

جریان آرام و تناوبی شاره در اطراف استوانه

مجید ملکی، دارا فتوحی
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

دریافت نسخه نهایی: ۲۰ دی ۱۳۷۴

تاریخ دریافت: ۲۰ خرداد ۱۳۷۴

چکیده

جریان آرام و تراکم‌ناپذیر شاره در اطراف استوانه به روش عددی حل شده است. در این بررسی، عدد رینولدز از ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ تغییر می‌کند و طیف وسیعی از جریان شاره را دربر می‌گیرد. جریان خزشی ($Re < 1$)، جریان توام با گردابه‌های پایدار و متقارن ($1 \leq Re \leq 40$) و جریان توام با گردابه‌های متناوب ($Re > 40$) در گستره این بررسی قرار دارند. در این مقاله تصاویری از گردابه‌های متناوب، نوسان ضرایب نیروی مقاومت و بالابر و نوسان نقطه جدایی جریان ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که بسامد نوسانها به عدد رینولدز بستگی دارد و با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد. رابطه‌ای برای عدد استروهل^۱ ارائه شده است که از آن می‌توان برای محاسبه بسامد نوسانها در گستره $1000 \leq Re < 40$ استفاده کرد.

فهرست نمادها

$f(\gamma R)/u_\infty$: عدد استروهل؛ St	C_D : ضریب نیروی مقاومت: $F_D/\rho u_\infty^2 R$
t : زمان بی‌بعد: $\tau u_\infty / R$	\bar{C}_D : میانگین ضریب نیروی مقاومت: $(C_{D,max} + C_{D,min})/2$
u : سرعت محیطی	$C_{D,P}$: مولفه فشاری C_D
U : سرعت محیطی بی‌بعد: u/u_∞	$C_{D,T}$: مولفه برشی C_D
u_∞ : سرعت شاره دور دست	C_L : ضریب نیروی بالابر: $F_L/\rho u_\infty^2 R$
v : سرعت شعاعی	$C_{L,P}$: مولفه فشاری C_L
V : سرعت شعاعی بی‌بعد: v/u_∞	$C_{L,T}$: مولفه برشی C_L
فهرست نمادهای یونانی	C_p : ضریب فشار: $(p-p_s)/(0.5\rho u_\infty^2) + 1$
∇^2 : عملگر لاپلاسی	$C_{p,s}$: ضریب فشار در نقطه سکون: $(p_s-p_\infty)/(0.5\rho u_\infty^2)$
θ : مختصه محیطی، $\theta = 0$ نقطه سکون در جلو	f : بسامد نوسانها، دور بر ثانیه
θ_s : زاویه جدایی جریان	F_D : نیروی مقاومت
θ_s : میانگین θ_s	F_L : نیروی بالابر
μ : چسبندگی شاره	p : فشار شاره
ν : چسبندگی سینماتیکی شاره، μ/ρ	P : فشار بی‌بعد: $p/\rho u_\infty^2$
ρ : چگالی شاره	p_s : فشار در نقطه سکون
τ : زمان	p_∞ : فشار شاره دور دست
τ_w : تنش برشی دیواره	τ : مختصه شعاعی

R : مختصه شعاعی بی‌بعد τ/R ، شعاع استوانه

Re : عدد رینولدز: $u_\infty (\gamma R)/\nu$

۱- مقدمه

در این مقاله، جریان شماره چسبناک در اطراف استوانه توصیف شده است. این بررسی به جریان آرام و تراکم‌ناپذیر محدود می‌شود و عدد رینولدز Re از ۱۰ تا ۱۰۰۰ تغییر می‌کند. مطالعه در زمینه جریان شماره در اطراف استوانه سابقه‌ای دیرینه دارد. یکی از پژوهش‌های اولیه در این زمینه توسط پین [۱] انجام شده که در آن ضریب نیروی مقاومت برای عدد رینولدز ۴۰ و ۱۰۰ ارائه شده است. با آنکه مطالعات بعدی نشان داده است که هرگاه عدد رینولدز از ۴۰ فراتر رود گردابه‌های متناوب کارمن^۱ در پشت استوانه پدید می‌آید. در بررسی پین اثری از حرکات نوسانی و متناوب به چشم نمی‌خورد.

یکی از دقیقترین پژوهش‌های انجام شده، بررسی‌های تجربی ترایتون [۲] است. ترایتون نیز مطالعات خود را به $150 < Re < 500$ محدود کرده و نیروی مقاومت شماره را از طریق مشاهده و اندازه‌گیری خمش یک تار از جنس کوارتز، به قطر $100 \mu - 200 \mu$ و طول $3 \text{ cm} - 1 \text{ cm}$ ، که به عنوان یک استوانه در آزمایش‌های او به کار رفته به دست آورده است. کوشش‌های دیگری که در این زمینه صورت گرفته نتایجی است که در مراجع [۳ تا ۲۰] به چشم می‌خورد.

هدف عمده پژوهش‌های گذشته یافتن اطلاعاتی در زمینه گردابه‌های پشت استوانه، نیروی مقاومت و بالابر، تغییرات فشار شماره، تنش برشی روی دیواره، محل جدایی جریان و آثار ناشی از نوسانهای متناوب گردابه‌ها در این پارامترهاست. برخی پژوهشگران به مسئله انتقال گرما در این گونه جریانها نیز پرداخته‌اند. پروژه حاضر دامنه بررسی‌های پیشین را به $1000 \leq Re \leq 10000$ گسترش می‌دهد. به نظر نمی‌رسد که

جریان شماره در اطراف استوانه در گستره $1000 \leq Re \leq 10000$ در یک بررسی واحد مورد تحقیق قرار گرفته باشد. در اینجا، علاوه بر ارائه تصاویر روشنی از شکل‌گیری گردابه‌های متناوب در پشت استوانه، رفتار نوسانی پارامترهای مهمی مانند نیروی مقاومت، بالابر، زاویه جدایی جریان و فشار شماره، که کمتر مورد توجه پژوهشگران بوده‌اند، توصیف خواهد شد.

جریانهای گردابی در پشت استوانه هنگامی پدید می‌آیند که عدد رینولدز از ۷ فراتر رود. در این صورت، ابتدا یک جفت گردابه کوچک متقارن در پشت استوانه تشکیل می‌شود. با افزایش عدد رینولدز طول گردابه‌ها افزایش می‌یابد و بزرگتر می‌شوند. این گردابه‌ها در مکان خود ثابت و پایدارند و نوسانهای گردابی مشاهده نمی‌شود. این روند تا عدد رینولدز ۴۰ ادامه دارد. هرگاه عدد رینولدز از ۴۰ فراتر رود، گردابه‌ها در پشت استوانه به نوسان درمی‌آیند. این گردابه‌ها دیگر ثابت نیستند و به تناوب در بالا و پایین استوانه تشکیل و در جریان شماره رها می‌شوند. بدین ترتیب، گردابه‌های متناوب کارمن شکل می‌گیرند. با افزایش عدد رینولدز، بسامد و دامنه نوسانها تقویت می‌شود. باید دانست که افزایش عدد رینولدز نهایتاً جریان شماره را از حالت آرام به متلاطم تبدیل می‌کند. در بررسی حاضر عدد رینولدز از ۱۰۰۰۰ فراتر نمی‌رود و از این رو جریان از نوع آرام است.

۲- معادلات حاکم و روش حل

معادلات حاکم بر رفتار شماره عبارت‌اند از معادلات پیوستگی و تکانه که در دستگاه مختصات استوانه‌ای، برحسب پارامترهای بی‌بعد، به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$(۱) \text{ پیوستگی} \quad \frac{\partial}{\partial R}(RV) + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$(۲) \text{ تکانه در جهت شعاعی} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{U}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\nu}{Re} \nabla^2 V + \frac{U^2}{R} - \frac{\nu}{Re} \left(\frac{V}{R^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$$

$$(۳) \text{ تکانه در جهت محیطی} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\nu}{Re} \nabla^2 U - \frac{UV}{R} + \frac{\nu}{Re} \left(\frac{\nu}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{U}{R^2} \right)$$

و یکنواخت بودن سرعت در فواصل دوردست. در این معادلات خواص شماره ثابت فرض شده است.

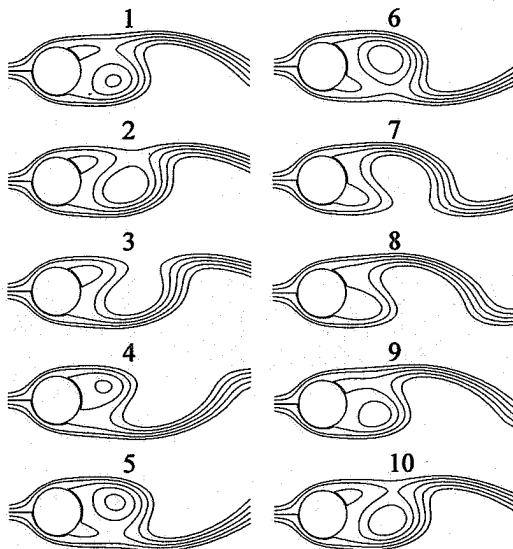
برای کامل شدن معادلات لازم است که شرایط اولیه و مرزی نیز گفته شوند. شرط اولیه سرعت همان توزیع سرعت در جریان ایده‌آل در اطراف استوانه است. شرایط مرزی عبارت‌اند از صفر بودن مولفه‌های سرعت روی سطح استوانه

(نیمه عقبی استوانه) به دلیل تغییرات بیشتر جریان شاره، گره‌های بیشتری قرار داده شده است. از آنجا که در پشت استوانه جریانهای گردابی وجود دارد، این گونه تراکم گره‌ها در جهت θ دقت محاسبه را افزایش می‌دهد.

پیش از انجام محاسبات نهایی محاسبات آزمایشی متعددی انجام شد تا مکان مناسب مرز بیرونی، تعداد نقاط شبکه، نمو زمانی مناسب و معیار توقف برنامه تعیین شود. بر این اساس، مرز شبکه 10^3 برابر شعاع، تعداد کل نقاط 9240 ، نمو زمانی $0.2r_0$ و مقدار بیشینه باقیمانده جرمی (معیار همگرایی و توقف برنامه) 10^{-6} انتخاب و محاسبات با کامپیوتر شخصی از نوع (66 MHz) DX2 486 انجام شد. زمان سی.پی.یو اجرای هر برنامه برای رسیدن به حالت تناوبی تقریباً 336 ساعت است.

۳- ارائه نتایج و بحث

خطوط جریان در حالت دائم تناوبی به ازای عدد رینولدز 100 و 500 در شکلهای ۲- الف، ۲- ب و ۳ رسم شده است. مقدار تابع جریان در شکلهای ۲- الف و ۳ برای این خطوط $0.2r_0$ ، $0.5r_0$ ، $0.7r_0$ ، $0.9r_0$ است. تصاویری که در هر شکل می‌بینید با فواصل زمانی یکسان رسم شده‌اند و اعداد ۱ تا ۱۰

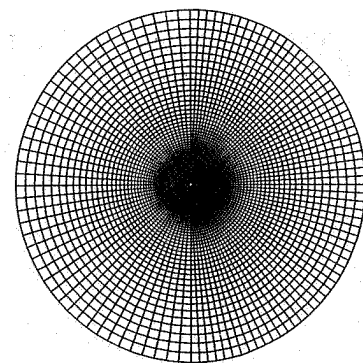


شکل ۲ الف. خطوط جریان در $Re = 100$. تصویرهای بالا با فواصل زمانی یکسان رسم شده‌اند. مقدار خطوط جریان $0.2r_0$ ، $0.5r_0$ ، $0.7r_0$ ، و $0.9r_0$ است.

معادلات بالا به روش عددی و با استفاده از الگوریتم سیمپل^۱ حل شده‌اند. مبنای نظری این روش در مرجع [۲۱] آمده است. معادله پیوستگی به معادله تصحیح فشار تبدیل می‌شود. در این روش ابتدا معادله تکانه برای V و U و سپس معادله تصحیح فشار حل می‌شود. از نتایج تصحیح فشار برای تصحیح سرعتها و فشار شاره استفاده می‌شود.

در این محاسبه دو نوع حجم معیار به کار رفته است. یکی حجم معیارهای اصلی، دیگری حجم معیارهای جابه‌جا شده. کمیت‌هایی مانند فشار، تصحیح فشار و خواص شاره در مرکز حجم معیارهای اصلی در نظر گرفته می‌شوند. سرعتها در مرکز حجم معیارهای جابه‌جا شده قرار دارند. برای تبدیل معادلات دیفرانسیل ۱ تا ۳ به معادلات جبری، از آنها روی حجم معیارهای شبکه انتگرال گرفته می‌شود. انتگرال‌گیری نسبت به زمان و مکان و انتگرال نسبت به زمان به صورت کاملاً ضمنی محاسبه می‌شود. برای میانمایی جملات جابه‌جایی و پخش از قانون توانی استفاده شده که جزئیات آن در مرجع [۲۱] آمده است. تجربیات قبلی مولف در مسائل گوناگون نشان می‌دهد که این روش از دقت مطلوبی برخوردار است [۲۲-۲۵].

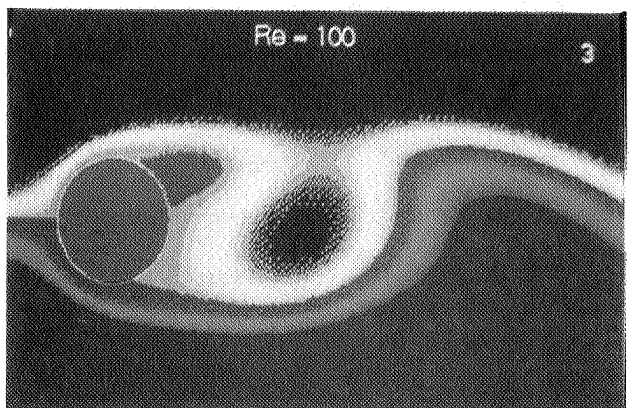
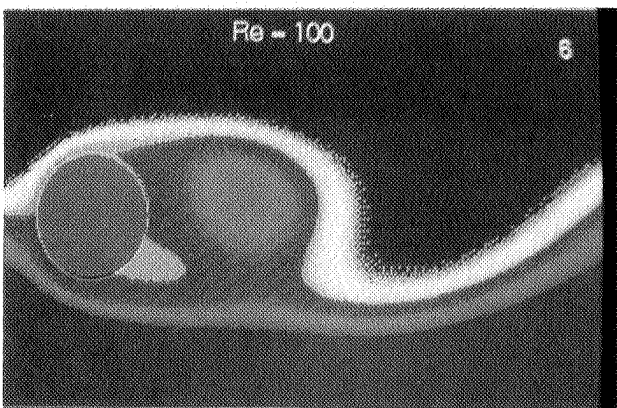
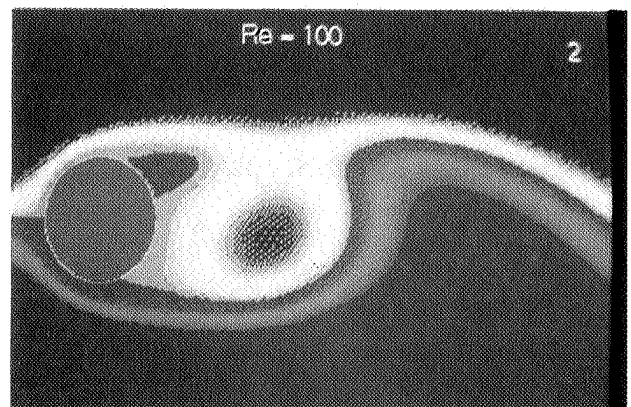
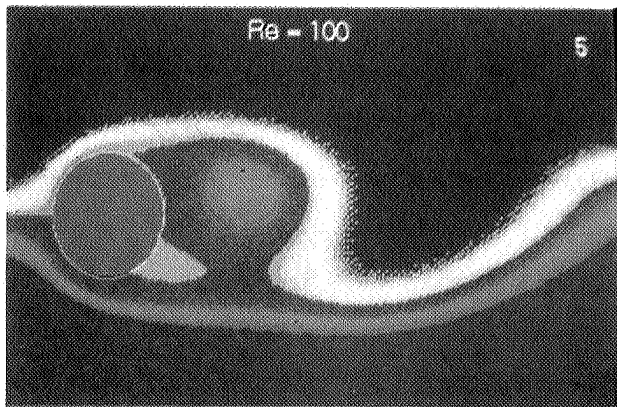
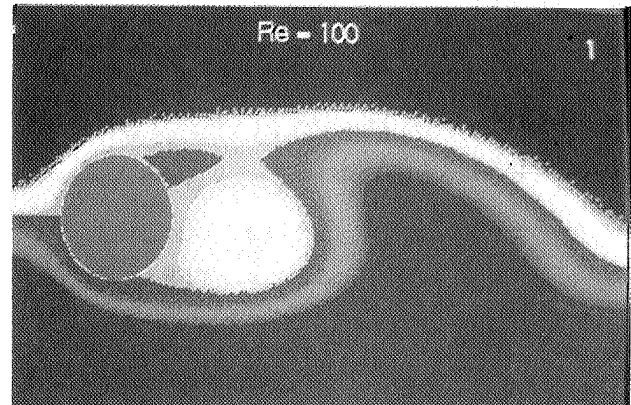
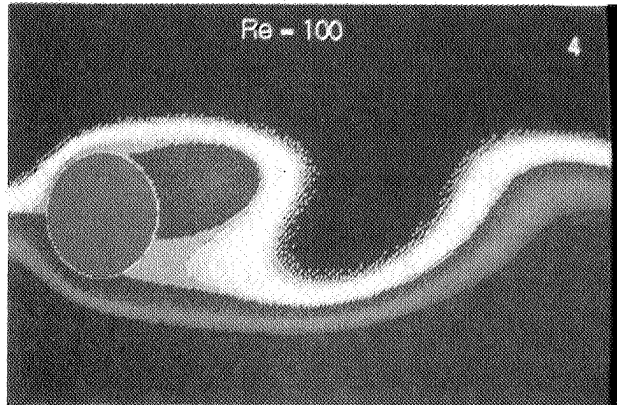
شبکه به کار رفته در این محاسبات را در شکل ۱ می‌بینید. نقطه سفیدی که در مرکز شبکه دیده می‌شود استوانه مورد بحث است. مرز شبکه 10^3 برابر شعاع استوانه از مرکز استوانه فاصله دارد. در ناحیه $90^\circ < \theta < 90^\circ$ (نیمه جلوی استوانه) به دلیل تغییرات کمتری که در جریان شاره روی می‌دهد تراکم گره‌ها کمتر است. در ناحیه $270^\circ < \theta < 90^\circ$



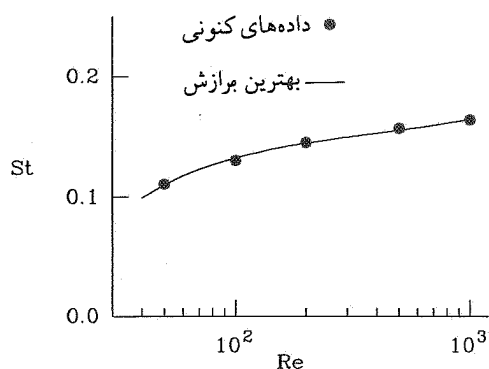
شکل ۱. حجم معیارهای اصلی در شبکه حل عددی. دایره سفیدی که در مرکز شبکه می‌بینید استوانه مورد بحث است. جهت جریان از چپ به راست است.

استوانه نوسان کنند. مقایسه دقیقتر شکل‌های ۲ - الف و ۳ نشان می‌دهد که با افزایش عدد رینولدز، گردابه‌ها زودتر تشکیل می‌شوند، یعنی جدایی جریان در زاویه θ کوچکتری (نزدیکتر به نقطه سکون) روی می‌دهد و وسعت ناحیه گردابی بیشتر است.

در شکل‌های ۲ - الف و ۳ و اعداد ۱ تا ۶ در شکل ۲ - ب بیانگر ترتیب زمانی آنهاست. خطوط جریان نشان می‌دهند که گردابه‌ها در نقطه‌ای معین روی دیواره استوانه تشکیل می‌شوند، رشد می‌کنند و سپس از دیواره جدا می‌شوند. گردابه‌ها به تناوب در بالا و پایین استوانه تشکیل می‌شوند. این حرکت‌های تناوبی سبب می‌شوند که نیروی مقاومت و بالابری



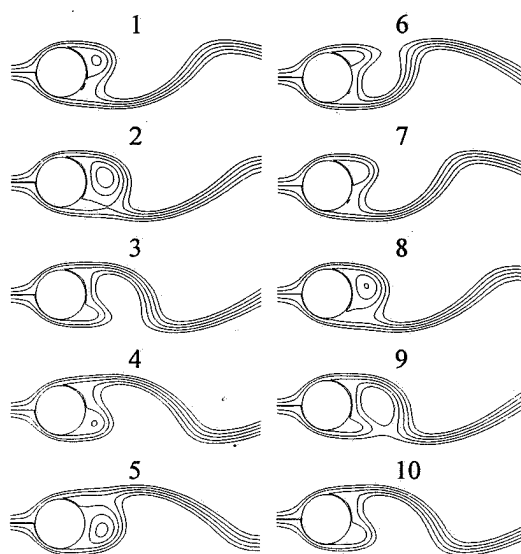
شکل ۲ ب. خطوط جریان در $Re = 100$. گردابه‌ها در پشت استوانه به تناوب تشکیل و در جریان شاره رها می‌شوند.



شکل ۴. تغییرات عدد استروهال با عدد رینولدز. افزایش عدد رینولدز بسامد نوسانها را افزایش می‌دهد.

این‌گونه رابطه بین St و Re توسط سایر پژوهشگران نیز در گستره محدودتر Re به کار رفته است [۲ و ۶]. با این حال شکل ۴ نشان می‌دهد که رابطه (۴) می‌تواند رفتار St را در طیف وسیعتری پیش‌بینی کند. بررسیهای تجربی کوآن و همکاران [۱۴] نیز وابستگی St و Re را نشان داده است.

شکل ۵ ضریب نیروی مقاومت C_D را برحسب زمان نشان می‌دهد. اجزای C_D شامل مولفه‌های فشاری $C_{D,p}$ و برشی $C_{D,\tau}$ در تصویر سمت راست دیده می‌شود. در مقادیر کوچک عدد رینولدز، ضریب C_D بزرگتر است، اما با افزایش Re مقدار C_D به سرعت کاهش می‌یابد به گونه‌ای که تغییرات آن برای $Re \geq 500$ ناچیز است. با آن‌که اولین گردابه‌های پشت استوانه در عدد رینولدز ۵۷۵ [۳] یا ۷۰۵ [۵] ظاهر می‌شوند، حرکات نوسانی آنها وقتی آغاز می‌شود که عدد رینولدز از ۴۰ فراتر رود. با افزایش عدد رینولدز دامنه نوسانها بزرگتر می‌شود و

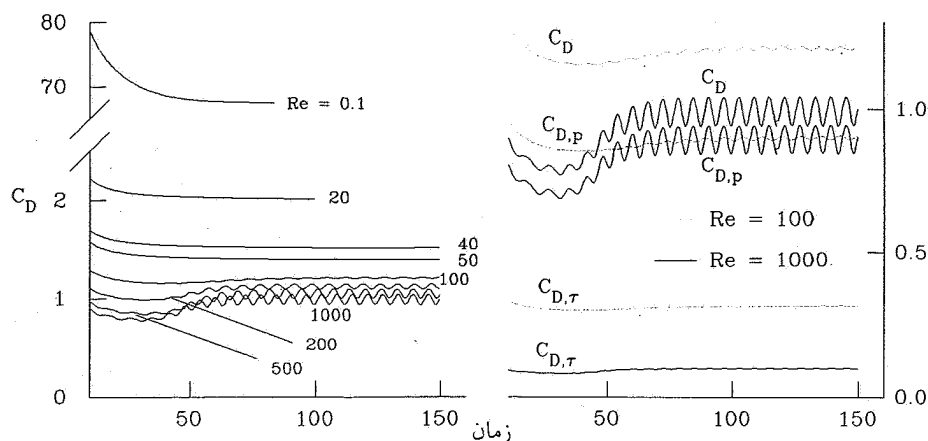


شکل ۳. خطوط جریان در $Re = 500$. تصویرها با فواصل زمانی یکسان رسم شده‌اند. مقدار خطوط جریان ۰٫۰۲، ۰٫۰۵، ۰٫۱، ۰٫۲ و ۰٫۴ است.

بسامد تشکیل گردابه‌ها غالباً به صورت عدد استروهال، St ، بیان می‌شود تغییرات عدد استروهال با عدد رینولدز در شکل ۴ ارائه شده است. همان‌گونه که در شکل می‌بینید، عدد استروهال با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد. این وابستگی را می‌توان با معادله زیر که از برازش منحنی به دست آمده است بیان کرد.

$$St = 0.153 - 2.171 Re + 1.393 \times 10^{-5} Re^2 \quad (4)$$

$$50 \leq Re \leq 1000$$

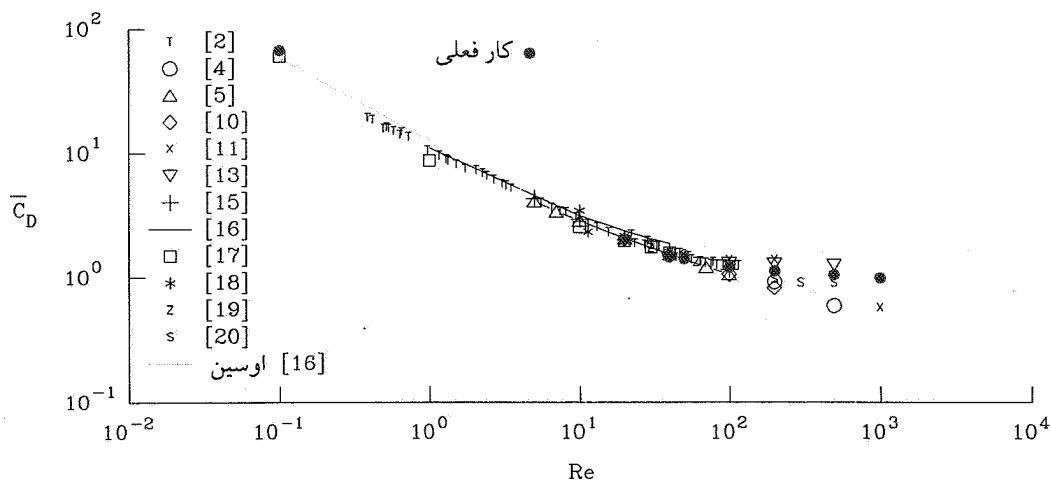


شکل ۵. ضریب نیروی مقاومت برحسب زمان، در رینولدزهای بالاتر، ضریب نیروی مقاومت نوسان می‌کند. افزایش عدد رینولدز دامنه نوسانها را افزایش می‌دهد.

شکل می بینید گستره وسیعی از Re را تحت پوشش قرار می دهد. حد پایینی این بررسی در قلمرو جریان خزشی قرار دارد که در آن نیروهای لختی شماره در برابر نیروهای چسبندگی ناچیزند. حد بالایی آن در قلمرو گردابه های نوسانی قرار گرفته است. با افزایش Re ، اهمیت نیروهای فشاری کاهش می یابد و وابستگی ضریب نیروی مقاومت به Re کم می شود.

C_D به شدت نوسان می کند. تصویر سمت راست در شکل ۵ نشان می دهد که به ازای $1000 \leq Re \leq 1000$ ، مولفه $C_{D,P}$ بزرگتر از مولفه $C_{D,T}$ است و نیروی فشاری نقش مهمتری در تعیین نیروی مقاومت دارد.

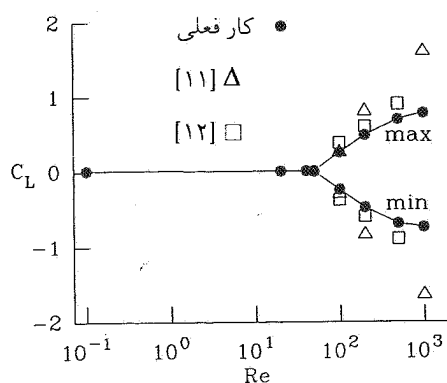
در شکل ۶ میانگین ضریب نیروی مقاومت برحسب Re رسم شده و با نتایج دیگران مقایسه شده است. مقادیری که در



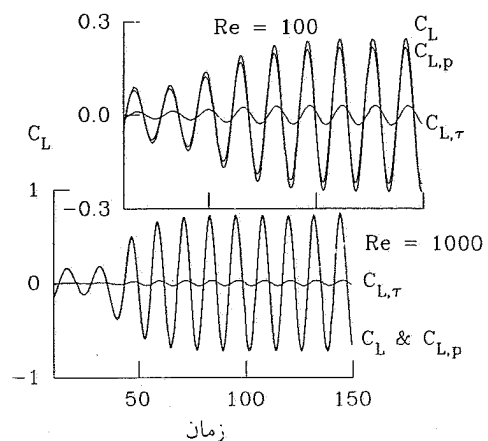
شکل ۶. مقایسه ضریب نیروی مقاومت با نتایج کار دیگران. افزایش عدد رینولدز ضریب نیروی مقاومت را کاهش می دهد.

پشت استوانه متقارن و پایا هستند و مقدار C_L نوسان نمی کند. هرگاه عدد رینولدز از ۴۰ فراتر رود، گردابه ها تقارن خود را از دست می دهند و حالت های نوسانی پدید می آید. شکل ۸ نشان می دهد که با افزایش Re نوسانها شدت می گیرند و تفاوت مقادیر بیشینه و کمینه C_L زیادتر می شود.

شکل ۷، نوسانهای ضریب بالابری C_L و اجزای فشاری $C_{L,P}$ و برشی $C_{L,T}$ آن را نشان می دهد. مشاهده می شود که سهم نیروی برشی در C_L نسبتاً ناچیز است. نوسانها با بسامد معینی تکرار و با عدد استروهمال (معادله ۴) بیان می شوند. مقادیر بیشینه و کمینه C_L و مقایسه آنها با مرجعهای [۱۱] و [۱۳] در شکل ۸ دیده می شود. به ازای $Re \leq 40$ ، گردابه های



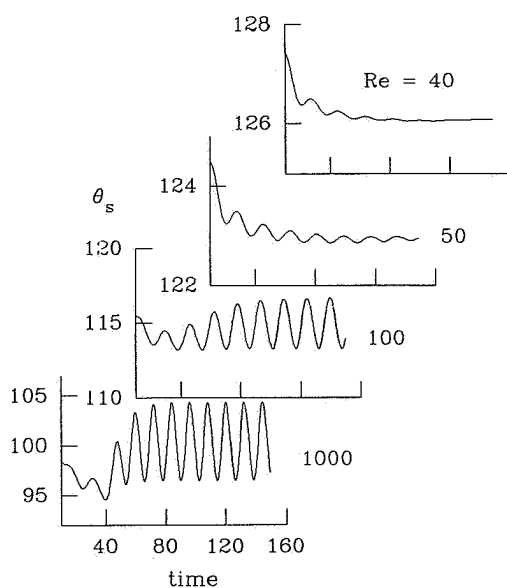
شکل ۸. مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه ضریب بالابری.



شکل ۷. نوسانهای ضریب بالابری. نیروی فشار نقش تعیین کننده ای دارد.

ضریب فشار نقطه سکون $C_{p,s}$ و توزیع ضریب فشار روی سطح استوانه C_p در چند زمان مختلف در شکل ۱۰ نشان داده شده است. وابستگی $C_{p,s}$ به Re در سرعت‌های کم زیاد است (تصویر بالا)، اما با افزایش سرعت شماره این وابستگی کاهش می‌یابد. تصاویر میانی و پایینی نشان می‌دهند که فشار شماره نوسانهای زیادی دارد و با افزایش Re این نوسانها تشدید می‌شوند.

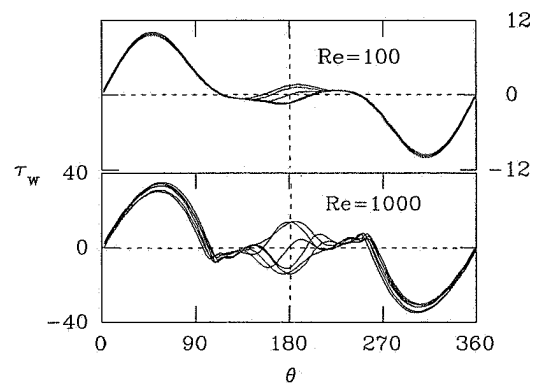
یکی دیگر از پارامترهای مهم جریان شماره در اطراف استوانه زاویه جدایی است. شکل ۱۱ تغییرات این زاویه را نسبت به زمان نشان می‌دهد. تصویر بالای این شکل نشان می‌دهد که به ازای عدد رینولدز ۴۰، نوسانهای متفرقه موجود در میدان جریان با گذشت زمان میرا می‌شوند و جدایی جریان در زاویه معینی صورت می‌گیرد.



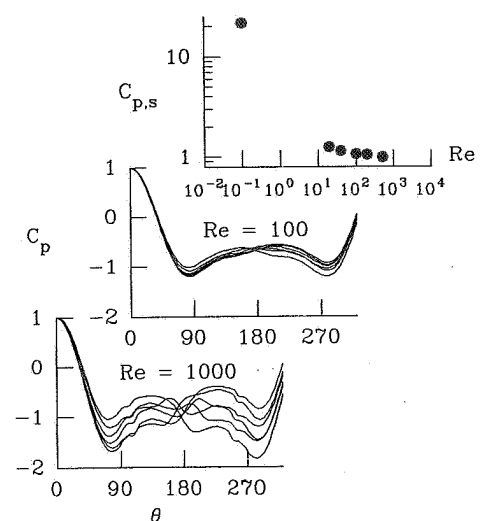
شکل ۱۱. نوسانهای زاویه جدایی جریان. در رینولدزهای کمتر، نوسانهای متفرقه از بین می‌روند و جدایی جریان در زاویه معینی روی می‌دهد. در رینولدزهای بالا، نقطه جدایی جریان نوسان می‌کند. با افزایش عدد رینولدز نوسانهای زاویه جدایی تقویت می‌شود.

با افزایش عدد رینولدز، نقطه جدایی جریان نوسان می‌کند و هرچه عدد رینولدز افزایش یابد، نوسانهای زاویه جدایی شدیدتر است. میانگین نوسانها در شکل ۱۲ دیده می‌شود. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز، زاویه جدایی

تغییرات تنش برشی روی سطح استوانه در شکل ۹ رسم شده است. منحنیهای متعدد که در شکل می‌بینید تنش برشی را در زمانهای مختلف نشان می‌دهند. این منحنیها نه تنها در ناحیه گردابی بریکدیگر منطبق نیستند بلکه در نیمه جلویی استوانه $90 < \theta < 90$ نیز با یکدیگر تفاوت دارند. با افزایش عدد رینولدز این تفاوت بیشتر آشکار می‌شود. نکات مهم دیگر این منحنیها عبارت است از صفر بودن تنش برشی در نقطه سکون ($\theta = 0$)، رسیدن تنش برشی به مقدار بیشینه پیش از رسیدن به نقطه سکون، صفر شدن تنش برشی (جدایی جریان) بعد از نقطه $\theta = 90$ و نوسانهای شدید تنش برشی در نواحی گردابی.



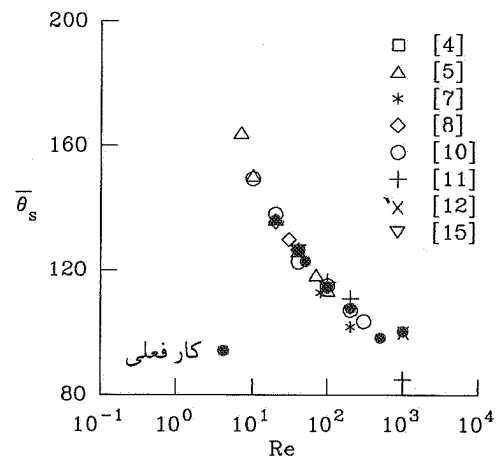
شکل ۹. توزیع تنش برشی دیواره روی سطح استوانه. به سبب وجود گردابه‌های متناوب در پشت استوانه، منحنیهای تنش برشی در نقاط مختلف، به‌ویژه در نزدیکی زاویه ۱۸۰ درجه، بر یکدیگر منطبق نیستند.



شکل ۱۰. توزیع ضریب فشار روی سطح استوانه و ضریب فشار در نقطه سکون.

کمتر از ۷ است جدایی جریان اتفاق نمی‌افتد و حرکت‌های گردابی در پشت استوانه وجود ندارد. در گستره $7 \leq Re \leq 40$ ، یک جفت گردابه متقارن و پایدار در پشت استوانه تشکیل می‌شود. این گردابه‌ها ثابت هستند و نوسان نمی‌کنند. هرگاه عدد رینولدز از ۴۰ فراتر رود، گردابه‌ها به نوسان درمی‌آیند. گردابه‌ها به تناوب در پشت استوانه تشکیل و در جریان شاره رها می‌شوند. تناوب گردابه‌ها بر پارامترهای مهم جریان آثاری تناوبی برجای می‌گذارد، به گونه‌ای که ضریب نیروی مقاومت و بالابری و زاویه جدایی جریان همگی نوسان می‌کنند. بسامد نوسانها به عدد رینولدز بستگی دارد. با افزایش عدد رینولدز بسامد نوسانها افزایش می‌یابد. برای پیش‌بینی بسامد نوسانهای گردابی می‌توان از رابطه عدد استروهل که در این مقاله ارائه شد استفاده کرد.

جریان کاهش می‌یابد و نقطه جدایی به سوی نقطه $\theta = 90^\circ$ حرکت می‌کند.



شکل ۱۲. میانگین زاویه جدایی جریان.

۴- نتیجه‌گیری

جریان آرام و تراکم‌ناپذیر شاره در اطراف استوانه در گستره $1000 \leq Re \leq$ ااره بررسی شد. تا زمانی که عدد رینولدز

مرجعها

1. R. B. Payne "Calculation of unsteady viscous flow past a circular cylinder", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 4 (1958) 81-86.
2. D. J. Tritton, "Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 6 (1959) 547-567.
3. R. L. Underwood, "Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 37 (1969) 95-114.
4. J. S. Son and T. J. Hanratty, "Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500" *J. Fluid Mechanics*, Vol. 35 (1969) 369-386.
5. S.C.R. Dennis and Gau-Zu chang, "Numerical solution for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 42 (1970) 471-489.
6. D. J. Tritton, "A note on vortex streets behind circular cylinders at low Reynolds numbers", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 45 (1971) 203-208.
7. C.L. Lin, D.W. pepper and S.C. Lee, "Numerical methods for separated flow solutions around a circular cylinder", *AIAA Journal* Vol. 14 (1976) 900-907.
8. M. Coutanceau and R. Bouard, "Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1. steady flow", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 79 (1977) 231-256.

9. M. Coutanceau and R. Bouard, "Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 2. unsteady flow", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 79 (1977) 257-272.
10. B. Fornberg, "A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 98 *1980) 819-855.
11. M. Braza, P. Chassaing and H. Ha Minh, "numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 165 (1986) 79-130.
12. C. C. Chang and R.L. Chern, "A numerical study of flow around and impulsively started circular cylinder by a deterministic vortex method", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 233 (1991) 243-263.
13. R. R. Hwang and S. H. Lin, "On laminar wakes behind a circular cylinder in stratified fluids", *J. Fluids engineering*, Vol. 114 (1992) 20-28.
14. T. S. Kwon, H. J. Sung and J. M. Hyun, "Experimental investigation of uniform-shear flow past a circular cylinder", *J. Fluids Engineering*, Vol. 114 (1992) 457-460.
15. W. M. Collins and S.C.R. Dennis, "Flow past an impulsively started circular cylinder", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 60 (1973) 105-126.
16. F. M. White, "Viscous fluid flow, 2nd edition", *McGraw-Hill*, New York (1991).
17. م.ع. بدری، م. ملکی و م.س. سعیدی، "حل عددی جریان آرام شار ه حول اجسام استوانه‌ای در رینولدزهای پایین" سومین کنفرانس دینامیک شارها، ۱۹ تا ۲۱ دی ماه دانشگاه صنعتی شریف (۱۳۷۳) ص ۳۰۳-۳۲۳.
18. A. Thom, "Flow past circular cylinders at low speeds", *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol 141 (1933) 651-669.
19. H. B. Keller and H. Takami, "Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder", *phys. Fluids Supp.*, Vol, 12 (1969) II-51 to II-56.
20. V. A. Gushchin and V. V. Schennikov, "A numerical method of solving the Navier-Stokes equations", *zh. vychist. Mat. mat. Fiz.*, Vol. 14 (1974) 512.
21. S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", *Hemisphere Wash.* (1980).
22. M. Molki and M. Faghri, "Conjugate natural convection heat transfer in vertical annulus with internal circumferential fins, Numerical Heat Transfer", Part A, Vol. 25 (1994) 457-476.
23. M. Molki and M. Faghri, "Interaction between a buoyancy-driven flow and an array of annular cavities", *Sadhana: Indian Academy of Sciences*, Vol. 19 Part 5, (1994) 705-721.
24. M. Faghri, M. Molki, J. Chrupcala, and Y. Asako, "Entrance analysis of turbulent flow in an array of heated rectangular blocks", *I-THERM' 94 Conference*, May 4-7, Washington, DC (USA) (1994).
25. M. Molki, "Transient natural convection heat transfer in square enclosures", *The 3rd ISME Conference*, (1995) 297-306.