

## مطالعه نیمه کلاسیکی چند رابطه جابه‌جاگری تعمیم‌یافته

بهروز میرزا و مهدی دهقانی

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده فیزیک

(دریافت مقاله: ۸۲/۱۲/۲۵ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۵/۷)

### چکیده

هدف ما در این مقاله یافتن آثار مشاهده‌پذیر از روابط جابه‌جاگری تعمیم‌یافته است. برای این منظور در ابتدا به دو مسئله در مکانیک کوانتومی با فرض کمینه طول می‌پردازیم. نخست با استفاده از بررسی اختلالی طیف اتم هیدروژن در مکانیک کوانتومی با جبر رابطه عدم قطعیت کمینه طول و مقایسه نتایج حاصل با مقادیر تجربی تخمینی از طول کمینه به دست می‌آوریم. سپس به عنوان بررسی اثرات فرض کمینه طول در مکانیک آماری و چگالی حالت‌های فضای فاز، مسئله محاسبه جرم حدی برای کوتوله‌های سفید را مورد مطالعه قرار داده و تلاش می‌کنیم جرم حدی برای کوتوله‌های سفید را با این فرض تصحیح کنیم. در پایان به بررسی برخی جنبه‌های کلاسیکی روابط عدم قطعیت کمینه تکانه می‌پردازیم. سپس قانون سوم کپلر را با این فرض تصحیح کرده و کاربردی برای آن پیشنهاد می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: روابط عدم قطعیت کمینه طول، تقریب نیمه کلاسیکی، گرانش کوانتومی

### ۱. مقدمه

جایگزینی ایجاب می‌کند. ذره آزمونی که برای اندازه‌گیری در طولهای به کوچکی طول پلانک به کار می‌رود باید تکانه و انرژی زیادی داشته باشد چنین ذره‌ای خود ساختار فضا زمان را متأثر خواهد کرد. بنابراین یک نظریه وحدت یافته از گرانش و مکانیک کوانتومی جایگزینی مطلقاً ندارد. عدم جایگزینی باعث عدم قطعیتی در اندازه‌گیریها در گرانش کوانتومی می‌شود این انگیزه‌ای است برای مطالعه نظریه‌ای که از آن به عنوان پدیده‌شناسی گرانش کوانتومی<sup>۳</sup> [۱] یاد می‌شود. در پدیده‌شناسی گرانش کوانتومی تلاش می‌شود با استفاده از داده‌های اخترشناسی [۲، ۳] نظریه‌ای برای ساختار فضا زمان در فواصل کوچک از مرتبه طول پلانک بیابند. آملینو کاملاً<sup>۴</sup> از این طریق نظریه‌ای معرفی کرده است با عنوان نظریه نسبیت خاص

در سالهای اخیر مطالعه بر روی مسائل مکانیک کوانتومی و نظریه میدان با روابط عدم قطعیت تصحیح شده مورد توجه قرار گرفته است. این روابط عدم قطعیت منجر به کمینه طول<sup>۱</sup> یا کمینه تکانه‌های<sup>۲</sup> مشاهده‌پذیر غیر صفر می‌گردند و از روابط جابه‌جاگری تصحیح شده به فرم کلی زیر نتیجه می‌شوند:

$$[x, p] = i\hbar f(x^2, p^2)$$

انگیزه‌های مطالعه چنین روابطی از حوزه‌های گوناگون در فیزیک نظری مانند نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی برمی‌خیزد. به عنوان مثال برای ساختن نظریه گرانش کوانتومی این‌گونه استدلال می‌شود که: برهم نهی مکانیک کوانتومی و نسبیت عام در ابعاد از مرتبه طول پلانک محدودیتی برای مفهوم

۳. Quantum gravity phenomenology

۴. G. Amelino-Camelia

۱. Minimal length

۲. Minimal momentum

فیزیک در ابعاد بسیار ریز با فیزیک در ابعاد بسیار بزرگ به وجود آید. به این ترتیب مکانیک کوانتومی یا نظریه میدان مبتنی بر رابطه عدم قطعیت (۱) این قابلیت را دارد تا به عنوان رهیافتی برای حل برخی مسائل که فیزیک فواصل کوچک را به فیزیک فواصل بزرگ ربط می‌دهند، مورد استفاده قرار گیرد. برای مثال مسئله ثابت کیهان‌شناسی، مسئله منظم‌سازی تکینه‌ها در نظریه میدان را می‌توان نام برد.

در اینجا ما تلاش خواهیم کرد با استفاده از تقریبه‌های نیمه کلاسیکی به برخی از جنبه‌های کلاسیکی چند نظریه مبتنی بر جابه‌جاگرهای تغییر شکل یافته بپردازیم. بر این اساس در بخش اول دو مسئله را با مکانیک کوانتومی کمینه طول بررسی خواهیم کرد و از این طریق راهی برای برآورد پارامتری که طول کمینه را مشخص می‌کند به دست خواهیم آورد. در بخش دوم با استفاده از حد کلاسیکی مکانیک کوانتومی کمینه تکانه تلاش خواهیم کرد تا از پارامتر جبر کمینه تکانه نیز برآوردی به دست آوریم.

## ۲. مکانیک کوانتومی با جبر عدم قطعیت کمینه طول

یک ساختار جبری برای مشاهده‌پذیرها که رابطه عدم قطعیت (۱) را نتیجه می‌دهد در مرجع [۸] به دست آمده است. مکانیک کوانتومی تعمیم‌یافته مربوط به این ساختار جبری که به صورت زیر است:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} (1 + \beta \vec{p}^2) \quad (2)$$

$$[x_i, x_j] = 2i\hbar \beta (p_i x_j - p_j x_i) \quad (3)$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (4)$$

به تفصیل در مرجع [۹] بررسی شده است.

اگر چه رابطه عدم قطعیت (۱) مربوط به فواصل بسیار ریز و یا فیزیک انرژی‌های بالاست با این وجود ما دو مسئله در مکانیک کوانتومی با انرژی‌های معمول را با فرض کمینه طول مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هدف اصلی از این کار این است که یک حد بالا برای پارامتری که جبر رابطه عدم قطعیت کمینه طول را مشخص می‌کند، به دست آوریم. به این منظور در بخش

دوگانه<sup>۱</sup> [۵،۴] که در آن علاوه بر وجود یک سرعت حدی مشاهده‌پذیر یک کمینه طول حدی مشاهده‌پذیر و مستقل از مشاهده‌گر نیز وجود دارد که اندازه‌گیری طولهایی کمتر از آن امکان‌پذیر نیست.

در نظریه ریسمان اختلالی نیز نشان داده شده است که ریسمانها به عنوان عناصر بنیادی نظریه قادر به اندازه‌گیری و آشکار سازی فواصلی کمتر از طول خود نیستند [۶]. پس نظریه ریسمان نیز به نوعی وجود یک طول کمینه مشاهده‌پذیر را پیش‌بینی می‌کند. وجود این طولهای کمینه همگی ناشی از یک رابطه عدم قطعیت به صورت:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right) \quad (1)$$

است که در این نظریه‌ها ظاهر می‌شود. برای مثال این رابطه عدم قطعیت در آزمایشهای فکری که برای اندازه‌گیری افق رویداد یک سیاهچاله در نظر گرفته می‌شود، ظاهر می‌شود [۷].

یکی از خصوصیت‌های جالب توجهی که این رابطه عدم قطعیت نتیجه می‌دهد وجود یک طول کمینه  $\Delta x_0 = \hbar \sqrt{\beta}$  (طول ریسمان) است، که اندازه‌گیری طولهای کمتر از آن مطابق رابطه عدم قطعیت بالا امکان‌پذیر نیست. دیگر خصوصیت مهم آن ترکیب فرابنفش - مادون قرمز<sup>۲</sup> است، که در نظریه‌های ناجابه‌جایی و گرانش کوانتومی اتفاق می‌افتد. به‌طور شهودی می‌توان این پدیده را از رابطه عدم قطعیت بالا درک کرد: هنگامی که عدم قطعیت در تکانه بزرگ است (واگرایی فرابنفش) به دلیل جمله خطی متناسب با  $\Delta p$  در طرف راست رابطه (۱) برخلاف رابطه عدم قطعیت معمول هاینبرگ در مکانیک کوانتومی، عدم قطعیت در مکان نیز بزرگ می‌شود (واگرایی مادون قرمز).

پدیده ترکیب فرابنفش - مادون قرمز در نظریه ریسمان یک تفاوت آشکار بین نظریه ریسمان و یک نظریه میدان معمولی را نشان می‌دهد و آن عدم جایگزیدگی (موضعی نبودن) در نظریه ریسمان است. این پدیده همچنین باعث می‌شود ارتباطی بین

۱. Doubly Special Relativity

۲. UV-IR mixing

اختلال بر هامیلتونی اتم هیدروژن بررسی کنیم. با استفاده از رابطه (۶) قسمت پتانسیل عملگر هامیلتونی اتم هیدروژن را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\frac{1}{r_{ml}} \cong (1 - \beta \vec{p}^2)(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_r})^{-1} = (1 - \beta \vec{p}^2) \frac{1}{r}$$

در این رابطه  $r_{ml}$  عملگر مکان با فرض کمینه طول است و عملگر مکان در مکانیک کوانتومی معمول است که نمایش آن در فضای تکانه به صورت زیر است:

$$r = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_r}$$

از آنجا که عملگر تکانه با  $\beta$  تصحیح نمی‌شود قسمت جنبشی هامیلتونی تصحیحی پیدا نمی‌کند، پس یک پتانسیل اختلال با فرض کمینه طول برای اتم هیدروژن به دست می‌آوریم:

$$\delta V = \beta p^2 \frac{e^2}{r}$$

چون در مکانیک کوانتومی معمولی هستیم، محاسبه مقادیر چشمداشتی با استفاده از توابع موج در فضای مختصات امکان پذیر است. با محاسبه مقدار چشمداشتی پتانسیل اختلال جابه‌جایی انرژی را تا مرتبه اول  $\beta$  به دست می‌آوریم:

$$\Delta E_{nl} = \int_0^\infty r^2 e^{\gamma} \beta R_{nl}(r) (\beta \vec{p}^2 \frac{1}{r}) R_{nl}(r) dr$$

پس از محاسباتی مفصل خواهیم داشت:

$$\Delta E_{nl} = e^2 \beta \hbar^2 (R_{nl}(r))^2 \Big|_{r=0}^{r=\infty} + e^2 \beta \int_0^\infty r^2 \frac{R_{nl}(r)}{r} \vec{p}^2 R_{nl}(r)$$

جمله آخر در  $\Delta E_{nl}$  را با توجه به هامیلتونی اتم هیدروژن،

$$\vec{p}^2 = 2m\hat{H} + \frac{2me^2}{r}$$

محاسبه می‌کنیم. همچنین می‌دانیم که توابع موج شعاعی اتم هیدروژن از روی توابع لاگر ساخته می‌شوند و این توابع موج به ازای  $l=0$  در مبدأ صفر می‌شوند و مقدار همه آنها در بی‌نهایت صفر است پس:

$$\Delta E_{nl} = -e^2 \beta \hbar^2 \left( \frac{2}{na_0} \right)^2 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!} \left( L_{n-l-1}^{2l+1}(0) \right)^2 + 2me^2 \beta E_n \langle \frac{1}{r} \rangle_{nl} + 2me^4 \beta \langle \frac{1}{r^2} \rangle_{nl}$$

و با توجه به روابط زیر

(۲. ۱) اتم هیدروژن را با فرض کمینه طول مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## ۲. ۱. اتم هیدروژن با فرض کمینه طول

به دست آوردن طیف انرژی اتم هیدروژن به عنوان ساده‌ترین مسئله در مکانیک کوانتومی و مقایسه آن با مقادیر تجربی از مهمترین موفقیت‌های مکانیک کوانتومی بوده است. با این حال هیچگاه در فیزیک بین مقادیر آزمایشگاهی و مقادیر نظری توافق مطلق وجود ندارد. اکنون ما با استفاده از این عدم قطعیت می‌توانیم حدی بالا برای اعتبار فرض کمینه طول در مکانیک کوانتومی بیابیم. از این طریق در مرجع [۱۰] یک حد برای  $\beta$  به دست آورده‌اند و نشان داده‌اند که اثر فرض کمینه طول فشرده کردن ترازهای اتم هیدرون به سمت پایین است. در این قسمت از مقاله ما نتیجه‌ای متفاوت با مرجع [۱۰] و تا حدودی موید نتایج مرجع [۱۱] به دست می‌آوریم.

نمایش عملگرهای مختصات و تکانه به صورت عمل ضرب و دیفرانسیل‌گیری روی توابع موج در فضای تکانه به صورت زیر به دست آمده است [۹]:

$$\hat{p}_i \psi(p) = p_i \psi(p) \quad (5)$$

$$\hat{x}_i \psi(p) = i\hbar (1 + \beta \vec{p}^2) \frac{\partial}{\partial p_i} \psi(p) \quad (6)$$

این نکته را نیز باید خاطر نشان کرد که به دلیل وجود یک طول کمینه، مفهوم تابع موج در فضای مختصات در مکانیک کوانتومی با کمینه طول خوش تعریف نیست و ناچاریم در مکانیک کوانتومی با توابع موج در فضای تکانه کار کنیم.

با تعاریف بالا برای عملگرهای مختصات نمی‌توان معادله شرودینگر با جبر کمینه طول را برای اتم هیدروژن به طور تحلیلی و دقیق حل کرد. با این وجود می‌توان اثرات فرض کمینه طول را به صورت اختلالی در هامیلتونی اتم هیدروژن وارد کرد. از آنجا که مقدار پارامتر  $\beta$  در جبر رابطه عدم قطعیت

کمینه طول عدد بسیار کوچکی است و این پارامتر در تعریف عملگر مختصات به صورت خطی وارد شده است این امکان برای ما وجود دارد تا اتم هیدروژن را در فضای معمول در نظر بگیریم و اثر فرض کمینه طول را به صورت یک هامیلتونی

$$V_{stark} = -eE_z z + e\beta\hbar^2 \nabla^2 (E_z z) \\ = -eE_z z - eE_z z \bar{p}^2 - \hbar^2 eE_z \beta \frac{\partial}{\partial z} + e^2 \beta \bar{p}^2 \frac{1}{r}$$

که در آن جمله اول مربوط به اثر اشتراک در مکانیک کوانتومی معمول است، جمله‌های دوم و سوم ناشی از تغییر شکل یافتن عملگر  $z$  با فرض کمینه طول است و جمله آخر جمله‌ای است که از اثر اختلالی فرض کمینه طول بر هامیلتونی اتم هیدروژن به دست آوردیم. برای محاسبه جابه‌جایی انرژی تراز پایه تحت اختلال بالا مشاهده می‌کنیم که محاسبه مقدار چشمداشتی هر سه جمله اول شامل انتگرال:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Y_{l_1}^*(\Omega) Y_{l_2}(\Omega) Y_{l_3}(\Omega) d\Omega = 0$$

است، مقدار چشمداشتی جمله آخر را هم قبلاً حساب کردیم. به این ترتیب هیچ جابه‌جایی انرژی برای حالت پایه که متناسب با میدان الکتریکی باشد نمی‌یابیم. بنابراین تحت این اختلال، حکم کلی مبنی بر این که حالت‌های غیرتبهگن نمی‌توانند گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی داشته باشند، دست نخورده باقی می‌ماند. با این حال دیده می‌شود که هامیلتونی اختلال جدید با  $L_z$  (عملگر تکانه زاویه‌ای در راستای محور  $z$ ) جابه‌جا نمی‌شود و به این ترتیب اختلال جدید تمام حالت‌های تبهگن  $n=2$  در اتم هیدروژن را از هم جدا می‌کند، ولی به دلیل کوچک بودن  $\beta$ ، این جدا شدگی نسبت به اختلال  $-eE_z z$  کوچک است و ترازا کمی نسبت به یکدیگر جابه‌جایی پیدا می‌کنند (در مقایسه با شکافتگی در اثر اختلال معمول اشتراک  $-eE_z z$ ).

### ۳. مکانیک آماری با جبر عدم قطعیت کمینه طول

طرف راست رابطه عدم قطعیت کمینه طول (۲) را می‌توان به عنوان یک مقدار مؤثر برای ثابت پلانک که تابعی از تکانه است تعبیر کرد. در مکانیک آماری، سلول واحد فضای فاز را به شکل  $ah^3$  (  $a$  یک ثابت است و  $h$  ثابت پلانک) در نظر می‌گیرند در هر سلول از فضای فاز یک حالت کوانتومی قرار می‌گیرد. از این طریق چگالی حالت‌های فضای فاز را می‌یابند و بعد بقیه کمیته را محاسبه می‌کنند.

با تغییر در جابه‌جاگرهای اساسی مکانیک کوانتومی یکی از قضایای اساسی در مکانیک آماری که بر پایه صورتبندی

$$L_n^k(\circ) = \frac{(n+k)!}{n!k!}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad E_n = -\frac{mc^2 \alpha^2}{2n^2}$$

رابطه زیر را برای جابه‌جایی انرژی ترازهای اتم هیدروژن تا مرتبه اول  $\beta$  به دست می‌آوریم:

$$\Delta E_{nl} = \frac{4}{3} \beta m E_n^2 \left( -1 + \frac{4n(1-(2l+1)\delta_{l0})}{2l+1} \right). \quad (7)$$

در مرجع [۱۲] با دقت  $1/8 \times 10^{-14}$  انرژی گذار  $1S - 2S$  را به دست آورده‌اند. ما این فرض را در نظر می‌گیریم که تصحیح ترازهای انرژی توسط پتانسیل اختلالی مربوط به اثر کمینه طول که توسط رابطه (۷) داده می‌شود از عدم قطعیت‌هایی که در اندازه‌گیری تجربی ترازهای انرژی وجود دارد کوچکتر است و اثر پتانسیل اختلالی همیشه به علت محدودیت‌های تجربی اندازه‌گیری پنهان می‌ماند. با استفاده از این روش و مقدار تجربی که در بالا ذکر کردیم می‌توانیم یک حد بالا برای  $\beta$  به دست آوریم. با قرار دادن مقادیر در رابطه (۷) به ازای  $n=1$  و  $l=0$  حد زیر را برای طول معادل با  $\beta$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta E_{10}}{E_{10}} = \frac{-\frac{4}{3} \beta m E_{10}^2}{E_{10}} \quad (8)$$

$$\hbar \sqrt{\beta} \leq 5/0.8 \times 10^{-16} m$$

مرتبه  $\beta$  با مقداری که از طریق بررسی نوسانگر هماهنگ با فرض کمینه طول به دست آمده است [۱۳]، همخوانی دارد. همچنین این مقدار مطابق با مقداری است که در مرجع [۱۱] با روشی دیگر به دست آمده است.

در مورد اتم هیدروژن محاسبه اختلالی اثر کمینه طول بر روی پدیده اشتراک نیز می‌تواند جالب توجه باشد. پتانسیل اختلالی اثر اشتراک در مکانیک کوانتومی معمول با:

$$V_{stark} = -eE_z z$$

داده می‌شود که در آن  $E_z$  مولفه میدان الکتریکی در راستای محور اختیاری  $z$  است. چون عملگر  $z$  با فرض کمینه طول به صورت زیر تغییر یافته است:

$$z = i\hbar(1 + \beta \bar{p}^2) \frac{\partial}{\partial p_z}$$

پتانسیل اختلالی برای اثر اشتراک به صورت زیر در می‌آید:

ناشی از فرض کمینه طول بر انرژی فرمی یک گاز فرمیونی  $N$  ذره‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{\Lambda \pi V}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 dp \quad (10)$$

جمله تصحیحی ناشی از فرض کمینه طول:

$$N = \frac{\Lambda \pi V}{h^3} \int_0^{p_f} \frac{p^2}{(1 + \beta p^2)^2} dp \approx \frac{\Lambda \pi V}{h^3} \left( \frac{1}{3} p_f^3 - \frac{2}{5} \beta p_f^5 \right)$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$p_f \approx p_{f_0} + \frac{2}{5} \beta p_{f_0}^3, \quad p_{f_0} = \left( \frac{3n}{\Lambda \pi} \right)^{\frac{1}{3}} h$$

که در آن  $p_{f_0}$  اندازه حرکت فرمی در حالت عادی ( $\beta=0$ ) است. با  $\beta \approx O(10^{-16})$  تصحیح در انرژی فرمی و تکانه فرمی ذره در یک گاز فرمیونی بسیار کوچک است و ما این تصحیح را در نظر نمی‌گیریم. انرژی نسبی و سرعت نسبی یک ذره با روابط زیر به دست می‌آید:

$$u = \frac{d\varepsilon}{dp}, \quad \varepsilon = mc^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right]$$

پس می‌توانیم مجموع انرژی جنبشی یک گاز فرمیونی (کوتوله سفید) و فشار ( $P$ ) آن را با استفاده از رابطه (۹) به دست آوریم:

$$E = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{\Lambda \pi V}{h^3} mc^2 \int_0^{p_f} \frac{p^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right)}{(1 + \beta p^2)^2} dp \quad (11)$$

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle pu \rangle = \frac{\Lambda \pi}{3 h^3} mc^2 \int_0^{p_f} \frac{\left( \frac{p}{mc} \right)^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{p}{mc} \right)^2}} \frac{p^2 dp}{(1 + \beta p^2)^2} \quad (12)$$

مرسوم است که انرژی جنبشی و فشار گاز فرمی را به صورت توابعی از تکانه فرمی نشان دهند. با تعریف کمیت‌های بدون بعد زیر:

$$x = \frac{p_f}{mc}, \quad x_0 = \frac{p_{f_0}}{mc}$$

خواهیم داشت:

همیلتونی مکانیک کلاسیک بیان می‌شود نیز دستخوش تغییر می‌شود. قضیه لیوویل در مکانیک آماری بیان‌کننده این واقعیت است که عنصر حجم فضای فاز ( $d^3 \bar{x} d^3 \bar{p}$ ) با تحول زمانی سیستم (که با همیلتونی مشخص می‌شود) ناورد است. با جابه‌جاگرهای اساسی که برای مکانیک کوانتومی با فرض کمینه طول به دست می‌آید در [۱۴] نشان داده‌اند که اگر عنصر حجم فضای فاز را به صورت زیر تصحیح کنیم

$$\frac{1}{(1 + \beta \bar{p}^2)^2} d^3 \bar{x} d^3 \bar{p} \quad (9)$$

قضیه لیوویل صادق باقی می‌ماند. این رابطه به این معناست که در هر سلول  $ah^3 (1 + \beta \bar{p}^2)^2$  یک حالت کوانتومی قرار می‌گیرد، ولی اندازه سلولها با تغییر در تکانه ذرات متغیر است، به خصوص رابطه (۹) نشان می‌دهد که در تکانه‌های بزرگ عامل  $\frac{1}{(1 + \beta \bar{p}^2)^2}$  مانع واگرایی انتگرالی می‌شود که بر روی تمام فضای فاز گرفته می‌شوند.

### ۳.۱. تصحیح در جرم کوتوله سفید

به عنوان یک نتیجه از تغییر در قضیه لیوویل در این قسمت محاسباتی را که برای به دست آوردن جرم حدی کوتوله‌های سفید انجام می‌گیرد را با عنصر جدید حجم فضای فاز انجام می‌دهیم.

یک مدل ساده برای کوتوله سفید، جرمی از مرتبه  $10^{23} \text{ gr}$  هلیوم در کره‌ای با چگالی  $10^7 \text{ gr/cm}^3$  در دمای  $10^7 \text{ K}$  است. در چنین دمایی انرژی بر ذره به گونه‌ای است که هلیوم را یونیده می‌کند. بنابراین از لحاظ ماکروسکوپی ستاره شامل  $N$  الکترون به جرم  $m$  و  $\frac{N}{4}$  هسته هلیوم به جرم  $4m_p$  است و جرم چنین توده‌ای برابر است با:

$$M = N(m + 4m_p) \approx 4Nm_p$$

و چگالی الکترونها در این کره  $n = \frac{N}{V}$ ، یا

$$n = \frac{M / 4m_p}{M / \rho} = \frac{\rho}{4m_p}$$

است ( $\rho$  چگالی حجمی است). مرتبه تعداد الکترونها در یک کوتوله سفید،  $10^{30}$  در یک سانتی‌متر مکعب است [۱۵]. تصحیح

به دست می‌آید! منفی شدن طرف راست رابطه بالا به خاطر منفی شدن فشار در حد  $x \rightarrow \infty$  است. باید دید که آیا سیستم به حالتی می‌رسد که با معادله حالت (۱۵) داده می‌شود.

اکنون با یک محاسبه نه چندان دقیق حالت تعادل این مدل برای کوتوله سفید را به دست می‌آوریم. برای این که پیکربندی گاز فرمیونی ما با چگالی  $n$  تشکیل شود نیاز به یک دیواره خارجی داریم تا فشار  $P(n)$  را تحمل کند. با فشرده شدن یا منبسط شدن سیستم گازی بر روی سیستم کار انجام می‌شود یا یک کره محبوس باشد، یک تغییر بی‌دررو در حجم  $V$  باعث تغییر در انرژی گاز می‌شود.

$$dE_p = P(n)dV = -P(R)4\pi R^2 dR.$$

در یک کوتوله سفید نیروی گرانشی نقش دیواره نگه‌دارنده را بازی می‌کند و تغییر در انرژی گرانشی ناشی از تغییر حجم با:

$$dE_g = \left( \frac{dE_g}{dR} \right) dR = \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR,$$

داده می‌شود. که در آن  $M$  جرم کل گاز  $G$  ثابت گرانش و  $\alpha$  عددی (از مرتبه یک) است که مقدار آن از تغییرات فضایی چگالی  $n$  در داخل کره ناشی می‌شود. در حالت تعادل پیکربندی داریم:

$$dE_g + dE_p = 0 \Rightarrow P(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (16)$$

به این ترتیب یک رابطه بین شعاع و جرم کوتوله سفید (ستاره‌ای شامل فرمیونها) در حالت تعادل آن داریم. تابع  $P(x)$  در رابطه (۱۴) داده شده است، رابطه بین  $x$  و  $R$  را هم با تعاریف داده شده در ابتدای این بخش (و با فرض اینکه تصحیح  $\beta$  روی اندازه حرکت فرمی بسیار کوچک است  $(x \approx x_0)$ ) به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$x = \left( \frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{mcR}$$

با توجه به مقادیر زیر برای ستاره و جرم پروتون و طول موج کامپتون الکترون:

$$E(x) = \frac{\pi V m^{\frac{4}{3}} c^{\frac{5}{3}}}{3\hbar^2} B(x) - \frac{\pi V m^{\frac{4}{3}} c^{\frac{5}{3}}}{10\hbar^2} \beta D(x) \quad (13)$$

$$P(x) = \frac{\pi m^{\frac{4}{3}} c^{\frac{5}{3}}}{3\hbar^2} A(x) - \frac{\pi m^{\frac{4}{3}} c^{\frac{5}{3}}}{\hbar^2} \beta F(x) \quad (14)$$

توابع  $A(x)$  و  $B(x)$  توابع چاندراسخار<sup>۱</sup> هستند که توسط وی برای بررسی مکانیک آماری کوتوله‌های سفید به دست آمده‌اند [۱۶]. ولی تابعهای  $D(x)$  و  $F(x)$  را ما از تصحیح روی چگالی حالت‌های فضای فاز به دست آورده‌ایم که این توابع را در زیر می‌نویسیم.

$$A(x) = x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(2x^2-3) + 3\text{Sin}h^{-1}x$$

$$B(x) = 8x^2 \left\{ \sqrt{x^2+1} - 1 \right\} - A(x)$$

$$D(x) = 5A(x) - 8x^5(6+5\sqrt{1+x^2})$$

$$F(x) = 8x^5\sqrt{1+x^2} - 5A(x)$$

از معادلات (۱۳) و (۱۴) می‌توان معادله حالت سیستم را به صورت تابعی از تکانه فرمی ذرات به دست آورد. توجه خود را به دو حالت زیر معطوف می‌کنیم:

۱- وقتی  $\beta \rightarrow 0$ . در حالت حدی  $x \rightarrow 0$  که حالت غیر نسبیتی سیستم است، نسبت فشار به چگالی انرژی  $\left( \frac{E}{V} \right)$  به سمت مقدار غیرنسبیتی  $\frac{2}{3}$  میل می‌کند. ما نیز این نسبت را از روی حالت حدی توابع  $A(x)$ ،  $B(x)$  و  $D(x)$ ، مقدار  $F(x)$   $\frac{2}{3}$  به دست می‌آوریم.

۲- اما در حالت نسبیتی  $x \rightarrow \infty$ ، رفتار چهار تابع فوق به صورت زیر است:

$$A(x) \approx 2x^4, \quad B(x) \approx 6x^4, \quad D(x) \approx -4x^6, \quad F(x) = 8x^6$$

و برای نسبت فشار به چگالی انرژی به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{E(x)/V} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 24m^2c^2\beta x^6}{6x^4 + 12m^2c^2\beta x^6} = -2$$

می‌بینیم که به جای معادله حالت گاز فرمیونی نسبیتی که

$$\text{به صورت } PV = \frac{1}{3}E \text{ است، (وقتی } \beta = 0 \text{)، معادله حالت:}$$

$$PV = -2E \quad (15)$$

۱. Chandrasekhar

با استفاده از این جابه‌جاگرهای اساسی، می‌توان مکانیک کوانتومی جدیدی ساخت که در آن اصل عدم قطعیت به گونه‌ای تصحیح شده است که یک مقدار کمینه غیر صفر برای اندازه‌گیری تکانه می‌دهد. واضح است که توابع موج برای فضای تکانه این مکانیک کوانتومی خوش‌تعریف نیستند زیرا این امکان وجود ندارد تا حالتی بسازیم که عدم قطعیت در اندازه‌گیری تکانه آن صفر باشد.

ما به بررسی این مکانیک کوانتومی نخواهیم پرداخت. در مقابل ما بر پایه این جابه‌جاگرها از عکس روش کوانتس دیراک کروشه پواسونهای زیر را می‌سازیم و تلاش می‌کنیم تا با استفاده از این حد نیمه کلاسیکی مقداری برای پارامتری که این جبر جدید را مشخص می‌کند بیابیم:

$$\{x_i, p_j\} = (1 + \alpha \bar{x}^2) \delta_{ij},$$

$$\{x_i, x_j\} = 0,$$

$$\{p_i, p_j\} = -2\alpha (x_i p_j - x_j p_i).$$

در مرجع [۱۹] با استفاده از رهیافت مشابهی از مکانیک کلاسیک براساس روابط عدم قطعیت کمینه طول توانسته‌اند مقداری برای کمیت  $\beta$  (پارامتری که جبر عدم قطعیت کمینه طول را مشخص می‌کند) بیابند.

با جبر کمینه تکانه که در بالا تعریف شد تعریف کروشه پواسون برای ارضای شرایط چهارگانه (پاد تقارنی، خطی بودن، اتحاد لایب نیتز و اتحاد ژاکوبی) به صورت

$$\{A, B\} = \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right),$$

$$\{x_i, p_j\} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \{p_i, p_j\},$$

تعمیم می‌یابد. در پیوست ثابت می‌کنیم که مولدهای چرخش برای جبر جدیدمان با

$$L_{ij} = \frac{x_i p_j - x_j p_i}{1 + \alpha \bar{x}^2},$$

داده می‌شود. اکنون معادلات حرکت ذره در پتانسیل نیروی مرکزی را که با هامیلتونی

$M \approx 1.33 \text{ gr}$ ،  $m_p \approx 1.0^{-24} \text{ gr}$ ،  $\frac{\hbar}{mc} \approx 1.0^{-11} \text{ cm}$ ، از مرتبه یک خواهد بود اگر  $R \approx 1.0^8 \text{ cm}$  باشد. پس اگر  $R \ll 1.0^8 \text{ cm}$  باشد، خواهیم داشت  $\langle x \rangle$  از مقادیر حدی  $A(x)$  و  $F(x)$  و معادله (۱۶) رابطه زیر را برای جرم و شعاع یک کوتوله سفید به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi m^2 c^5}{2\hbar^3} (2x^4 - 2x^2) - \frac{\pi m^2 c^4}{\hbar^3} \beta (\lambda x^6 - 1.0 \cdot x^4 + 1.0 \cdot x^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{GM^2}{R^2}.$$

از این معادله می‌توان یک حد مانند حد چاندراسخار برای جرم کوتوله‌های سفید به دست آورد. به عبارت دیگر حد چاندراسخار با  $\beta$  تصحیح کرد. با این وجود با فرض بزرگترین مقدار برای  $\beta$  یعنی مقداری که در رابطه (۸) به دست آوردیم جمله دوم کوچک است و تصحیح روی حد چاندراسخار کوچکتر از یکصدم جرم خورشید است.

در نهایت این که ما مقدار فشار به ازای  $x$  معادل با شعاع حدی یک کوتوله سفید را محاسبه کردیم و مقدار فشار را مثبت به دست آوردیم. بنابراین معادله حالت (۱۵) مربوط به شعاعهای بیشتر از شعاع حدی است و قبل از آن که این معادله حالت برقرار شود ستاره رمبش کرده است. به عبارت دیگر چون در حد  $x \rightarrow 1^-$  توابع  $A(x)$  و  $F(x)$  از نظر اندازه از مرتبه یک‌اند و چون ضریب  $A(x)$  از ضریب  $F(x)$  در معادله فشار بسیار بزرگتر است، مقدار فشار تا قبل از رمبش ستاره مثبت است.

#### ۴. مکانیک کلاسیک کمینه تکانه

##### ۴.۱. مطالعه انحرافات مدار سیارات از مسئله کپلر با مکانیک کلاسیک کمینه تکانه

شکل دیگری از روابط جابه‌جاگری تغییر شکل یافته وجود دارد که در متون مربوط به مکانیک کوانتومی در فضای خمیده ظاهر می‌شوند و یک مقدار کمینه برای تکانه نتیجه می‌دهند. یک نوع اختلالی آنها شبیه به روابط عدم قطعیت کمینه طول به صورت زیر است:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar (1 + \alpha \hat{x}^2) \delta_{ij}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = -2i\hbar\alpha (\hat{x}_i \hat{p}_j - \hat{x}_j \hat{p}_i).$$

$$\Delta\varphi^{(1)} = \frac{\pi\alpha}{2} \sqrt{\frac{-2E}{m}} \frac{kL}{E^2}$$

در اینجا فرض زیر را به کار می‌گیریم:

$$\Delta\varphi^{(1)} \leq |\Delta\varphi_{obs} - \Delta\varphi_{GR}|,$$

که به معنای این است که آنچه از حرکت تقدیمی سیاره را که نظریه نسبیت عام قادر به پیش بینی آن نیست، ما با فرض جدیدمان (مکانیک کلاسیک با فرض کمینه تکانه) توضیح می‌دهیم. به بیان دیگر پارامتری که مکانیک کلاسیک کمینه طول را مشخص می‌کند به قدری کوچک است که  $\Delta\varphi$  ناشی از آن برای یک سیاره در منظومه شمسی از مقداری که مشاهده شده و مقداری که نظریه نسبیت عام پیش‌بینی می‌کند کمتر است. با این فرض و با استفاده از داده‌هایی که برای داخلیترین مدار سیاره‌ای در منظومه شمسی وجود دارد، یک حد بالا برای  $\alpha$  به دست می‌آوریم:

$$\Delta\varphi^{(1)} = 2/0.6 \times 10^{22} \alpha \Rightarrow \alpha = 3/6 \times 10^{-23} m^{-2}$$

#### ۲.۴. تصحیح قانون سوم کپلر

همچنین می‌توانیم انحراف از قانون سوم کپلر در اثر روابط کمینه تکانه را به دست آوریم. در مرجع [۲۰] تصحیح قانون سوم کپلر ناشی از روابط عدم قطعیت کمینه طول به کار گرفته شده است تا با استفاده از آن شکل منحنی چرخنده گازهای بین ستاره‌ای و ستاره‌ها در کهکشانهای مارپیچی را توضیح دهند. با تعمیم روش به کار گرفته شده در مرجع [۲۰]، به حالت کمینه تکانه در ادامه تصحیح قانون سوم کپلر را با فرض کمینه تکانه، به دست می‌آوریم.

برای حرکت در یک مدار دایره‌ای با دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

خواهیم داشت:

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{L^2}{r^2} (1 + \alpha r^2)^2,$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{L}{mr^2} (1 + \alpha r^2)^2,$$

$$\dot{p}_r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{p_i x_i}{r} \right) = 0 \Rightarrow mr \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{L^2}{r^2},$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r), \quad r = \sqrt{x_i x_i},$$

توصیف می‌شود به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = (1 + \alpha \vec{x}^2) \frac{p_i}{m},$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -(1 + \alpha \vec{x}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} + 2\alpha L_{ij} \frac{p_j}{m} \right).$$

$L^2$  و  $L_{ij}$  ثابت حرکت‌اند، بنابراین حرکت ذره به حرکت در یک صفحه محدود می‌شود. با استفاده از روابط

$$L^2 = \frac{1}{2} L_{ij} L_{ij} = \frac{\vec{r}^2 \vec{p}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{(1 + \alpha \vec{r}^2)},$$

$$r p_r = \vec{r} \cdot \vec{p} = \sqrt{\vec{r}^2 \vec{p}^2 - L^2 (1 + \alpha \vec{r}^2)},$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{x_2}{x_1} \right),$$

معادلات حرکت در دستگاه قطبی را به دست می‌آوریم:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} (1 + \alpha r^2)^2,$$

$$\dot{r} = \frac{1 + \alpha r^2}{m} \sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2} (1 + \alpha r^2)^2}.$$

بنابراین معادله دیفرانسیل مسیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L(1 + \alpha r^2)}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2} (1 + \alpha r^2)^2}}.$$

با پتانسیل کولمب ( $-k$ ) اختلالی که با پارامتر  $\alpha$  مشخص می‌شود، مدار بسته غیر اختلالی با معادله

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} (1 + e \cos \varphi), \quad \frac{1}{R} = \frac{mk}{L^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}},$$

را تبدیل به یک مدار باز می‌کند که نقطه حضیض آن در هر دور به اندازه

$$\Delta\varphi^{(1)} = 2\pi\alpha \frac{\partial}{\partial L} \left( \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r^2 (E + \frac{k}{r})}{\sqrt{2m(E + \frac{k}{r}) - \frac{L^2}{r^2}}} dr \right),$$

حرکت تقدیمی دارد. با قرار دادن معادله مسیر غیر اختلالی در

انتگرال بالا،  $\Delta\varphi$  را به صورت زیر می‌یابیم:



جدول ۱. مقایسه مقادیر تجربی انحراف از قانون سوم کپلر، با کار حاضر برای سیارات منظومه شمسی

سیاره	مشاهده $\left( \frac{r^3}{T^2} \frac{4\pi^2}{GM(r)} - 1 \right)$	پیش‌بینی توسط $\left( \frac{GM}{4\pi^2} \alpha r^2 \right)$
ناهید	$-1 \times 10^{-6}$	$1/7 \times 10^{-10}$
زمین	$3 \times 10^{-6}$	$3/3 \times 10^{-10}$
مریخ	$-6 \times 10^{-5}$	$7/6 \times 10^{-11}$
مشتری	$1 \times 10^{-3}$	$8/9 \times 10^{-9}$
کیوان	$4 \times 10^{-4}$	$3/0 \times 10^{-8}$
اورانوس	$1 \times 10^{-3}$	$1/2 \times 10^{-7}$
نپتون	$1 \times 10^{-3}$	$3/0 \times 10^{-7}$

منحنی صاف برای چرخش ستاره‌ها با افزایش فاصله از مرکز دیده شده است:

$$v = \text{const} \Rightarrow M(r) \propto r$$

نظریه‌های مختلفی برای توجیه این موضوع ارائه شده است (مثل نظریه ماده تاریک). یکی از این ایده‌ها نظریه پدیده‌شناسی موند<sup>۱</sup> است [۱۸] که توسط میلگروم<sup>۲</sup> و دیگران با مطالعه روی داده‌های اخترشناسی ارائه شد. اساس این نظریه بیان می‌کند که قانون دوم نیوتن در شتابهای کم به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$F \approx m \frac{|\ddot{x}|}{a_0} \ddot{x}, (\ddot{x} \ll a_0 \approx 10^{-10} \text{ (m/s}^2\text{)})$$

از آنجا که مکانیک کلاسیکی که ما در این تحقیق به دست آوردیم به نوعی قانون سوم کپلر را تصحیح می‌کند، پیدا کردن ارتباط بین این تقریب نیمه کلاسیکی و نظریه پدیده‌شناسی موند می‌تواند زمینه تحقیقات بعدی در این راستا باشد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق ما به بررسی جنبه‌های نیمه کلاسیکی روابط عدم قطعیت کمینه طول و کمینه تکانه پرداختیم. هدف ما یافتن آثاری مشاهده‌پذیر از این روابط بود. روابط جابه‌جاگری تعمیم

و به این ترتیب قانون سوم کپلر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$mr^2 \omega^2 = (1 + \alpha r^2)^4 mr \frac{\partial V}{\partial r},$$

و تا تقریب مرتبه اول  $\alpha$  داریم:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} (1 + 4\alpha r^2).$$

می‌بینیم که میزان انحراف با افزایش شعاع مدار افزایش می‌یابد. در جدول ۱ انحرافها را برای مدار سیارات منظومه شمسی محاسبه کرده‌ایم و آن را با مقادیر تجربی مقایسه کرده‌ایم.

با مقایسه مقادیر در جدول ۱، دیده می‌شود که این اثر کوچکتر از آن است که با مشاهدات در منظومه شمسی قابل تأیید باشد و انحرافی که ما در اینجا از قانون سوم کپلر پیش‌بینی کردیم توسط اثرهای دیگر (مثل تأثیر متقابل سیارات بر مدار یکدیگر) پوشیده می‌شود. با این حال ما یک پیشنهاد برای کاربرد این مکانیک کلاسیک تصحیح شده و نظریه‌های کلاسیکی نظایران را در زیر ارائه می‌دهیم [۱۷].

$v$  سرعت چرخشی یک ستاره در فاصله از مرکز یک کهکشان مارپیچی به صورت  $v \propto r^{-\frac{1}{2}}$  است، که شکلی دیگر از قانون سوم کپلر است. به این قانون برای چرخش، چرخش کپلری می‌گویند.

اما چرخش کپلری در کهکشانهای مارپیچی دیده نشده بلکه یک

۱. MOND (Modified Newtonian Dynamics)

۲. Milgrom

$$\{x_k, L_{ij}\} = x_i \delta_{kj} - x_j \delta_{ki} \quad (\text{پ-۴})$$

همچنین برای تکانه‌ها داریم:

$$\{p_k, L_{ij}\} = \{p_k, x_i\} \frac{p_j}{1 + \alpha \bar{x}^2} + \{p_k, \frac{p_j}{1 + \alpha \bar{x}^2}\} x_i - (i \leftrightarrow j)$$

اتحاد لایب‌نیتز،

با استفاده از (پ-۳) برای جملات اول و سوم:

$$\{p_k, L_{ij}\} = -p_j \delta_{ki} + \{p_k, p_j\} \frac{x_i}{1 + \alpha \bar{x}^2} + \{p_k, \frac{1}{1 + \alpha \bar{x}^2}\} x_i p_j - (i \leftrightarrow j)$$

با استفاده از:

$$\{p_i, p_j\} = -2\alpha(x_i p_j - x_j p_i) \quad (\text{پ-۵})$$

برای جملات دوم و پنجم و تعریف گروه پواسون برای جملات سوم و ششم خواهیم داشت:

$$\{p_k, L_{ij}\} = -p_j \delta_{ki} + p_i \delta_{kj} - 2\alpha(x_j L_{ki} - x_i L_{kj}) - 2\alpha \frac{x_k L_{ij}}{1 + \alpha \bar{x}^2},$$

و اگر جمله آخر را تا مرتبه اول بسط دهیم:

$$\{p_k, L_{ij}\} = p_i \delta_{kj} - p_j \delta_{ki} - 2\alpha(x_j L_{ki} - x_i L_{kj}) - 2\alpha x_k L_{ij} + O(\alpha^2)$$

و در نهایت:

$$\{p_k, L_{ij}\} = p_i \delta_{kj} - p_j \delta_{ki} - 2\alpha x_k (L_{ij} + L_{ji}) + O(\alpha^2),$$

$$\{p_k, L_{ij}\} = p_i \delta_{kj} - p_j \delta_{ki} + O(\alpha^2). \quad (\text{پ-۶})$$

به این ترتیب با توجه به روابط (پ-۴) و (پ-۶) دیده می‌شود که مولدهای تعریف شده در (پ-۱) تا مرتبه اول پارامتر تغییر شکل دهنده گروه‌ها مولدهای چرخش هستند.

یافته در اصل نتایجی از نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی هستند که هنوز امکان تجربی برای تحقیق آنها وجود ندارد. از این طریق ما با استفاده از بررسی اثر فرض کمینه طول بر روی ترازهای اتم هیدروژن و داده‌های تجربی، یک حد بالا برای طول کمینه به دست آوردیم. ما همچنین با استفاده از مکانیک آماری با کمینه طول، معادله چاندراسخار برای جرم حدی کوتوله‌های سفید را تصحیح کردیم و در نهایت با استفاده از مکانیک کلاسیک کمینه تکانه، حدی برای کمینه تکانه یافتیم و اثر کمینه تکانه بر قانون سوم کپلر را به دست آوردیم.

### پیوست

ثابت می‌کنیم که در مکانیک کلاسیک با کمینه تکانه، مولدهای چرخش به صورت زیر هستند:

$$L_{ij} = \frac{x_i p_j - x_j p_i}{1 + \alpha \bar{x}^2} \quad (\text{پ-۱})$$

داریم:

$$\{x_k, L_{ij}\} = \{x_k, x_i\} \frac{p_j}{1 + \alpha \bar{x}^2} + \{x_k, \frac{p_j}{1 + \alpha \bar{x}^2}\} x_i - (i \leftrightarrow j)$$

جملات اول و سوم به دلیل اتحاد لایب‌نیتز،

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad (\text{پ-۲})$$

حذف می‌شوند پس

$$\{x_k, L_{ij}\} = \{x_k, p_j\} \frac{x_i}{1 + \alpha \bar{x}^2} + \{x_k, \frac{1}{1 + \alpha \bar{x}^2}\} p_j x_i - (i \leftrightarrow j).$$

جملات دوم و چهارم باز به دلیل (پ-۲) صفر می‌شوند. از گروه اساسی:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} (1 + \alpha \bar{x}^2) \quad (\text{پ-۳})$$

خواهیم داشت:

### مراجع

7. M Maggiore, *Phys. Lett. B* **304** (1993).
8. M Maggiore, *Phys. Lett. B* **319** (1993)83-86; hep-th/9309034.
9. A Kempf, G Mangano and R B Mann, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1108-1118; hep-th/9412167
10. F Brau, *J. Phys. A* **32** (1999) 7691-7696; quant-ph/9905033.
11. R Akhoury and Y P Yao, *Phys. Lett. B* **572**(2003)37-42 hep-ph/ 0302108.
1. G Amelino-Camelia, *physics/0311037* (2003).
2. G Amelino-Camelia, T Piran, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 03600; astro-ph/0008107.
3. G Amelino-Camelia, *Nature*, **408** (2000) 661.
4. G Amelino-Camelia, *Int. J. Mod. Phys. D* **11** (2002)35; gr-qc/0012051.
5. G Amelino-Camelia, *Nature*, **418** (2002); gr-qc/0207049.
6. D J Gross and P F Mende, *Nucl. Phys. B* **303** (1988) 407.

18. E Battaner, E Florido, *Fund. Cosmic Phys.* **21** (2000) 1-154; astro-ph/0010474.
  19. S Benczik, et al., *Phys. Rev. D* **66** (2002) 026003; hep-th (2002).
  20. S Benczik, et al., hep-th/0209119 (2002).
  12. M Niering, et al., *Phys. Rev. Lett* **84** (2000) 5496.
  13. L N Chang, et al, *Phys. Rev. D.* **65** (2002) 125027; hep-th/0111181.
  14. L N Chang, et al., *Phys. Rev. D* **65** (2002) 125028; hep-th/0201017.
  15. R K Pathria, “*Statistical Mechanics*” Oxford England: Pergamon Press (1988).
  16. S Chandrasekhar, “*Introduction to the Study of Stellar Structure*” University of Chicago Press, Chicago (1939).
۱۷. مهدی دهقانی، “مطالعه نیمه کلاسیکی...”، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۸۲).