، یک جسم ساده عبور می‌کند (خطوط شار در ابرسانا [۲]، شارشهای مایع همگن (بارش روی سطح زیر کثیف [۱]) و شبکه رودخانه‌ای (عبور آب از روی زمین ناهموار [۷ و ۸]) یا آغشته شدن محیط متخلخل به وسیله مایع غیرمرطوب‌کننده [۳].

نارایان و فیشر [۴] برای رفتار غیرخطی شارش مایع روی سطح زیر کاتوره‌ای، یک مدل پیشنهاد کرده‌اند. در این مدل، فرض شده است که بی‌نظمی به اندازه کافی قوی است تا شارش را به چندین کانال بشکند. همچنان که شیب سطح

شارش مایع در یک محیط کاتوره‌ای نمونه‌ای از انتقال غیرخطی جمعی با بی‌نظمی شدید [۱-۳] بیشترین توجه را جلب کرده است. انتقال ماکروسکوپیک تنها هنگامی رخ می‌دهد که نیروی جلوبرنده از مقدار آستانه تجاوز کند. نزدیک آستانه نشانه‌هایی از رفتار بحرانی از جمله واگرایی طول همبستگی، وجود دارد. اثرهای خیلی جالبی مثل مقیاس‌بندی روابط بین نمای بحرانی بالا و پایین آستانه و غیره را می‌توان انتظار داشت. مثالهای این رفتار را می‌توان در نقشهایی که در پنجره شیشه‌ای هنگام بارندگی شکل می‌گیرد [۱] یا در نقشهای ایجاد شده در مدل

صفحه که مایع روی آن ریخته می‌شود به وسیله یک صفحه تمیز شیشه‌ای پوشانده شده است. نسبت مخلوطها در طول همه آزمایشها ثابت نگه داشته می‌شود. برای مثال نسبت حجم ماست به آب ۱۰۰ به ۱۵۰ بود.

همین‌که مایع روی سطح شیبدار ریخته شد، نقشهای رسوبی که مایع به جا می‌گذارد، دارای نقشهای فراکتالی قابل مشاهده‌ای هستند. این نقشها به‌وسیله اسکنر و کامپیوتر، ثبت ورقومی می‌شوند. یک مثال از طرح رقومی شده در شکل ۱ نشان داده شده است.

نقش فراکتالی تشکیل شده در اثر شارش مایع به پایین روی سطح شیبدار آشکار است. ما مشاهده کردیم که یک زاویه بحرانی برای سطح شیبدار وجود دارد. اگر زاویه سطح شیبدار زیر آستانه باشد، طرح فراکتالی سرتاسری نیست یعنی حتی یک درخت (شاخه) فراکتالی از ابتدا تا انتهای سطح شیبدار که مایع ریخته شده است وجود ندارد. بالای زاویه آستانه تعداد زیادی شاخه فراکتالی سرتاسری وجود دارد. شکل ۱ را ببینید. ما این زاویه را بین (۱۰-۱۲°) برای ماست و (۸-۱۰°) برای پودر تالک و (۳۴-۳۶°) برای آرد به دست آوردیم. زاویه آستانه جایی است که ما اولین نقش فراکتالی سرتاسری را مشاهده می‌کنیم. در اینجا جزئیات مقیاس‌بندی سیستم را گزارش می‌کنیم. مشاهدات ما با نتایج نظری شارش مایعات روی سطوح زبر [۵ و ۴] در شروع شکل‌گیری نقش یعنی بالای سطح شیبدار سازگار هستند و هم‌چنین با شبکه رودخانه‌ای برای کل نقش سازگارند.

نمودار اندازه ذرات که به‌وسیله Particle Size Analyzer اندازه‌گیری شده، در شکل ۲ نشان داده شده است. مشاهده کردیم که ذرات ماست یک دست‌تر هستند و اندازه آنها در حدود $50 \mu m$ است. شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب توزیع اندازه ذرات برای پودر تالک و آرد را نشان می‌دهند. اندازه ذرات برای پودر تالک در حدود $25 \mu m$ و برای آرد تقریباً $18 \mu m$ است. مشخصات این سوسپانسیونها که حاصل اندازه‌گیریهای مذکور است، در جدول ۱ داده شده است.

۳. آنالیز تصویری

بعد از وارد کردن طرحها به رایانه از طریق اسکنر و رقومی

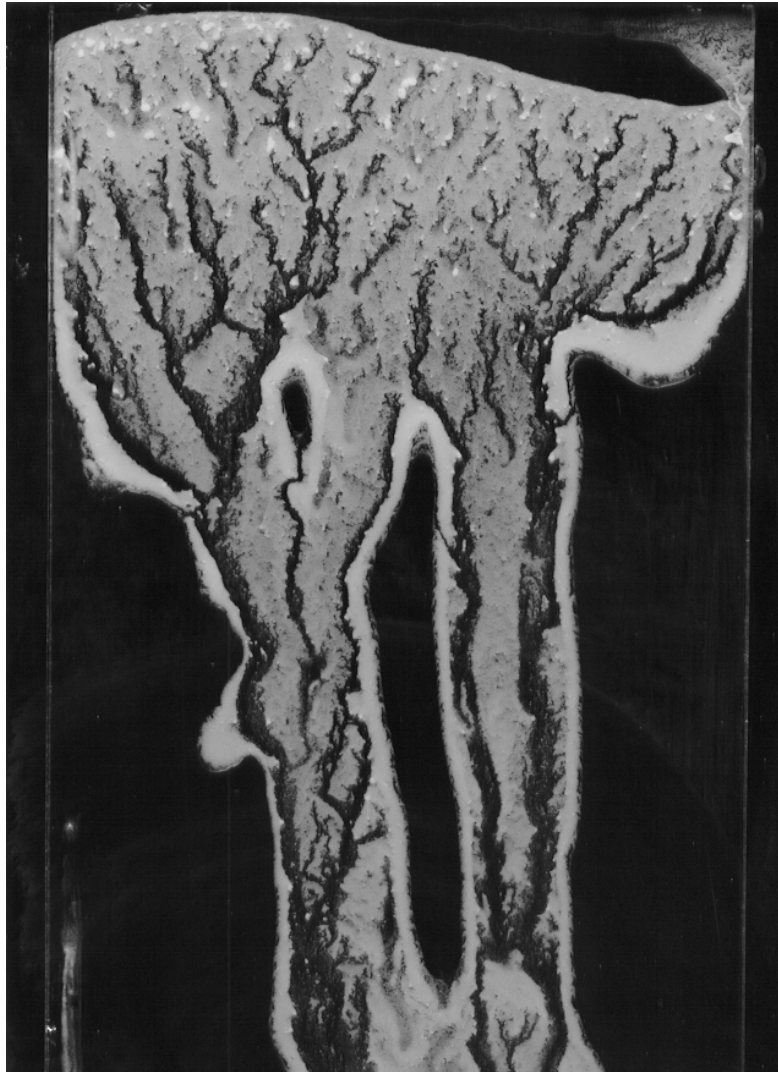
شیبدار به آرامی افزایش داده می‌شود، مایع در گودالهایی با یک عمق مشخص جمع می‌شود تا هنگامی که به حد اشباع برسند، آنگاه گودالهای مجاور را از پایین پر می‌کنند و خوشه‌های گودالها شکل می‌گیرند. اگر زاویه سطح شیبدار کوچک باشد، آنگاه آب، گودالها را کاملاً پر نمی‌کند. هنگامی که زاویه سطح شیبدار بزرگتر می‌شود طول خوشه‌ها افزایش می‌یابد و در زاویه آستانه بحرانی به مقدار بینهایت می‌رسد. زیر این حد بحرانی تعداد زیادی خوشه منزوی شده می‌توانیم ببینیم که کاملاً از شارش جدا هستند. در آستانه که هم ارز گذار فاز تعریف می‌شود، دست کم یک رودخانه جاری از بالا تا پایین وجود دارد (یعنی دست کم یک خوشه که طول همبستگی آن بی‌نهایت است).

از سوی دیگر شبکه‌های شاخه شاخه شده رودخانه‌ها از میان متداولترین نقشهایی که در طبیعت یافت می‌شوند به طور خود به خودی ساختاری در مقیاس طولهایی با ابعادی عظیم ایجاد می‌کنند. مطالعه شبکه رودخانه‌ای دارای این هدف است که ناپایداریهایی را که منجر به متصل شدن آب به کانالها و نهایتاً شبکه رودخانه‌ای می‌شود بشناسد [۸ و ۷]. بعد فراکتالی این ساختار در محدوده $1/7$ تا $1/6$ است [۸ و ۷].

در مقابل این مثالها، سیستم ما سیستمی است که در مایع متحرک بی‌نظمی ظاهر شده است و محیط همگن است. سوسپانسیونهای تشکیل شده از ماست و آب (دوغ)، پودر تالک و آب، آرد و آب که روی سطح شیشه‌ای شیبدار شارش پیدا می‌کنند. سطح کاملاً تمیز است و مایعات باعث فرسایش آن نمی‌شوند.

۲. مراحل آزمایش

این آزمایشها با سه سوسپانسیون انجام شده‌اند: ماست و آب (دوغ)، پودر تالک و آب، آرد و آب با نسبتهای کنترل‌شده. مهمترین مزیت این سه مخلوط ارزانی و قابل دسترس بودن آنها است. ابزار کار شامل یک ظرف است که از مایع پر شده و می‌چرخد و به مایع اجازه می‌دهد که از لبه بالایی سطح شیبدار، به‌طور یکنواخت پایین بریزد. صفحه کالیبره شده اجازه می‌دهد که ظرف شیشه‌ای با زاویه مورد نظر منطبق شود. سطح بالای



شکل ۱. طرح رقمی شده جریان سوسپانسیون ماست و آب روی یک سطح شیبدار بالای زاویه آستانه. مناطق سفید رسوب ماست هستند و مناطق سیاه به وسیله شارش آب شسته شده‌اند.

محاسبه و منحنی لگاریتمی آنها رسم شده است. متوسط شیب همه منحنیها، معادل توان d_f است.

شکل ۵ یکی از این منحنیها و شیبش را برای ماست نشان می‌دهد. در این روش d_f برای بالای نقش یعنی در مراحل آغازین تشکیل نقش که جریانها مستقل از یکدیگر تشکیل می‌شوند در دامنه $1/35-1/45$ به دست آمده است.

روش ۲- جرم کلی شارشها، M با طول کل L مقایسه می‌شود.

$$M(L) \sim L^{d_f}$$

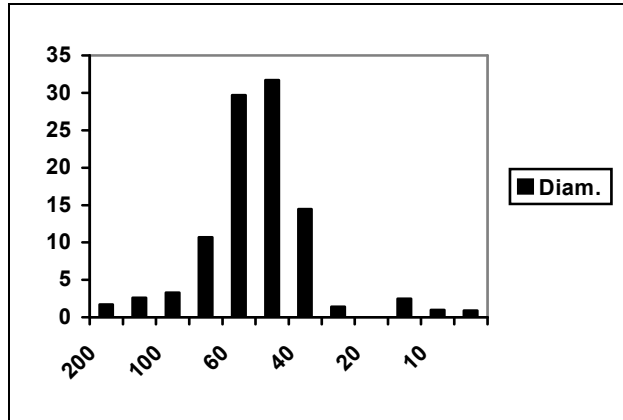
این روش اساساً مثل روش اول است، جز اینکه در هر مورد به جای

کردنشان، بعد فراکتالی آنها را به روشهای مختلف اندازه گرفتیم. ما برای محاسبه بعد فراکتالی از سه روش مختلف استفاده کردیم:

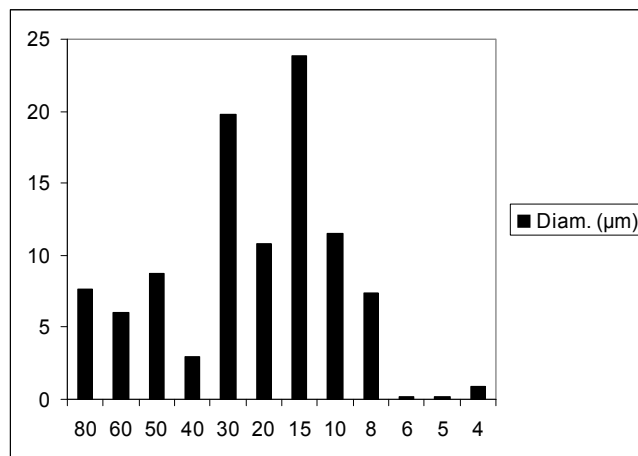
روش ۱- جرم هر جریان معین m ، به طول جریان پایین سوی شارش بستگی دارد. در اینجا جرم در واقع مساحت کل شاخه و l طول شاخه است.

$$m(l) \sim l^{d_f}$$

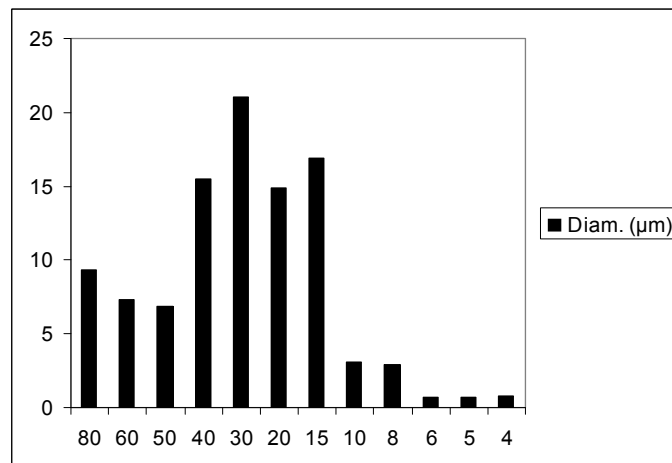
در این روش چندین نقش از شاخه‌های فراکتالی در مقیاسهای مختلف انتخاب شده و برای هر کدام از آنها $m(l)$ و l



شکل ۲. توزیع اندازه ذره برای ماست.



شکل ۳. توزیع اندازه ذره برای آرد.



شکل ۴. توزیع اندازه ذره برای پودر تالک.

جدول ۱. مشخصات ذرات

سوسپانسیون	قطر متوسط (μm)	قطر صوری (مودال) (μm)	مساحت سطح (m^2/g)
ماست	۴۹/۳۷	۴۸/۲۸	۱/۱۴
آرد	۱۷/۷۵	۱۲/۲۹	۰/۲۸
پودر تالک	۲۴/۷۵	۲۴/۴	۰/۲۲

جرم شارش $m(\ell)$ را می‌توان بر حسب تابع همبستگی بیان کرد که بعد فراکتالی طبق رابطه زیر از آن حاصل می‌شود [۶].

$$d_f = 2 - \alpha \quad (۳)$$

این رابطه همان چیزی است که vicsek [۶] ارائه کرد جز اینکه آن غیرهمسانگرد است. غیر همسانگردی، رابطه مقیاس‌بندی را که در مرجع [۱] گفته شده است تغییر نمی‌دهد. ما در شکل ۷ یک منحنی از $\ln C(r)$ بر حسب $\ln(r)$ ‌های متفاوت برای شارش پایین سوی سوسپانسیون ماست مشاهده می‌کنیم.

این منحنی در دو ناحیه دو رفتار توانی دارد، یکی در شروع منحنی و دیگری در بخش میانی. شکل‌های ۸ و ۹ منحنی‌های لگاریتمی را به وسیله جدا کردن بخش خطی آنها، که به وضوح متفاوت هستند نشان می‌دهند و با پیدا کردن شیب این خطها، می‌توانیم دو شیب α_1 و α_2 را پیدا کنیم که از روی آنها بعد فراکتالی به دست می‌آید.

شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب، توابع همبستگی و بعدهای فراکتالی برای سوسپانسیون آرد را به ترتیب در دو حالت مراحل آغازین تشکیل نقش، و تمامی نقش نشان می‌دهد.

شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به ترتیب توابع همبستگی برای پودر تالک و ماست، وقتی تمامی نقش برای بررسی انتخاب شوند را، نشان می‌دهد. این منحنیها برای پودر تالک و ماست، به ترتیب اعداد $1/7$ و $1/13$ را به دست می‌دهند.

در پایان بعد فراکتالی نقش تشکیل شده در زیر زاویه آستانه را نیز به دست آوردیم که حاصل در محدوده $1/57$ تا $1/7$ بوده است. شکل ۱۴ یک نمونه از این کار را نشان می‌دهد.

زیر شاخه، کل شاخه فراکتالی انتخاب می‌شود. بنابراین در این روش با هر صفحه در آزمایش به عنوان یک نقش رفتار می‌شود. در نتیجه به جای یک منحنی یک نقطه حاصل می‌شود بعد از رسم شکل‌های log-log (شکل ۶) این نقاط یک خط راست تشکیل می‌دهند که شیب آن همان بعد فراکتالی نقش است.

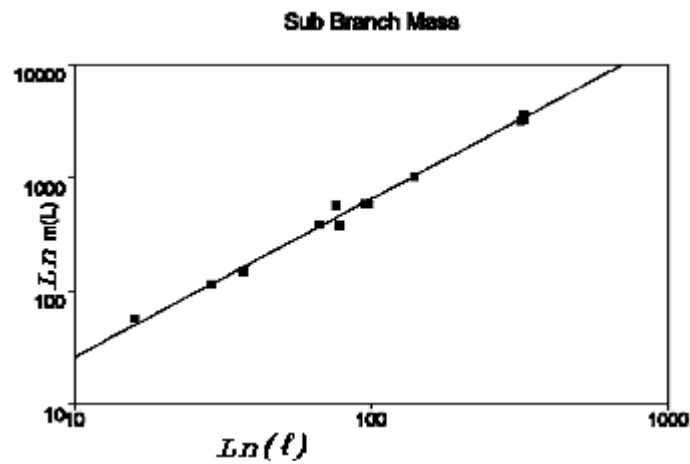
در این روش بعد فراکتالی به دست آمده برای ماست برای قسمت بالایی نقش فراکتالی یعنی قسمت آغازین تشکیل نقش $d_f = 1/40 \pm 0/05$ است.

روش ۳- آخرین روش مطالعه شده روش تابع همبستگی [۶ و ۷] است که طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

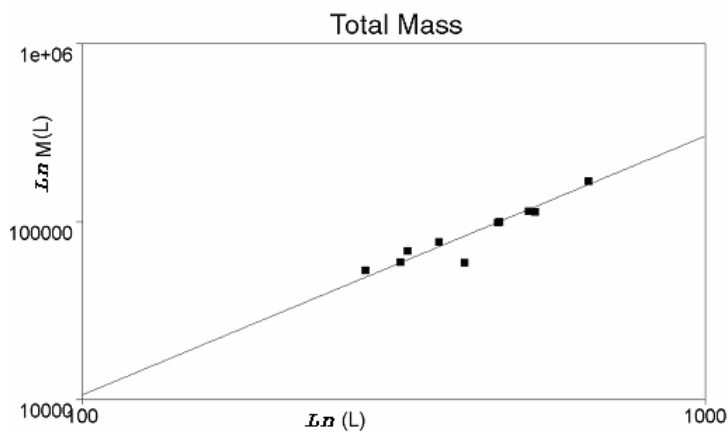
$$C(r) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \rho(\vec{r}_i) \rho(\vec{r}_i + \vec{r}) \quad (۱)$$

در اینجا ρ ، چگالی محلی است و اگر نقطه با موقعیت \vec{r} متعلق به ساختار باشد آنگاه $\rho(r) = 1$ و اگر نباشد آنگاه $\rho(r) = 0$ است. N ، تعداد کل نقاطی است که در محاسبه تابع همبستگی به کار می‌روند. تابع $C(r)$ نماینده مقدار مورد انتظاری است که دو نقطه متعلق به نقش باشند. در طرح فراکتالی همسانگرد، ما انتظار داریم $C(r)$ به جهت، بستگی نداشته باشد بلکه فقط به فاصله بستگی داشته باشد، بنابراین $C(\vec{r}) = C(r)$. در این مورد، جهت‌های عمودی و افقی به روشنی متفاوت هستند، بنابراین ما انتظار داریم که Γ جهتی موازی راستای رو به پایین داشته باشد. تابع همبستگی رابطه توانی را به شکل زیر ارضاء می‌کند.

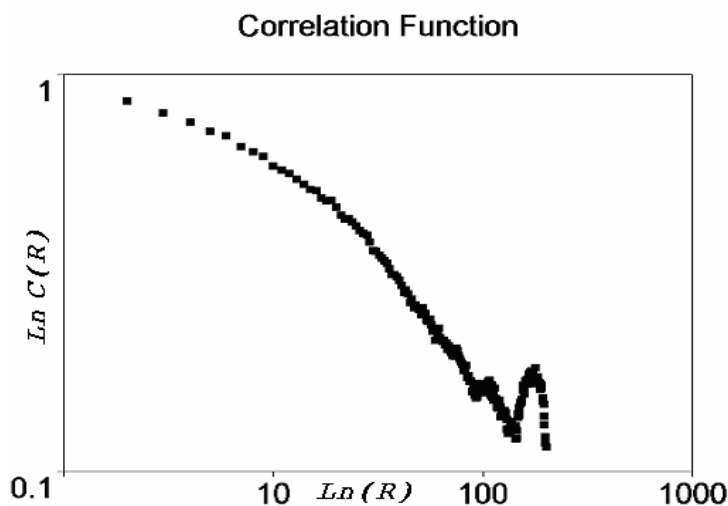
$$C(r) \sim r^{-\alpha} \quad (۲)$$



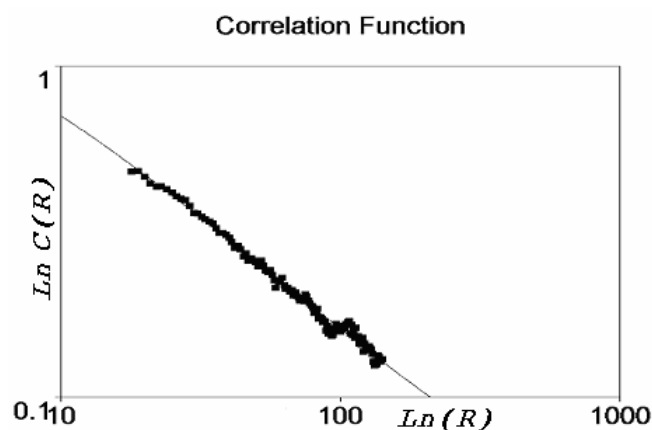
شکل ۵. بعد فراکتالی مخلوط ماست که روی یک سطح شیبدار ریخته شده است، m مساحت سطح شاخه و l طول آن است.



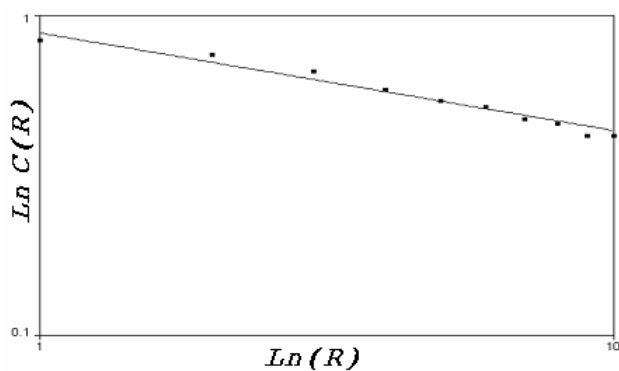
شکل ۶. بعد فراکتالی از طریق مقایسه جرم کل و طول کل شاخه.



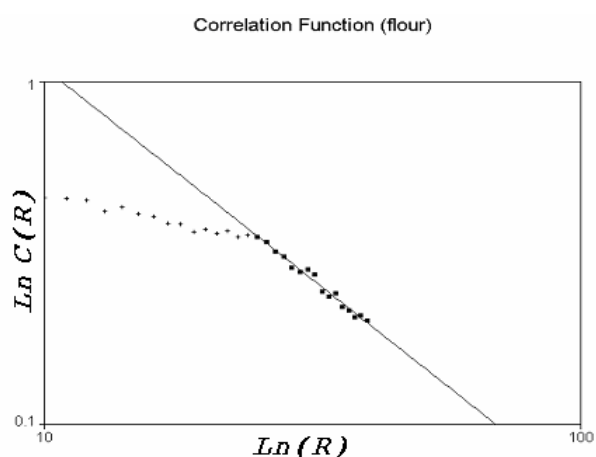
شکل ۷. تابع همبستگی برای شارش پایین سوی ماست برای بخشی از نقش که از بالای آن یعنی مراحل آغازین تشکیل نقش انتخاب شده است به طوری که بیشتر نقش انتخابی از جریانهای مستقل تشکیل شده‌اند.



شکل ۸. بخش میانی منحنی شکل ۷ که آشکارا بخش غالب آن است مربوط به بخش بالا یعنی مراحل آغازین تشکیل نقش است. بعد فراکتالی حاصل $1/4$ است.

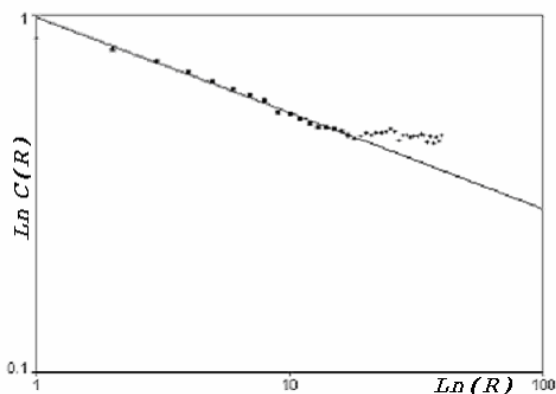


شکل ۹. قسمت اول منحنی شکل ۷ که آشکارا بخش غیرغالب آن است مربوط به بخش بالا یعنی مراحل آغازین تشکیل نقش است. بعد فراکتالی حاصل $1/7$ است. لذا برای مراحل آغازین تشکیل نقش بعد فراکتالی $1/4$ غالب است.



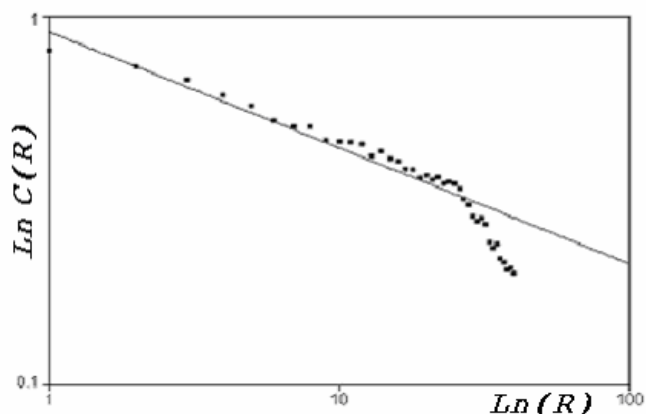
شکل ۱۰. تابع همبستگی برای آرد، برای طرحی گزیده از مراحل آغازین تشکیل نقش. بعد فراکتالی که شیب خط است $1/34$ است.

Correlation Function (talcum powder)



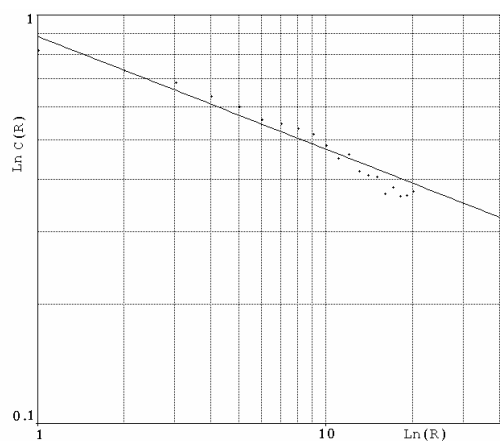
شکل ۱۲. تابع همبستگی برای پودر تالک، وقتی تمامی نقش برای بررسی انتخاب شود. بعد فراکتالی در این حالت $1/73$ است.

Correlation Function (Flour)

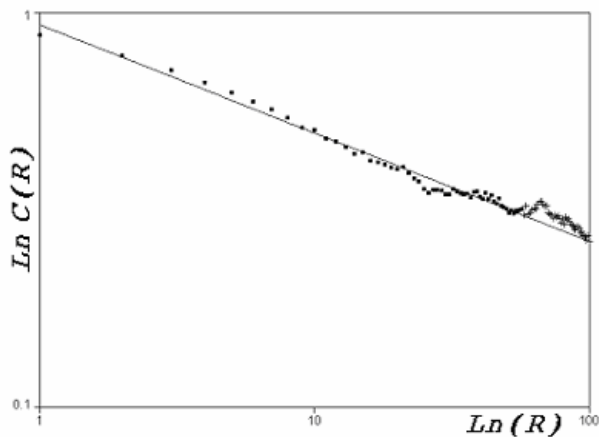


شکل ۱۱. تابع همبستگی برای آرد، وقتی کل نقش برلی بررسی انتخاب می‌شود، بعد فراکتالی حاصل $1/69$ است.

Correlation Function(yoghurt)



شکل ۱۴. تابع همبستگی برای نقش زیر آستانه. بعد فراکتالی حاصل از این نمودار $1/7$ است.



شکل ۱۳. تابع همبستگی برای ماست، وقتی تمامی نقش برای بررسی انتخاب می‌شود. بعد فراکتالی در این حالت $1/7$ است.

۴. نتیجه گیری

شکل می‌گیرند. اگر زاویه سطح شیبدار کوچک باشد، آنگاه آب، گودالها را کاملاً پر نمی‌کند. هنگامی که زاویه سطح شیبدار بزرگتر می‌شود طول خوشه‌ها افزایش می‌یابد و در زاویه آستانه بحرانی به مقدار بینهایت می‌رسد. زیر این حد بحرانی تعداد زیادی خوشه ایزوله شده می‌توانیم بینیم که کاملاً از شارش جدا هستند. در آستانه که هم ارز گذار فاز تعریف می‌شود، دست کم یک رودخانه جاری از بالا تا پایین وجود دارد (یعنی دست کم یک خوشه که طول همبستگی آن بی‌نهایت است).

ناریان و فیشر [۴] برای رفتار غیرخطی شارش مایع روی سطح زبر کاتوره‌ای، یک مدل پیشنهاد کرده‌اند. در این مدل، فرض شده است که بی‌نظمی به اندازه کافی قوی است تا شارش را به چندین کانال بشکند. همچنان‌که شیب سطح شیبدار به آرامی افزایش داده می‌شود، مایع در گودالهایی با یک عمق مشخص جمع می‌شود تا هنگامی که به حد اشباع برسند. گودالهای مجاور را از پایین پر می‌کنند و خوشه‌های گودالها

بدین ترتیب به نظر می‌رسد هیچ پارامتر محلی مخصوص هر یک از این سوسپانسیونها از قبیل توزیع اندازه ذرات و ضریب چسبندگی ذرات با سطح در بعد فراکتالی تأثیر ندارد و تنها چگونگی شارش که در همه یکسان است تعیین‌کننده بعد فراکتالی است که خود بدین معنی است که همگی در یک دسته جهانی قرار می‌گیرند. سؤال جالبی که باقی می‌ماند نوع رابطه توزیع اندازه ذرات با زاویه آستانه است. تا کنون می‌دانیم که زاویه آستانه به نیروی جلو برنده شارش که در این جا گرانش است بستگی دارد. می‌توان انتظار داشت که به ضریب چسبندگی ذرات به سطح نیز بستگی داشته باشد. اما رابطه آن با توزیع اندازه ذرات سوسپانسیون برای ما روشن نیست و نیاز به کار بیشتری دارد که امیدواریم در آینده به پاسخ آن دست یابیم.

قدردانی

مایلیم از آقای دکتر سربلوکی و خانم علمی برای کمکشان در اندازه‌گیری اندازه دانه‌ها، و نیز از آقای اسامه مشتاق عسکری برای کمک ایشان در برنامه نویسی رایانه‌ای تشکر نمایم.

سیستم تحت مطالعه با مدل‌های نارایان و فیشر متفاوت است زیرا بی‌نظمی در مایع است نه در سطح. به رغم این تفاوت، اندازه‌گیری بعد فراکتالی از بالای نقش، یعنی از مراحل اولیه شکل‌گیری نقش با پیش‌بینی‌های مدل نارایان و فیشر [۴] و مشاهدات تجربی سازگار است [۱] و ظاهراً سیستم مطالعه شده قبل از پیوستن جریانها، احتمالاً از همان دسته جهانی است، حال آن که بعد از پیوستن جریانها احتمالاً یک شبکه رودخانه‌ای داریم. نظریه میدان متوسط برای بعد فراکتالی این نوع از شبکه‌ها مقدار $1/34$ را پیش‌بینی می‌کند [۴]، در حالی که کمیت اندازه‌گیری شده ما برای مراحل اولیه شکل‌گیری نقش $(1/40 \pm 0/05)$ تقریباً برابر با این مقدار است. برای تمامی نقش، وقتی جریانها به هم متصل می‌شوند، بعدفراکتالی برابر بعد فراکتالی شبکه‌های رودخانه‌ای می‌شود.

در آزمایش مورد مطالعه توسط توماسن و کیم، حرکت آب روی سطح شیبدار کثیف [۱]، بعد فراکتالی اندازه‌گیری شده $1/37 \pm 0/05$ بود که سازگار با اندازه‌گیری ما برای مراحل اولیه شکل‌گیری نقش است.

مراجع

1. M S Tomassone and J Krim, *Phys. Rev. E*, **54** (1996) 6511.
2. A I Larkin and Yu N Ovchinnikov, *J. Low Temp. Phys.* **34** (1979) 409.
3. R Leonormand and C Zaccaro, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2226.
4. O Narayan and D S Fisher, *Phys. Rev. B*, **49** (1993) 9469.
5. J Watson and D S Fisher, *Phys. Rev. B*, **54** (1996) 938.
6. T Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989).
7. S Kramer and M Marder, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1991) 205.
8. A Rinaldo et al., *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1992) 822.