مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱، شمارهٔ ۱، زمستان ۱۳۷۴

نوسانات آزاد اجرام زمین‌گونه

یوسف ثبوتی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، گاوه‌زنگ زنجان
و
بخش فیزیک ـ دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۳ خرداد ۱۳۷۴ *دریافت نسخهٔ نهایی:* ۷ شهریور ۱۳۷۴

چکیده

در این بررسی مقدماتی، نوسانات آزاد یک جرم کروی خودگراننده متشکل از هستهٔ مرکزی سیال و پوستهٔ جامد بررسی شده است. نوسانات آزاد زمین واقعی، تا آنجاکه فرض تقارن کروی و همسانگردی قابل قبول باشد، نباید از نوسانات مدل مورد بحث به دور باشد. هدف اصلی از این بررسی در این مرحله، آشنایی با پیچیدگیهای ریاضی مسئله است تا کسب داده‌های عددی قابل انطباق به زمین واقعی.

۱ - مقدمه

در سال ۱۹۴۱ کولینگ نوسانات اجرام سماوی سیال را به دو دسته طبقه‌بندی کرد. امواج آکوستیک یا P که در آن، همانند امواج صوتی متعارف، تغییرات فشار نقش اول را بازی می‌کند و دستهٔ دیگر امواج g که در آن، مانند حرکات همرفتی، تغییرات چگالی بر اثر دمانقش عمده را به عهده دارد. این طبقه‌بندی به اعتبار وجود دو نوع نیرو در سیالات است (ثبوتی، ۱۹۸۱). نخست نیروهای ناشی از تغییرات فشار که می‌کوشند حالت سیال را به وضع تعادل برگردانند و نوسانات صوتی را به‌وجود آورند، دوم نیروهای غوطه‌وری که از تغییرات چگالی با دما، بدون تغییر محسوس در فشار به‌وجود می‌آیند و می‌کوشند عنصر تغییر چگالی یافته را به حرکت همرفتی وادارند. نیروی اول هم در قسمت سیال و هم در قسمت جامد زمین و نیروی دوم در هستهٔ سیال آن وجود دارد. علاوه بر اینها، در پوستهٔ جامد زمین نیروهای کشسان برشی نیز وجود دارند و نوسانات مخصوص به خود تولید می‌کنند. انتظار می‌رود که طیف وجوه نوسانی زمین شامل سه گروه صوتی، همرفتی، و برشی باشد. مبانی ریاضی این طبقه‌بندی در صفحات آیندهٔ این نوشتار روشن خواهد شد.

نوسانات آزاد زمین برای نخستین‌بار در زلزلهٔ کامچاتکا سال ۱۹۵۲، توسط بینوف مشاهده شد (گارلند ۱۹۷۹ و ژاکوب ۱۹۹۳). تناوب ثبت‌شده ۵۷ دقیقه بود. از آن تاریخ به بعد پژوهشگران متعددی به بررسی نظری و رصدی مسئله پرداخته‌اند (پکریز و دیگران ۱۹۶۱، زیوانسکی و گیلبرت ۱۹۷۱، لوه ۱۹۷۳، داهلن ۱۹۹۲) و امروزه نوسانات آزاد زمین کم‌وبیش موضوع کتب درسی شده است (مناهن و جیت ۱۹۸۱ و تیزایر ۱۹۸۹). با همهٔ این احوال به‌نظر می‌رسد زمین‌فیزیکدانانی که به نوسانات زمین پرداخته‌اند و اخترفیزیکدانانی که مطالعهٔ وجوه ارتعاشی ستارگان را پیشه ساخته‌اند به یک زبان حرف نزده‌اند و مفاهیم فیزیکی مورد نظر خود را در قالب ساختار ریاضی مشترک بیان نکرده‌اند. در این مقاله سعی شده است گوشه‌ای از این خلأ پر شود. در صفحات آینده طبقه‌بندی وجوه ارتعاشی اجرام زمین‌گونه به موازات آنچه برای ستارگان معمول است و به شرحی که در بالا اشاره شد بررسی خواهد شد.

۲ - معادلات حرکت

برای اجرام خودگرانندهٔ کروی معادلات تعادل عبارت‌اند از

$$\nabla p + \rho \nabla U = 0 \qquad \text{(۱ - الف)}$$

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho \qquad \text{(۱ - ب)}$$

که در آن $\rho(r)$، $p(r)$، $U(r)$ به ترتیب چگالی، فشار، و پتانسیل جاذبه هستند. همچنین فرض می‌شود که در حالت تعادل

$p=p(\rho)$ و بنابراین $\Delta p=\frac{dp}{d\rho}\Delta\rho$ است. فرض کنیم دستگاه از حالت تعادل خود انحراف پیدا کند و جزء جرمی که در محل r است به اندازهٔ $\xi(r,t)$ جابه‌جا شود. سرعت و شتاب آن $\dot{\xi}$ و $\ddot{\xi}$ خواهد بود و به همین اعتبار تغییرات $\delta\rho$ و δp و δU را در نقطهٔ r به‌وجود خواهد آورد. معادلات حرکت برای ξ به شرح زیر خواهد بود که از خطی‌کردن معادلات حرکت سیال – جامد نتیجه می‌شود

$$-\rho\ddot{\xi}_i=\omega_{ij}\,\xi_j=\frac{\partial\delta p}{\partial x^i}+\delta\rho\frac{\partial U}{\partial x^i}+\rho\frac{\partial\delta U}{\partial x^i}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\mu\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x^j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x^i}-\frac{۲}{۳}\nabla.\xi\,\delta_{ij}\right)\right] \qquad (۲)$$

که در آن $\mu(r)$ ضریب سختی مولفهٔ جامد است.
از معادلهٔ پیوستگی نتیجه می‌شود

$$\delta\rho=-\nabla.(\rho\xi) \qquad (\text{۳ – الف})$$

با فرض اینکه هم حرکت جزء جرم جابه‌جاشده و هم تغییرات لاگرانژی فشار (یعنی تغییرات در فشار جزء جابه‌جا شده و نه در نقطهٔ ثابت r) بی‌دررو است نتیجه می‌شود

$$\delta p=-\gamma p\,\nabla.\xi-\nabla p.\xi=-\gamma p\,\nabla.\xi+\frac{dp}{d\rho}(\delta\rho+\rho\nabla.\xi), \qquad (\text{۳ – ب})$$

تغییرات در پتانسیل گرانشی به نوبهٔ خود از معادلهٔ پواسون به‌دست می‌آید:

$$\nabla^{۲}\delta U=۴\pi G\delta\rho \quad \text{یا} \quad \delta U=-G\int\delta\rho(r')\,|r-r'|^{-۱}d^{۳}x' \qquad (\text{۳ – ج})$$

با توجه به معادلات (۳)، معادلهٔ (۲) یک معادلهٔ خطی برداری برای ξ است و می‌توان نشان داد که عملگر ω در آن هرمیتی است. بنابراین می‌توان بستگیهای زمانی کمیّات مختلف را به‌صورت $e^{-i\omega t}$ نوشت و معادلهٔ (۲) را به‌صورت زیر درآورد

$$\omega^{۲}=\frac{W}{S} \quad , \quad \omega^{۲}\ \text{حقیقی} \qquad (\text{۴ – الف})$$

که در آن

$$W=\int\xi^{*}.\omega\xi\,d^{۳}x \qquad (\text{۴ – ب})$$

$$S=\int\rho\xi^{*}.\xi\,d^{۳}x \qquad (\text{۴ – ج})$$

۳ - فضای هیلبرت

باتوجه به هرمیتی بودن عملگر ω، بردارهای ویژه معادلهٔ (۲) متعلق به یک فضای هیلبرت خواهند بود و تشکیل مجموعهٔ کامل متعامد به هم خواهند داد. نخست به بررسی ساختار این فضا می‌پردازیم.
فرض می‌کنیم H یک فضای برداری خطی و ضرب نرده‌ای در آن به‌صورت زیر باشد

$$(\zeta,\rho\eta)=\int\rho\zeta^{*}.\eta\,d^{۳}x=\text{محدود} \quad \xi,\eta\in H \qquad (۵)$$

اگر $(\zeta\rho\eta)$ صفر باشد دوبردار ζ و η متعامد به‌هم خواهند بود و به همین مفهوم می‌توان H را به سه زیرفضای متعامد تقسیم کرد. بنابه صورتی از قضیهٔ هلمهولتز که از تبدیل پیمانه‌ای خاص روی قضیهٔ متعارف هلمهولتز به‌دست می‌آید می‌توان نوشت

$$\rho\zeta=-\rho\nabla\phi_p+\nabla\times A \quad , \quad \nabla.A=۰ \qquad (۶)$$

که در آن $\phi_p(r)$ یک پتانسیل نرده‌ای و $A(r)$ پتانسیل برداری است (ثبوتی ۱۹۸۱). برداراخیر را می‌توان به دو صورت مستقل از هم انتخاب کرد. فرض کنیم $\hat{r}$ بردار واحد در امتداد r، و $\phi_g(r)$ و $\phi_t(r)$ دو تابع نرده‌ای اختیاری باشند. دو بردار $A_g=\nabla\times(\hat{r}\phi_g)$ و $A_t=\nabla\times\nabla\times(\hat{r}\phi_t)$ مستقل و بدون دیورژانس هستند. حال به اعتبار این گفته‌ها می‌توان نوشت

$$\zeta=\zeta_p+\zeta_g+\zeta_t \ ; \ \zeta_p,\ \zeta_g,\ \zeta_t\in H \qquad (۷)$$

که در آن

$$\zeta_p=-\nabla\phi_p \qquad (\text{۷ – الف})$$

$$\rho\zeta_g=\nabla\times A_g=\nabla\times\nabla\times(\hat{r}\phi_g)\ , \qquad (\text{۷ – ب})$$

$$\rho\zeta_t=\nabla\times A_t=\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\hat{r}\phi_t)\ . \qquad (\text{۷ – ج})$$

تجزیهٔ ζ به سه بردار ζ_p و ζ_g و ζ_t یک تجزیهٔ متعامد است و می‌توان نشان داد

$$(\zeta_\alpha,\rho\zeta_\beta)=۰\ ,\ \alpha\neq\beta\ ,\ \alpha,\beta=g,p,t. \qquad (۸)$$

درستی معادلهٔ (۸) برای (g,p) یا (t,p) که در آن ζ_p مشتق از پتانسیل نرده‌ای است و بردارهای $\rho\zeta_g$ یا $\rho\zeta_t$ مشتق از پتانسیل برداری هستند روشن است. تحقیق درستی آن برای (t,g) نیازمند مقداری محاسبه است. قراردادن بسط هارمونیک بردارهای ζ_g و ζ_t از معادلات (۱۰) در معادلهٔ (۸) و

انتگرال‌گیری روی زوایای θ و φ با توجه به اینکه $\rho(r)$ تقارن نیازمند مقداری محاسبه است. قراردادن بسط هارمونیک بردارهای ξ_g و ξ_t از معادلات (۱۰) در معادلهٔ (۸) و انتگرال‌گیری روی زوایای θ و φ با توجه به اینکه $\rho(r)$ تقارن کروی دارد متعامدبودن ξ_g و ξ_t را نیز نشان خواهد داد. بنابراین فضای H به سه زیرفضای H_p: $\{\xi_p\}$ و H_g: $\{\xi_g\}$ و H_t : $\{\xi_t\}$ متعامد تجزیه می‌شود. علی‌الاصول هر بردار ویژه معادلهٔ (۲) که یک وجه نوسانی مدل مورد نظر است دارای هر سه مولفهٔ p و g و t است. ولی خصوصیات معادله طوری است که وجوه نوسانی نیز به سه دستهٔ متمایز از هم تقسیم می‌شوند و در هر دسته یکی از مولفه‌های p یا g یا t مولفهٔ مسلط است و دیگر مولفه‌ها کوچک‌اند. در زیر معادلات (۱۴) دوباره به این موضوع اشاره شده است.

۴ - تقارن O(3)

با فرض کروی‌بودن مدل خودگراننده در حالت تعادل و اینکه کمیتهای ρ و p و U و μ در این حالت تنها به اندازهٔ بردار r بستگی دارند می‌توان نشان داد که عملگر w دارای تقارن O(3) است و با عملگرهای J^2 و J_z تکانهٔ زاویه‌ای، ($J_i=\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k$) دارای مجموعهٔ توابع ویژهٔ مشترک‌اند. حکم اخیر به معنای زیر است: توابع ویژهٔ J^2 و J_z هارمونیکهای کروی، $Y_{lm}(\theta,\varphi)$، هستند. به ازای هر (l,m) سه بردار هارمونیک کروی از نوع بردارهای معادلات (۱۰) می‌توان به‌وجود آورد. بردارهای ویژهٔ تانسور w ترکیبهای خطی مناسبی از بردارهای معادلات اخیر به‌ازای همان (l,m) خواهند بود و بر بردارهای ناشی از هر (l',m') دیگر متعامد خواهند بود.

۵ - حساب تغییرات

به اعتبار هرمیتی بودن عملگر w مقادیر و توابع ویژهٔ آن را می‌توان با حساب تغییرات به‌دست آورد. در روش تغییرات ریلی - ریتز که در این بررسی به‌کار رفته است به شرح زیر عمل می‌شود.

الف) برای هر یک از توابع نرده‌ای ϕ_p و ϕ_g و ϕ_t، پس از بسط هارمونیک کروی و جداکردن بستگیهای زاویه‌ای آن، سه مجموعهٔ کامل از چند جمله‌ایهای r انتخاب می‌شود. مجموعه‌های مورد استفاده در این بررسی برای ساختارهای پلی ترویپی عبارت‌اند از

$$\phi_p^{li} = r^{l+2i}, i=0,1, \ldots , \quad \text{(۹ - الف)}$$

$$\phi_g^{li} = \Theta^{n+1} r^{l+2i+1}, i=0,1, \ldots , \quad \text{(۹ - ب)}$$

$$\phi_t^{li} = \Theta^{n+2} r^{l+2i+2}, i=0,1, \ldots , \quad \text{(۹ - ج)}$$

که در آن $\Theta(r)$ متغیر پلی‌ترویپی مدل و n اندیس پلی‌ترویپی است. متغیر پلی‌ترویپی، که از معادلهٔ لین - امدن پیروی می‌کند، با روابط $\rho \propto n$ و $p \propto \rho^{1+\frac{1}{n}}$ تعریف می‌شود و در شرایط مرزی Θ(مرکز) = ۱ و Θ(سطح) = ۰ صدق می‌کند (چاندراسکهار ۱۹۳۹). دلیل گنجاندن متغیر پلی‌ترویپی در معادلات (۹) تامین شرایط مرزی برای مؤلفه‌های مختلف ξ_a است. برای جزئیات بیشتر به ثبوتی (۱۹۷۷، ۱۹۸۱، ۱۹۸۶) مراجعه شود.

به ازای هر یک از توابع $\phi^{li}_\alpha(r)\ Y_{lm}(\theta,\varphi);\alpha=p,g,t$، می‌توان از معادلات (۷) بردار تغییر مکان نظیر ξ^{li}_α را حساب کرد:

$$\xi_p^{li} = \left[-\partial_r \phi_p^{li} Y_{lm} \quad , \quad -\frac{1}{r}\phi_p^{li}\, \partial_\theta Y_{lm} \quad , \quad -\frac{im}{r\sin\theta}\phi_p^{li} Y_{lm} \right] \quad \text{(۱۰ - الف)}$$

$$\xi_g^{li} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2}\phi_g^{li} Y_{lm} \quad , \quad \frac{1}{r}\partial_r \phi_g^{li}\, \partial_\theta Y_{lm} \quad , \quad \frac{im}{r\sin\theta}\partial_r \phi_g^{li} Y_{lm} \right] \quad \text{(۱۰ - ب)}$$

$$\xi_t^{li} = \left[0 \; , \; \frac{im}{r\sin\theta}\phi_t^{li} Y_{lm} \; , \; -\frac{1}{r}\phi_t^{li}\, \partial_\theta Y_{lm} \right] \quad \text{(۱۰ - ج)}$$

مجموعهٔ بردارهای هارمونیک کروی معادلات (۱۰)، (ξ^{li}_a, $a=p,g,t$)، متعامد و کامل است و زیرفضای H_a را می‌پوشاند.

۶ - روشهای عددی

فرض کنیم $\varepsilon_i=\omega^2_i$ مقدار ویژه‌ای برای معادلهٔ (۲)، و $\xi_i(r)$ بردار ویژهٔ متناظر آن باشد. زیرنگاشت i در اینجا شامل همهٔ مشخصات مقادیر ویژه، اعم از l,m,t,g,p و i است. همچنین فرض کنیم $\{\zeta_k=\xi^{li}_\alpha\}$ مجموعهٔ پایه‌ای برای فضای H، باشد. بردار ξ_i را برحسب ζ_k بسط می‌دهیم

$$\xi_i = \zeta_k\, Z_{ki} \quad \text{(۱۱)}$$

که در آن Z_{ki} ضرایب بسط و مقادیر ثابتی‌اند. بسط خطی بردارهای ویژهٔ ξ_i برحسب بردارهای پایهٔ ζ_k و منظور کردن ضرایب بسط Z_{ki} به مثابهٔ پارامترهای وردشی در حساب تغییرات، به روش ریلی - ریتز موسوم است. معادلهٔ (۲) را از طرف چپ در ζ^*_j ضرب می‌کنیم و روی حجم دستگاه انتگرال می‌گیریم

$$(\zeta_j, \omega\, \zeta_k)\; Z_{ki} = (\zeta_j, \rho\, \zeta_k)\; Z_{ik}\, \varepsilon_i \quad \text{(۱۲ - الف)}$$

که در آن عناصر ماتریسهای مختلف به سهولت از معادلهٔ (۱۲ – الف) خوانده می‌شود. ماتریس Z به‌طور همزمان S و W را قطری می‌کند

$$Z^{\dagger}SZ = I \text{ (ماتریس واحد)} \qquad (۱۲ - ج)$$

$$Z^{\dagger}WZ = E \qquad (۱۲ - د)$$

منظور از حل معادلهٔ (۱۲ – الف) قطری کردن همزمان S و W به شرح فوق و یافتن ماتریس E و Z است. این عمل در تقریبهای مختلف، به شرح زیر، امکان‌پذیر است: در معادلهٔ (۱۲ – ب) ماتریسها $\infty \times \infty$ هستند. تحدید آنها به ماتریسهای $n \times n$ با n های فزاینده این امکان را فراهم می‌کند که معادله در تقریبهای متوالی حل شود. جوابهای E و Z برای یک n بخصوص دقیقتر و بنابه "اصل می‌نیمم" که از طبیعت هرمیتی ماتریسهای W و S ناشی می‌شود کوچکتر از جوابهای نظیر برای $m<n$ خواهد بود.

۱-۶ طبقه‌بندی وجوه نوسانی

تقسیم بردارهای پایه به سه دستهٔ $\{\zeta_p\}$ و $\{\zeta_g\}$ و $\{\zeta_t\}$ تقسیم هر یک از ماتریسهای معادلهٔ (۱۲ – ب) و درنتیجه خود معادلهٔ (۱۲ – ب) به بلوکهای pp و pg و غیره را به دنبال دارد. نظر به متعامدبودن ζ_a ها که در معادلهٔ (۸) آمده است ماتریس S بلوکهای غیرقطری ندارد:

$$S = \begin{bmatrix} S_{pp} & & \\ & S_{gg} & \\ & & S_{tt} \end{bmatrix} \qquad (۱۳ - الف)$$

محاسبات مفصل و نسبتاً طولانی ماتریس W را به شرح زیر می‌دهد

$$W = \begin{bmatrix} W_{pp} & W_{pg} & \\ W_{gp} & W_{gg} & \\ & & W_{tt} \end{bmatrix} \qquad (۱۳ - ج)$$

این ساختار نشان می‌دهد که بلوک tt معادلهٔ (۱۲ – ب) مستقل از تاثیر بلوکهای دیگر قابل حل است و بردارهای ویژهٔ حاصل منحصراً یک ترکیب خطی از بردارهای $\{\zeta_t\}$ هستند. این دسته از جوابها را وجوه نوسانی t به اعتبار چنبره‌ای بودن آنها نامگذاری خواهیم کرد. به سبب وجود بلوکهای W_{pg} و W_{gp} وجوه نوسانی دیگر ترکیبی از بردارهای ζ_p و ζ_g خواهد بود. بنابراین ساختار ماتریس Z نیز، که بردارهای ξ_i را برحسب پایه $\{\zeta_k\}$ می‌دهد همان ساختار ماتریس W خواهد بود:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{pp} & Z_{pg} & \\ Z_{gp} & Z_{gg} & \\ & & Z_{tt} \end{bmatrix} \qquad (۱۳ - ج)$$

ماتریس E نیز بنابه تعریف قطری است و دارای بلوک‌بندی زیر است

$$E = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & E_g & \\ & & E_t \end{bmatrix} \qquad (۱۳ - د)$$

پس از پیداکردن Z و قراردادن آن در معادلهٔ (۱۰) و تفکیک بلوک‌بندی آن، سه دسته جواب به شرح زیر تشخیص داده می‌شود

$$\xi_p = \zeta_p Z_{pp} + \zeta_g Z_{gp} \qquad (۱۴ - الف)$$

$$\xi_g = \zeta_p Z_{pg} + \zeta_g Z_{gg} \qquad (۱۴ - ب)$$

$$\xi_t = \zeta_t Z_{tt} \qquad (۱۴ - ج)$$

در معادلهٔ (۱۴ – الف) محاسبات نشان می‌دهند که جملهٔ اول سمت راست جمله غالب است، یعنی

$$(\zeta_p Z_{pp}\ ,\ \rho\zeta_p Z_{pp}) > (\zeta_g Z_{gp}\ ,\ \rho\zeta_g Z_{gg})$$

به همین اعتبار ξ_g ها وجوه نوسانی p نامیده می‌شوند. در معادلهٔ (۱۴ – ب) جملهٔ دوم سمت راست، جملهٔ مسلط است. بنابراین ξ_g وجوه نوسانی g خوانده می‌شوند. اینکه در معادلات (۱۴) یکی از مولفه‌های p یا g و یا t بزرگتر از مولفه‌های دیگر ظاهر می‌شود ناشی از انتخاب مناسبی است که برای بردارهای پایه $\{\zeta\}$ انجام شده است. این انتخاب نیز با توجه به سه نیروی موجود در معادلهٔ (۲) حرکت، یعنی نیروی ناشی از δp، نیروی ناشی از $\delta\rho$ و δU، و نیروی برشی متناسب با μ، صورت پذیرفته است. بردارهای $\{\zeta_p\}$ بر نقش $\delta\rho$ و به تبع آن δp تاکید می‌گذارند و اختلالات آکوستیکی را سبب می‌شوند. بردارهای $\{\zeta_g\}$، برعکس، حرکات "نوع" همرفتی را بر می‌انگیزند که در معادلهٔ (۲) به‌خاطر نبودن فرایندهای برگشت‌ناپذیر، از نوع چسبندگی و غیره، یا به نوسانات g منجر می‌شوند و یا به حرکاتی که با زمان نمو نمایی دارند می‌انجامند. حالت اخیر وقتی است که شرط شوارتشسیلد برای حرکات همرفتی براورده شده باشد:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta\rho}\right)_{ad} - \frac{\delta p}{\delta\rho} > 0$$

نقش $\{\xi_i\}$ ها نیز روشن است – تنها حرکات برشی در قسمت جامد مدل را که در آن $\mu\neq0$ است نشان می‌دهند.

محاسبات عددی برای ساختارهای پلی‌تروپی انجام شده است. محاسبات برای زمین واقعی به‌دنبال خواهد آمد. در نوشتهٔ مقدماتی و کوتاه حاضر بیش از آنچه که در بالاآمد مجال پرداختن به جزئیات که ظرایف محاسباتی معادلهٔ (۱۲ – ب) را نشان دهد و پیچیدگیهای جوابها را بنمایاند نیست. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مقالات نویسنده که در بخش "مراجع" آمده و به مراجع دیگری که در این مقالات اشاره شده است مراجعه کند.

مرجعها

1. S., Chandrasekhar, *Stellar structure* Univ. Chicago Press, (1939).
2. T. G., Cowling, *Roy. Astron. Soc., Monthly Notices,* **101** (1941) 367.
3. F. A., Dahlen, *Geophys. J. Int.,* (1922) **111**, 11-31.
4. A. M., Dziewonski, and F., Gilbert, *Nature,* **234** (1971) 456.
5. G. D., Garland, Gerge *Introduction to Geophysics,* second edition, W. B. Sounders Company, Torento, (1979).
6. J. A., Jacobs, *Deep Interior of the earth,* London, (1993).
7. Jit, Singh, Sarra and Ben-Menahen, Ari, *Seismic Waves and Sources,* Springer, (1981).
8. C., Luh, Peter *Free Oscillation of the Laterally Inhomogenous Earth,* Geophysics. J. R. Astro. Soc. **32** (1973) 187-202.
9. C. L., Pekeris, Z., Alterman, and H., Jarosch, *Phys. Rev.,* (1961) 122, 1692.
10. Y., Sobouti, *Astron, Astrophys.,* (1977) **55**,327.
11. Y., Sobouti, *Astron, Astrophys.,* (1981) **100**, 319.
12. Y., Sobouti, *Astron, Astrophys.,* (1986) **169**,95.
13. R., Teisseyre, *Gravity and Low Frequency Geodynamics,* PWN-Polish Scientific Publishers, Warzawa, (1989).