مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱، شمارهٔ ۱، زمستان ۱۳۷۴

کوانتش دستگاههای فرافرمیونی و فرابوزونی مرتبهٔ ۲ به روش فراکروشهٔ پایرلز

علی مصطفی‌زاده

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

و

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

تاریخ دریافت: ۳۱ مرداد ۱۳۷۴

چکیده

در این مقاله حد کلاسیک دستگاههای کوانتومی با درجات آزاد فرافرمیونی و فرابوزونی مرتبهٔ ۲ بررسی شده است. کوانتش این دستگاهها با تعمیم روش کروشهٔ پایرلز و در چارچوب مکانیک لاگرانژی انجام شده و برای دستگاه فرافرمیونی مرتبهٔ ۲ یک بعدی کلیترین لاگرانژی ممکن به‌دست آمده است.

۱ - مقدمه

مقولهٔ فراآمار اولین بار در سال ۱۹۵۳ توسط گرین [۷] برای تعمیم نظریهٔ کوانتومی میدان مطرح شد و مطالعهٔ آن در دههٔ ۱۹۶۰ به انجام رسید [۸]. نتایج این مطالعات مفصل به‌وسیلهٔ اوهنوکی و کامفوچی [۱۲] گردآوری‌شده و به چاپ رسیده است. از جمله زمینه‌های مربوط به فراآمار، مطالعهٔ دستگاههای کلاسیک با درجات آزادی فراآماری و ساختارهای جبری وابسته به آنها یعنی جبر فراگراسمانی [۱۲] و به‌خصوص کاربرد فراآمار در نظریهٔ ریسمان [۲] و دستگاههای کوانتومی با تقارن داخلی [۶] را می‌توان برشمرد.

در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ اولین مدل کوانتومی فراابر تقارنی از طرف روباکوو وسپیریدونوو [۱۴] ارائه شد که به‌طور مشخص به فراآمار گرین [۷] مربوط بود. از انتشار مقالهٔ روباکوو وسپیریدونوو [۱۴] تاکنون دهها مقاله در توضیح، تعمیم، و بررسی پدیدهٔ فراابر تقارن منتشر شده است، اما تاکنون فرمولبندی لاگرانژی ـ انتگرال مسیری برای فراابر تقارن کوانتومی ارائه نشده است. اولین قدم در این راه، مطالعهٔ فراابر تقارن کلاسیک و کوانتش چنین دستگاههایی است.

اهمیت بررسی فراابر تقارن را می‌توان با توجه به این مهم که فراابر تقارن در حقیقت تعمیمی از ابر تقارن است، توجیه کرد. نقش ابر تقارن در زمینه‌های مختلف فیزیک نظری غیرقابل انکار است. از این‌رو فهم فراابر تقارن نیز از اهمیت خاصی برخوردار است.

یکی از جنبه‌های قابل توجه پدیدهٔ ابر تقارن رابطهٔ آن با ناورداهای توپولوژیک است. در سال ۱۹۸۲، ویتن [۱۵] در پی مطالعاتش در مکانیک کوانتومی ابر تقارنی، موفق شد رابطهٔ مستقیمی بین ابر تقارن و قضیهٔ آتیا - سینگر [۳] کشف کند. ایدهٔ ویتن در این زمینه به‌وسیلهٔ آلوارز -گومه [۱] ووینِدی [۱۶]، برای نخستین بار برای اثبات ابر تقارنی قضیهٔ اندیس به‌کار گرفته شد. این روش بعدها دقیقتر شده و جنبه‌های مختلف استفاده از ابر تقارن و روش انتگرال مسیر مورد مطالعه قرار گرفته است [۹].

مرجع [۱۰] به بررسی خواص توپولوژیکی پدیدهٔ فراابر تقارن می‌پردازد و ناورداهای توپولوژیکی خاصی را معرفی می‌کند که وابسته به ردهٔ خاصی از دستگاههای کوانتومی فراابر تقارنی است. رابطهٔ این ناورداها با قضیهٔ اندیس نیز اخیراً به اثبات رسیده است [۱۱]، که انگیزهٔ نویسنده از مطالعه فراابر تقارن را توجیه می‌کند.

در این مقاله، ابتدا فراآمار را تعریف و ساختار جبری عملگرهای آفرینش و نابودگر فرافرمیونی و فرابوزونی را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳، ساختار ریاضی ابر تقارن را بررسی می‌کنیم و روش کروشهٔ پایرلز برای کوانتش دستگاههای ابر تقارنی کلاسیک را توضیح می‌دهیم. بخش ۴،

به تعمیم روش کوانتش پایرلز برای دستگاههای کلاسیک با درجات آزادی فرافرمیونی و فرابوزونی مرتبهٔ ۲ اختصاص یافته است. در این بخش با به‌کارگیری قید تناظر کوانتش کانونیک و کوانتش به روش پایرلز، کلیترین لاگرانژی برای دستگاه فرافرمیونی یک بعدی نیز به‌دست آمده است. در بخش ۵ خلاصهٔ نتایج و توضیحات نهایی بررسی می‌شود.

۲- فراآمار و ساختار ریاضی آن

برنامهٔ کوانتش ثانویهٔ [۴] طبیعیترین روش برای مطالعهٔ نظریه‌های کوانتومی میدان است. در این برنامه حالتهای نظریه با تأثیر عملگرهای آفرینش بر حالت خلأ به‌دست می‌آیند. به‌طور خلاصه کوانتش ثانویه بر فرض وجود حالت خلأ $|\,0>$ و عملگرهای آفرینش a_k^+ و نابودگر a_k استوار است. در اینجا اندیس k برای مشخص‌کردن درجات آزادی (ذرات) به‌کار می‌رود. در نظریهٔ میدان کوانتومی چنین فضایی را فضای Fock می‌نامند. این فضا را می‌توان به‌عنوان ضرب تانسوری فضای هیلبرت بی‌نهایت نوسانگر درنظر گرفت. فضای هیلبرت یک نوسانگر هماهنگ با تأثیر عملگرهای a، a^+ بر روی یک حالت $|\,0>$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\,n>=a^{+^n}\,|\,0>$$

تأثیر عملگرهای آفرینش و نابودگر بر این بردارهای پایه با روابط:

$$a^{+^m}\,|\,n>=|\,m+n> \qquad (۲-۱)$$

$$a^m\,|\,n>=\begin{cases} 0 & \text{اگر } n<m \\ |\,n-m> & \text{اگر } n\geq m \end{cases} \qquad (۲-۲)$$

بیان می‌شوند و تعداد ذرات با تأثیر عملگر شمارش N :

$$N\,|\,n>=n\,|\,n> \qquad (۲-۳)$$

داده می‌شود. با فرض ارتونورمال بودن بردارهای پایه:

$$<n\,|\,m>=\delta_{nm}$$

و استفاده از روابط (۲-۱) و (۲-۲) می‌توان درستی معادلات زیر را به‌سادگی اثبات کرد:

$$\begin{aligned}[]
[a,N]&=a\\
[a^\dagger,N]&=-a^\dagger\\
N^\dagger&=N
\end{aligned} \qquad (۲-۴)$$

این روابط را می‌توان به‌سهولت به دستگاههای چندبعدی (بس ذره‌ای) تعمیم داد و از آنها به‌عنوان روابط تعریف کنندهٔ عملگرهای آفرینش، نابودگر و شمارش استفاده کرد. در این صورت داریم:

$$\left[a_k,N_l\right]=\delta_{kl}a_l \qquad (۲-۵)$$

$$\left[a_k^\dagger,N_l\right]=-\delta_{kl}a_l^\dagger \qquad (۲-۶)$$

$$\left[N_k,N_l\right]=0 \qquad (۲-۷)$$

$$N_k^\dagger=N_k \qquad (۲-۸)$$

در اینجا رابطهٔ (۲-۷) در حکم عدم وابستگی بین درجات آزادی مختلف است.

ساختار جبری کوانتش ثانویه یعنی معادلات (۲-۵) تا (۲-۸) ربطی به آمار حاکم بر ذرات (درجات آزادی) ندارد. در واقع آمار مقوله‌ای است جدا که برای دستگاههای کوانتومی بس ذره‌ای متشکل از ذرات همسان مطرح می‌شود.

تعریف [۶]: فراآمار یا آمار کلی ذرات همسان به آماری گفته می‌شود که در آن تعداد ذرات در یک حالت متقارن یا پادمتقارن نتواند از یک عدد صحیح مشخص (p) فراتر رود. عدد (p) مرتبهٔ فراآمار نامیده می‌شود. تعریف بالا برای p=1، آمار معمول در نظریهٔ کوانتومی میدان را به‌دست می‌دهد و در این صورت دو نوع آمار برای ذرات همسان وجود دارد که به ترتیب آنها را آمار فرمیونی و بوزونی می‌گویند. برای $p>1$ دو گروه یادشده را ذرات با آمارهای فرامیونی و یا بوزونی می‌نامند.

تعریف فراآمار از تعدادی فرضیهٔ بنیادی نظریهٔ کوانتومی میدان نتیجه می‌شود [۶]، [۲] و به‌طور کمی به تعریف عملگر شمارش به‌صورت:

$$\begin{aligned}
N_k&:=\tfrac{1}{2}\left[a_k^\dagger,a_k\right]_\mp\pm\tfrac{p}{2}\\
&:=\tfrac{1}{2}\left(a_k^\dagger a_k\mp a_k a_k^\dagger\right)\pm\tfrac{p}{2}
\end{aligned} \qquad (۲-۹)$$

منجر می‌شود. در این رابطه علائم +، − به‌ترتیب به آمار فرابوزونی و فرافرمیونی مربوط می‌شوند. با قراردادن تساوی (۲-۹) در معادلات (۲-۵)، (۲-۶)، (۲-۷) داریم:

$$\left[a_k,[a_l^\dagger,a_l]_\mp\right]=2\delta_{kl}a_l \qquad (۲-۱۰)$$

$$\left[a_k^\dagger,[a_l^\dagger,a_l]_\mp\right]=-2\delta_{kl}a_l^\dagger \qquad (۲-۱۱)$$

$$\left[[a_k^\dagger,a_k],[a_l^\dagger,a_l]\right]=0 \qquad (۲-۱۲)$$

این روابط را می‌توان با استفاده از اصل عدم وابستگی آنها به نمایش عملگرهای آفرینش و نابودگر و به‌کارگیری اتحاد ژاکوبی به روابط زیر تعمیم داد [۱۲]

$$[a_k,[a_l^\dagger,a_m]_\mp]=2\delta_{kl}a_m \qquad (۲-۱۳)$$

$$[a_k,[a_l^\dagger,a_m^\dagger]_\mp]=2\delta_{kl}a_m^\dagger\mp 2\delta_{km}a_l^\dagger \qquad (۲-۱۴)$$

$$[a_k,[a_l,a_m]_\mp]=0 \qquad (۲-۱۵)$$

از تساویهای حاصل (۲-۱۳)، (۲-۱۵) معمولاً به‌عنوان روابط کلی تعریف‌کنندهٔ پدیدهٔ **فراآمار** یاد می‌کنند [۸،۷]. در این دیدگاه مرتبهٔ آمار به‌عنوان شاخص نمایشهای این جبر ظهور می‌کند [۸]، به این ترتیب که اگر فضای هیلبرت بردارهای حالت را با پایه‌های:

$$|k_1,\dots,k_l>:=a_{k1}^+\dots a_{kl}^+|0> \qquad (۲-۱۶)$$

بسازیم، این فضا که آن را A می‌نامیم، نمایشی برای عملگرهای a_k و a_k^+ به‌دست می‌دهد. در این نمایش داریم:

$$a_k|0>=0 \qquad (۲-۱۷)$$

$$a_k a_l^\dagger|0>=p_{kl}|0>,\quad p_{kl}\in\mathbb{C} \qquad (۲-۱۸)$$

با استفاده از حاصلضرب داخلی A و رابطهٔ (۲-۱۸) می‌توان نشان داد [۱۲] که این رابطه به تساوی:

$$a_k a_l^\dagger|0>=p\delta_{kl}|0> \qquad (۲-۱۹)$$

منتهی می‌شود (به عبارت دیگر $p_{kl}=p\delta_{kl}$) که در آن p یک عدد صحیح است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که معادلات (۲-۱۷)، (۲-۱۹) و فرض

$$N_k|0>=0 \qquad (۲-۲۰)$$

تعریف (۲-۹) را برای عملگر شمارشگر به‌دست می‌دهند.

گرین [۷] نمایش دیگری را برای جبر a_k و a_k^+ پیشنهاد کرده است که در آن تساویهای سه تایی (۲-۱۳) - (۲-۱۵) را می‌توان از تساویهای دوتایی به‌دست آورد. این نمایش که آن‌را نمایش گرین می‌نامند، از این جهت اهمیت کاربردی فراوانی دارد. به‌طور خلاصه می‌توان نشان داد که تساویهای (۲-۱۳) - (۲-۱۵) از روابط زیر به‌دست می‌آیند

$$a_i=:\sum_{\alpha=0}^{p-1}\xi_i^\alpha \qquad (۲-۲۱)$$

$$[\xi_i^\alpha,\xi_j^{\alpha+}]_{-\eta}=\delta_{ij} \qquad (۲-۲۲)$$

$$[\xi_i^\alpha,\xi_j^\alpha]_{-\eta}=0 \qquad (۲-۲۳)$$

$$[\xi_i^\alpha,\xi_j^{\beta+}]_\eta=[\xi_i^\alpha,\xi_j^\beta]_\eta=0\quad(\alpha\neq\beta) \qquad (۲-۲۴)$$

عملگرهای ξ_i^α و عملگرهای الحاقی آنان $\xi_i^{\alpha+}$ با رابطهٔ (۲-۲۱) به a_i و a_i^+ مربوط می‌شوند. این عملگرها را مختصات گرین a می‌نامند. در تساویهای (۲-۲۲) - (۲-۲۴)، اگر a_k عملگر فرابوزونی باشد $\eta=+$ و اگر a_k عملگر فرافرمیونی باشد $\eta=-$ است. مرتبهٔ آمار در این نمایش با تعداد مختصات گرین تعیین می‌شود و فضای هیلبرت نمایش B از بردارهای پایهٔ:

$$\left|\begin{matrix}a_1\dots a_l\\ i_1\dots i_l\end{matrix}\right\rangle:=\xi_{i_1}^{a_1\dagger}\dots\xi_{i_l}^{a_l\dagger}\left|0\right\rangle \qquad (۲-۲۵)$$

ساخته می‌شود. این نمایش نیز با شرط :

$$\xi_i^\alpha|0>=0 \qquad (۲-۲۶)$$

که در آن $|0>$ بردار حالت خلأ رابطهٔ (۲-۱۷) است، به‌طور یگانه تعریف می‌شود. به‌سادگی می‌توان نشان داد که اعضای نمایش A را می‌توان با توجه به رابطهٔ (۲-۲۱) و رابطهٔ الحاقی آن به‌صورت اعضای B نشان داد. از این‌رو A زیرفضایی از B را می‌سازد که باید برای توصیف خصوصیات فیزیکی یک سیستم فراآماری مورد استفاده قرار گیرد. به‌عبارت دیگر مختصات گرین تنها مفهوم ریاضی دارد و برای استخراج مفاهیم فیزیکی همواره باید به زیرفضای A رجوع شود. همچنین می‌توان نشان داد که نمایش A به‌عنوان حلقهٔ چندجمله‌ایهای تولیدشده به‌وسیلهٔ a_k^+ تحلیل‌ناپذیر است، در صورتی که نمایش B به‌عنوان حلقهٔ چندجمله‌ایهای تولید شده به‌وسیلهٔ $\xi_k^{\alpha+}$ نمایش تحلیل‌پذیری است [۸]. در مرجع [۱۲] رابطهٔ بین دو حلقهٔ B و A به تفصیل بررسی شده است.

مقولهٔ قابل توجه دیگر در این رابطه امکان وجود بیش از یک نوع ذرهٔ همسان است. در این صورت مسئلهٔ رابطهٔ جبری بین عملگرهای آفرینش و نابودگر هر یک از این ذرات با دیگری مطرح می‌شود. این مسئله در مرجع [۸] به‌طور کامل بررسی شده است. دو نوع ذره b و a با فراآمار p_b و p_a و عملگرهای نابودگر b_j و a_j را درنظر بگیرید:

$$a_i\left|0\right\rangle=b_j\left|0\right\rangle=0 \qquad (۲-۲۷)$$

می‌توان نشان داد که اگر $p_a\neq p_b$ باشد، در این صورت a_i^+ و a_i با b_j^+ و b_j جابه‌جا و یا پادجابه‌جا می‌شوند. در صورتی که

$p_a=p_b=p$ باشد این عملگرها در روابط فراآماریی صدق می‌کنند که بر دو نوع‌اند. برای توضیح این روابط می‌توان از نمایش گرین استفاده کرد. مختصات گرین با روابط

$$a_i =: \sum_{\alpha=0}^{P-1} \zeta_i^{\alpha} \;,\quad b_j =: \sum_{\alpha=0}^{P-1} \xi_j^{\alpha} \qquad (۲\text{-}۲۸)$$

$$i=1,\dots,N_a \;;\; j=1,\dots,N_b$$

$$a_i \left| 0 \right\rangle = b_j \left| 0 \right\rangle = \zeta_i^{\alpha} \left| 0 \right\rangle = \xi_i^{\alpha} \left| 0 \right\rangle = 0 \qquad (۲\text{-}۲۹)$$

تعریف می‌شوند. روابط فراآماری بین a_i و $a_i^{\dagger}$ و b_j را می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد [۸]

$$\left[\zeta_i^{\alpha},\xi_j^{\alpha}\right]_{-\eta} = \left[\zeta_i^{\alpha},\xi_j^{\alpha+}\right]_{-\eta} = 0$$

$$\left[\zeta_i^{\alpha},\xi_j^{\beta}\right]_{\eta} = \left[\zeta_i^{\alpha},\xi_j^{\beta+}\right]_{\eta} = 0 \qquad (\alpha\neq\beta) \quad (۲\text{-}۳۰)$$

که در آن η می‌تواند ± باشد. به ازای $\eta=+$ ذرات b و a نسبت به هم فرابوزونی و به‌ازای $\eta=-$ نسبت به هم فرافرمیونی نامیده می‌شوند. فراآمار نسبی که با علامت η در روابط (۲-۳۰) تعریف می‌شوند برای مورد آشنای p = ۱ یعنی فرمیونها و بوزونها به‌صورت ساده‌ای مطرح است. برای این ذرات دو فرمیون از نوع مختلف نسبت به هم آمار فرمیونی دارند و یک فرمیون با یک بوزون و یا دو بوزون نسبت به هم آمار بوزونی دارند. تعمیم این مهم به پدیدهٔ فراآمار ($p>1$) منجربه قرارداد "آمار نسبی طبیعی" می‌شود [۸]. در آمار نسبی طبیعی داریم:

(الف) – $p_a\neq p_b$ در این صورت اگر هر دو ذره فرافرمیونی باشند، آمار نسبی فرمیونی و در غیر این صورت بوزونی است.

(ب) – $p_a=p_b=p$ در این صورت اگر هر دو ذره فرافرمیونی باشند، آمار نسبی فرافرمیونی و در غیر این صورت فرابوزونی است. برای $p_a=p_b$(الف) وجود آمار نسبی فرمیونی به معنی، پادجابه‌جایی a_i و a_i^{+} و b_j و b_j^{+} و آمار نسبی بوزونی به معنی جابه‌جایی این عملگرهاست (نه مختصات گرین آنها).

۳- ابر نقارن کلاسیک و ابراعداد

دستگاههای کلاسیک با درجات آزادی فرمیونی اولین‌بار توسط برزین بررسی شدند [۴]. با مطالعهٔ ویژگیهای این دستگاهها و روشهای کوانتش آنان راه برای بررسی دستگاههای مکانیکی که متشکل از درجات آزادی فرمیونی و بوزونی بود هموارتر شد. نتیجهٔ تحقیقات در این زمینه حاکی از آن بود که اغلب مفاهیم مربوط به مکانیک کلاسیک را می‌توان به این‌گونه دستگاهها تعمیم داد. ابتکار "برزین" از طرف ریاضیدانها نیز مورد توجه قرارگرفت و نظریه‌هایی چون نظریهٔ ابر خمینه‌ها بر پایهٔ فیزیک کلاسیک فرمیونی بنا شد [۴].

ساختار جبری که می‌تواند برای توصیف دستگاههای مکانیکی با درجات فرمیونی و بوزونی ـ ابر دستگاهها مورد استفاده قرار گیرد، جبر گراسمان نامیده می‌شود. با استفاده از نوعی جبر گراسمانی می‌توان دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط را به دستگاه ابراعداد تعمیم داد و دیگر ساختارهای جبری و هندسی را براساس این دستگاه ابراعداد بنانهاد. این روش به‌طور بسیار کاملی از طرف دویت به‌کار گرفته شده است [۵].

تعریف: فضای برداری حقیقی V^N با پایهٔ $\{\xi^1, \dots, \xi^N\}$ و $V_c^N := V^N\otimes_R \mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم. با تبدیل بردارهای پایهٔ ξ^a به مولدهای یک جبر شرکت‌پذیر، V_c^N را می‌توان به یک جبر شرکت‌پذیر تبدیل کرد. اگر عمل جبر را با * نشان دهیم، روابط:

$$\xi^a * \xi^b = -\xi^b * \xi^a \qquad a,b = 1,\dots,N \qquad (۳\text{-}۱)$$

جبری را روی V_c^N تعریف می‌کنند که آن را جبر گراسمان می‌نامند و با علامت Λ^N نشان می‌دهند. در محاسبات برای اختصار عمل جبر * نوشته نمی‌شود و معمولاً رابطهٔ (۳-۱) به‌صورت ساده‌تر:

$$\xi^a\xi^b = -\xi^b\xi^a \qquad \left[\xi^a,\xi^b\right]_+ = 0 \qquad (۳\text{-}۲)$$

و اعضای جبر به‌صورت

$$z\in\Lambda^N \qquad z = z_0 + \sum_{k=1}^{N} C_{a_1,\dots,a_k}\xi^{a_1}\dots\xi^{a_k} \qquad (۳\text{-}۳)$$

نشان داده می‌شوند. در رابطهٔ (۳-۳) $C_{a_1},\dots, a_k$, z_0 اعداد مختلط‌اند و قرار داد جمع روی اندیسهای تکرارشده، یعنی $a_1,\dots, a_k=1,\dots, N$ به‌کار رفته است. این قرار داد در مباحث بعدی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. برای تعریف ابراعداد، جبر گراسمان Λ^∞ را درنظر می‌گیریم. این جبر (همچون Λ^N با $N<\infty$) از دو زیرمجموعهٔ

$$\Lambda_c^\infty := \left\{ z\in\Lambda^\infty : z = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{a_1,\dots,a_{2k}}\xi^{a_1}\dots\xi^{a_{2k}} \right\} \qquad (۳\text{-}۴)$$

$$\Lambda_a^\infty := \left\{ z\in\Lambda^\infty : z=\sum_{k=1}^{\infty} C_{a_1,\dots,a_{2k-1}}\zeta^{a_1}\dots\zeta^{a_{2k-1}} \right\} \quad (۵-۳)$$

تشکیل می‌شود. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد کـه Λ_c^∞ یک زیرجبر جابه‌جایی Λ^∞ را تشکیل می‌دهد. اعضای $\Lambda^\infty, \Lambda_c^\infty, \Lambda_a^\infty$ را بـه‌ترتیب ابرعدد، ابـرعدد جـابه‌جایی (بـوزونی ـ زوج) و ابرعدد پادجابه‌جایی (فرمیونی ـ فرد) می‌نامند. روابط

$$\Lambda_c^\infty * \Lambda_c^\infty = \Lambda_c^\infty \quad (۶-۳)$$

$$\Lambda_c^\infty * \Lambda_a^\infty = \Lambda_a^\infty \quad (۷-۳)$$

$$\Lambda_a^\infty * \Lambda_a^\infty = \Lambda_c^\infty \quad (۸-۳)$$

ایـن نـامگذاری را بـه‌سادگی تـوجیه مـی‌کند. از طـرف دیگـر می‌توان عملگری تعریف کرد که در آن $\Lambda_c^\infty, \Lambda_a^\infty$ را به‌صورت ویژه فضاهای خود به‌دست دهد. این عملگر با $(-1)^\#$ نشـان داده می‌شود و با عبارات:

$$\#(z) := \begin{cases} 0 & \text{اگر } z\in\Lambda_c^\infty \\ 1 & \text{اگر } z\in\Lambda_a^\infty \end{cases} \quad (۹-۳)$$

و شرط خطی‌بودن روی Λ^∞ تعریف مـی‌شود. بـرای تـعریف ابراعداد حقیقی (و موهومی) عملگر مزدوج مختلط روی $\mathbb{C}$ را برای اعضای Λ^∞ تعمیم می‌دهند. به این ترتیب که

$$\begin{aligned} (C\zeta^a)^* &:= C^*\zeta^{a^*} := C^*\zeta^a \qquad \forall c\in\mathbb{C} \\ (z_1 z_2)^* &:= z_2^* z_1^* \qquad \forall z_1,z_2\in\Lambda^\infty \\ (z_1+z_2)^* &:= z_1^*+z_2^* \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

مجموعهٔ ابراعداد حقیقی فرمیونی و بوزونی با علائم $\mathbb{R}_a$ و $\mathbb{R}_c$ نشان‌داده شده و به‌صورت:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_a &:= \{ z\in\Lambda_a^\infty : z^*=z \} \\ \mathbb{R}_c &:= \{ z\in\Lambda_c^\infty : z^*=z \} \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

تعریف می‌شوند.

متغیرهای فرمیونی که در نظریه‌های فیزیکی در محاسبات به‌کار می‌روند و اغلب متغیر گراسـمان نـامیده مـی‌شوند، در حقیقت ابراعداد پادجابه‌جایی و با شرط حقیقی‌بودن، اعضای $\mathbb{R}_a$ هستند. برای حفظ تناظر کامل بین درجات آزادی فرمیونی و بوزونی استفاده از همهٔ ابراعداد ضروری است. به این ترتیب مختصات جـابه‌جا شـونده یک دسـتگاه مکـانیکی را بـاید از اعضای Λ_c^∞ و در صورت حقیقی‌بودن از اعضای $\mathbb{R}_c$ انتخاب کرد که ساختار بسیار غنیتری از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ و حقیقی $\mathbb{R}$ دارند. با استفاده از ابراعداد می‌توان مفهوم ابرفضای برداری به‌ویژه $\mathbb{R}_a^N$ و $\mathbb{R}_c^N$ را تعریف کـرد. ایـن فـضاها بـرای تـعریف ابرخمینه‌ها که ساختار موضعی آنها بـه شـکل $\mathbb{R}_c^m \oplus \mathbb{R}_a^n$ داده می‌شود به‌کار می‌روند. به‌طور کلی ابرخمینه‌ها با ساختارهای هندسی و جبری روی آنها به‌عنوان فضای آرایش و یا فضای فاز ابردستگاههای مکانیکی به‌کار می‌روند و از ایـن نـظر در نظریه‌های فیزیکی مانند ابرگرانش حائز اهمیت فراوان هستند.

نکتهٔ قابل توجه در مورد ابردستگاههای مکانیکی تفاوت مـفهوم اَبـردستگاه بـا ابـر دسـتگاههای ابـرتقارنی است. ابردستگاههای ابرتقارنی بخشی از ابردستگاههای مکـانیکی را تشکیل می‌دهند که دینامیک آنها بر اثـر دسـته‌ای از تـغییر مـختصات کـه درجـات آزادی فـرمیونی و بـوزونی را بـا هـم مخلوط می‌کند، ناوردا باقی می‌ماند.

دینامیک یک ابردستگاه مکانیکی بـا یـک لاگـرانـژی و یـا هامیلتونی داده می‌شود. در فرمولبندی لاگرانژی ابـرمکانیک کلاسیک (غیرنسبیتی) لاگرانژی به‌صورت تابع:

$$L = L\left(\Phi^i, \dot{\Phi}^i, t\right) \in \mathbb{R}_c \quad (۱۲-۳)$$

داده می‌شود که در آن Φ^i مختصات مختلف سیستم، اعـم از بوزونی و فرمیونی، را نمایش می‌دهد و از ابراعـداد انـتخاب می‌شود، t , $\dot{\Phi}^i = \frac{d}{dt}\Phi^i$ به ترتیب زمان و مشتق Φ^i نسبت به زمـان هسـتند. مـعادلات دیـنامیکی ابـردستگاه بـا تـعریف تابعی کنش:

$$S[\Phi] := \int_\Phi L dt \quad (۱۳-۳)$$

و بـه‌دست‌آوردن اکسـترمم آن حـاصل مـی‌شود. در رابـطهٔ (۳-۱۳)، Φ مسیری در ابرخمینهٔ آرایش ابردستگاه است [۵]. معادلات دینامیکی به‌صورت:

$$\delta S[\Phi] := \delta\Phi^i \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi^i} S[\Phi] \right) = 0 \quad (۱۴-۳)$$

داده می‌شوند که در آن $\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi^i}$ به معنی مشتق تابعی S نسبت به Φ^i از سمت چپ است.

مثال ۱. لاگرانژی:

$$L_1 = \frac{i}{2}\delta_{ij}\psi^i\dot{\psi}^j \qquad \left(\psi^i\in R_a, i=1,\dots,N\right) \quad (۱۵-۳)$$

یک سیستم آزاد فرمیونی N بعدی را تعریف می‌کند. در اینجا δ_{ij} مولفه‌های تابع دلتای کرونکر است.

مثال ۲. لاگرانژی:

$$L_2=\frac{i}{2}\left[\delta_{ij}\,\psi^i\dot{\psi}^j+\omega\varepsilon_{ij}\,\psi^i\psi^j\right]$$

$$\psi^i\in\mathbb{R}_a\,,i=1,2,\omega\in\mathbb{R}^{\dagger}$$

$$\varepsilon_{ij}=-\varepsilon_{ij}=\begin{cases}0 & \text{اگر}\quad i=j\\ 1 & \text{اگر}\quad i<j\end{cases}\qquad (۳\text{-}۱۶)$$

یک سیستم نوسانگر فرمیونی را توصیف می‌کند [۵].

مثال ۳. لاگرانژی:

$$L_3=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)\quad,\quad x\in\mathbb{R}_c,\omega\in\mathbb{R}^{+}\qquad (۳\text{-}۱۷)$$

یک سیستم نوسانگر بوزونی را توصیف می‌کند.

مثال ۴. لاگرانژی زیر:

$$L_4=L_2+L_3\qquad (۳\text{-}۱۸)$$

که در آن L_2 و L_3 با معادلات (۳-۱۶)، (۳-۱۷) داده شده‌اند، یک نوسانگر با مختصات فرمیونی و بوزونی را توصیف می‌کند. این ابردستگاه دارای ابرتقارن:

$$\begin{aligned}\delta x&=i\psi^i\,\delta\xi_i\\ \delta\psi^i&=\left(\delta^{ij}\dot{x}-\omega\varepsilon^{ij}x\right)\,\delta\xi_i\end{aligned}\qquad (۳\text{-}۱۹)$$

است که در آن $\delta\xi_i$ متغیر فرمیونی بسیار کوچکی است [۵].

استفاده از فرمولبندی هامیلتونی ابرمکانیک کلاسیک به‌دلیل شکل لاگرانژی برای دستگاه فرمیونی آزاد (۳-۱۵) احتیاج به تعمق بیشتری دارد، زیرا تکانهٔ مزدوج ψ^i یعنی $\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}^i}L$ با ψ^i متناسب است و در واقع نوعی دستگاه مقید به‌دست می‌آید. اهمیت فرمولبندی هامیلتونی در کوانتش کانونیک ابردستگاههای کلاسیک است، اما استفاده از روش هامیلتونی حتی در مقولهٔ کوانتش نیز قابل اجتناب است. این مهم با استفاده از کوانتش کروشهٔ پایرلز میسر می‌شود [۱۳].

روش کوانتش پایرلز به این صورت است که ابتدا عملگر ژاکوبی، یعنی:

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi^i(t)}S[\Phi]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^j(t')}=:{}_{i,}S_{,j'}\qquad (۳\text{-}۲۰)$$

و سپس توابع گرین پیش افتاده $G^{+ij}(t,t')$ و پس افتاده $G^{-ij}(t,t')$ آن را به‌دست می‌آورند. این توابع با شرایط مرزی مذکور و معادلات

$$\int_0^T dt'\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi^i(t)}S[\Phi]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^j(t')}\right)G^{\pm jk}(t',t'')=-\delta_i^k\,\delta(t-t'')\qquad (۳\text{-}۲۱)$$

که به اختصار به‌صورت [۵]:

$${}_{i,}S_{,j'}G^{\pm j'k''}=-i\delta^{k''}\qquad (۳\text{-}۲۲)$$

نوشته می‌شوند، به‌طور یگانه تعیین می‌شوند. با در دست داشتن $G^{\pm jk''}$ کروشهٔ پایرلز طبق روابط:

$$\left[f(\Phi),g(\Phi)\right]_p:=f_{,i}\,\tilde{G}^{ij'}\,{}_{j',}g\qquad (۳\text{-}۲۳)$$

$$\tilde{G}^{ij'}:=G^{+ij'}-G^{-ij'}\qquad (۳\text{-}۲۴)$$

$$G^{\pm ij'}:=G^{\pm ij}(t,t')\qquad (۳\text{-}۲۵)$$

تعریف می‌شود. در تعریف (۳-۳۳)، f،g تابعهای اختیاری از درجات آزادی Φ^i است و در سمت راست این معادله مشتقات تابعی f از راست و g از چپ به‌کار رفته است. رابطهٔ (۳-۲۳) برای حالت خاص $g(\Phi)=f(\Phi)=\Phi^i$ به تساوی:

$$\left(\Phi^i(t),\Phi^j(t')\right)_p=\tilde{G}^{ij'}\qquad (۳\text{-}۲۶)$$

می‌انجامد.

برای کوانتش دستگاه کلاسیکی، Φ^i و توابع آنها به عملگرهای خطی تبدیل می‌شوند. جبر این عملگرها با رابطهٔ کوانتش پایرلز به‌صورت:

$$\left[\hat{\Phi}^i(t),\hat{\Phi}^j(t')\right]=i\hbar\,\hat{\tilde{G}}^{ij'}\qquad (۳\text{-}۲۷)$$

داده می‌شود. لازم به یادآوری است که رابطهٔ (۳-۲۷) برای $t\neq t'$ نیز صادق است و از این‌رو می‌توان از آن برای محاسبهٔ روابط جابه‌جایی بین $\hat{\Phi}^i$ و $\hat{\dot{\Phi}}^i$ استفاده کرد. مثلاً داریم:

$$\left[\hat{\Phi}^i(t),\hat{\dot{\Phi}}^j(t')\right]=i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t'}\hat{\tilde{G}}^{ij'}\right)\qquad (۳\text{-}۲۸)$$

$$\left[\hat{\dot{\Phi}}^i(t),\hat{\dot{\Phi}}^j(t')\right]=i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\tilde{G}}^{ij'}\right)\qquad (۳\text{-}۲۹)$$

این روش برخلاف پیچیدگی ظاهری آن، امتیازات کاربردی بسیاری بر کوانتش کانونیک دارد و نتایج کوانتش کانونیک را نیز برای همهٔ مثالهای شناخته‌شده به‌دست می‌دهد. مرجع [۹] امتیازات این روش را برای کوانتش دستگاه ابرتقارنی پیچیده‌ای نشان داده است.

۴- مکانیک کلاسیک با درجات آزادی فرافرمیونی، فرابوزونی مرتبهٔ ۲ وکوانتش آن به روش پایرلز

در این بخش به بررسی فراآمار مرتبهٔ ۲ می‌پردازیم. روابط اساسی معرف فرافرمیونها و فرابوزونهای مرتبهٔ ۲ = p را می‌توان با استفاده از روابط کلی (۲-۱۳)، (۲-۱۵)، (۲-۹) و (۲-۷) به‌صورت زیر نوشت [۱۲]

$$a_k a_l^+ a_m \pm a_m a_l^\dagger a_k = 2\delta_{kl} a_m \pm 2\delta_{lm} a_k \quad (۱-۴)$$

$$a_k a_l a_m^+ \pm a_m^+ a_l a_k = 2\delta_{lm} a_k \quad (۲-۴)$$

$$a_k a_l a_m \pm a_m a_l a_k = 0 \quad (۳-۴)$$

که در آن علائم + و − به‌ترتیب مربوط به فرافرمیونها و فرابوزونها می‌شود. درستی این تساویها را می‌توان با به‌کارگیری نمایش گرین (۲-۲۱) به‌طور مستقیم به اثبات رساند. برای سهولت محاسبات می‌توان اندیس دیگری را به عملگرهای آفرینش و نابودگر نسبت داد که فرافرمیونی و فرابوزونی بودن آنها را مشخص کند. درنتیجه روابط (۴-۱) و (۴-۳) به‌صورت:

$$a_k^\mu a_l^{\mu+} a_m^\mu - (-1)^\mu a_m^\mu a_l^{\mu+} a_k^\mu = 2\delta_{kl} a_m^\mu - (-1)^\mu 2\delta_{lm} a_k^\mu \quad (۴-۴)$$

$$a_k^\mu a_l^\mu a_m^{\mu\dagger} - (-1)^\mu a_m^{\mu\dagger} a_l^\mu a_k^\mu = 2\delta_{lm} a_k^\mu \quad (۵-۴)$$

$$a_k^\mu a_l^\mu a_m^\mu - (-1)^\mu a_m^\mu a_l^\mu a_k^\mu = 0 \quad (۶-۴)$$

نوشته می‌شوند، که در آنها ۰ = μ روابط فرابوزونی و ۱ = μ روابط فرافرمیونی را به‌دست می‌دهد. به همین ترتیب برای مختصات گرین داریم:

$$a_i^\mu =: \zeta_i^{0\mu} + \zeta_i^{1\mu} \quad (۷-۴)$$

$$\left[\zeta_i^{\alpha\mu}, \zeta_j^{\alpha\mu+}\right]_{-(-1)^\mu} = \delta_{ij} \quad (۸-۴)$$

$$\left[\zeta_i^{\alpha\mu} \zeta_j^{\alpha\mu}\right]_{-(-1)^\mu} = 0 \quad (۹-۴)$$

$$\left[\zeta_i^{\alpha\mu}, \zeta_i^{\beta\mu+}\right]_{(-1)^\mu} = \left[\zeta_i^{\alpha\mu}, \zeta_i^{\beta\mu}\right]_{(-1)^\mu} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)$$
(۱۰-۴)

برای سهولت محاسبات می‌توان عملگرهای خود الحاقی:

$$\theta_{i1}^{\alpha\mu} := \sqrt{\frac{h}{2}}\left(\zeta_i^{\alpha\mu} + \zeta_i^{\alpha\mu\dagger}\right) \quad (۱۱-۴)$$

$$\theta_{i2}^{\alpha\mu} := -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\zeta_i^{\alpha\mu} - \zeta_i^{\alpha\mu\dagger}\right) \quad (۱۲-۴)$$

را برای توصیف جبر (۴-۸) و (۴-۱۰) و در نتیجه (۴-۴) و (۴-۶) به‌کار برد. برای عملگرهای فرافرمیونی (۱ = μ) ابتدا فراکروشه‌ای تعریف می‌کنیم:

$$\left\| \theta_{im}^{\alpha 1}, \theta_{jn}^{\beta 1} \right\| := \theta_{im}^{\alpha 1} \theta_{jn}^{\beta 1} + (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{jm}^{\beta 1} \theta_{im}^{\alpha 1} \quad (۱۳-۴)$$

با استفاده از این فراکروشه جبر (۴-۸) و (۴-۱۵) برای (۰ = μ) به صورت:

$$\left\| \theta_{im}^{\alpha 1}, \theta_{jn}^{\beta 1} \right\| = \hbar \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (۱۴-۴)$$

در می‌آید. در حقیقت تعریف فراکروشهٔ || و || را می‌توان به همهٔ اعضای جبر (حلقهٔ) چندجمله‌ایها در $\theta_{im}^{\alpha 1}$ یعنی:

$$\tilde{B}^1 := \left\{ P = C_0 + \sum_{k=1}^{d} C_{i_1,\ldots,i_k m_1,\ldots,m_k \alpha_1,\ldots,a_k} \theta_{i_1 m_1}^{\alpha_1 1} \cdots \theta_{i_k m_k}^{\alpha_k 1} : \;\; C_0, C_{i_1 \ldots \alpha_k} \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{N} \right\} \quad (۱۵-۴)$$

تعمیم داد. این مهم با فرض خطی‌بودن || و || در هر دو ورودی و تعریف آن برای تک‌جمله‌ایهای پایه میسر است. اگر

$$M_i^1 := \theta_{i_1 m_1}^{\alpha_1 1} \cdots \theta_{i_{d_i} m_{d_i}}^{\alpha_{d_i} 1} \quad (۱۶-۴)$$

با ۲ ،۱ = i، دو تک‌جمله‌ای پایه باشند داریم:

$$\| M_1^1, M_2^1 \| := M_1^1 M_2^1 - (-1)^{\eta_1(M_1,M_2)} M_2^1 M_1^1 \qquad (۱۷-۴)$$

$$\eta_1\left(M_1^1, M_2^1\right) := d\left(M_1^1\right) d\left(M_2^1\right) + d\left(M_1^1\right) O\left(M_2^1\right) + d\left(M_2^1\right) O\left(M_1^1\right) \qquad (۱۸-۴)$$

$$d\left(M_I^1\right) := d_I = M_I^1 \quad \text{درجهٔ} \qquad (۱۹-۴)$$

$$O\left(M_I^1\right) := \sum_{k=1}^{d_I} \alpha_k = M_I^1 \quad \text{مجموع اندیسهای گرین} \qquad (۲۰-۴)$$

حد کلاسیک جبر عمگرها با تبدیل آنها به اعضای یک جبر تعریف شده با رابطهٔ (۴-۱۴) در حد $h = 0$ به‌دست می‌آید. در این حد برای تک‌جمله‌ایهای M_1 و M_2 نیز خواهیم داشت:

$$\| M_1^1, M_2^1 \| = 0 \qquad (۲۱-۴)$$

تعریف فراکروشه به شکل (۴-۱۷) کاربرد فراوانی در محاسبات دارد. مثلاً به‌راحتی می‌توان نشان داد که زیرمجموعهٔ $\tilde{B}^1$ متشکل از چندجمله‌ایهای با درجهٔ زوج یک زیرجبر جابه‌جایی است. این زیرجبر که آنرا با $\tilde{B}_c^1$ نشان می‌دهیم، با زیرجبر Λ_c^∞، جبر گراسمان متناظر است، اما اعضای $\tilde{B}_c^1$ فقط بین خود جابه‌جا می‌شوند و با دیگر اعضای $\tilde{B}^1$ جابه‌جا نمی‌شوند.

ساختارهای فوق را می‌توان برای فرابوزونهای مرتبهٔ ۲ نیز تکرار کرد. در این صورت تعریف فراکروشه به شکل:

$$\| \theta_{im}^{\alpha\circ}, \theta_{jn}^{\beta\circ} \| := \theta_{im}^{\alpha\circ} \theta_{jn}^{\beta\circ} - (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{jn}^{\beta\circ} \theta_{im}^{\alpha\circ} \qquad (۲۲-۴)$$

در می‌آید و روابط عملگرهای آفرینش و نابودگر (۴-۸) و (۴-۱۰) به ازای $\mu = 0$ به‌صورت:

$$\| \theta_{im}^{\alpha\circ}, \theta_{jn}^{\beta\circ} \| = i\hbar \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij} \varepsilon_{mn} \qquad (۲۳-۴)$$

نوشته می‌شود، که در آن ε_{mn} با رابطهٔ (۳-۱۶) تعریف شده است. بار دیگر می‌توان تعریف (۴-۲۲) را به حلقهٔ چندجمله‌ایها در $\theta_{im}^{\alpha\circ}$ تعمیم داد. این فضا را با $\tilde{B}^\circ$ نشان می‌دهیم. $\|$ و $\|$ بر $\tilde{B}^\circ$ با فرض خطی‌بودن در هر دو ورودی کروشه و تعریف آن برای تک‌جمله‌ایها به‌صورت:

$$\| M_1^\circ, M_2^\circ \| := M_1^\circ M_2^\circ - (-1)^{\eta_\circ(M_1^\circ, M_2^\circ)} M_2^\circ M_1^\circ \qquad (۲۴-۴)$$

$$\eta_\circ\left(M_1^\circ, M_2^\circ\right) := d\left(M_1^\circ\right) O\left(M_2^\circ\right) + d\left(M_2^\circ\right) O\left(M_1^\circ\right) \qquad (۲۵-۴)$$

داده می‌شود. حد کلاسیک جبر مختصات گرین و در نتیجه عملگرهای آفرینش و نابودگر فرابوزونی با رابطهٔ (۴-۲۳) و حد $h = 0$ به‌دست می‌آید. بار دیگر حد کلاسیک برای تک‌جمله‌ایها به‌صورت:

$$\| M_1^\circ, M_2^\circ \| = 0 \qquad (۲۶-۴)$$

در می‌آید. باید یادآور شد که روابط (۴-۲۱) و (۴-۲۶) برای حد کلاسیک جبرهای $\tilde{B}^1$ و $\tilde{B}^\circ$ برای همهٔ اعضای این جبرها یعنی چندجمله‌ایها صادق است.

یکی از نتایج مستقیم استفاده از فراکروشهٔ (۴-۲۴) این است که زیرمجموعهٔ چندجمله‌ایها با درجهٔ زوج $\tilde{B}_c^\circ$ یک زیرجبر جابه‌جایی را تشکیل می‌دهد ولی اعضای این زیرجبر با دیگر اعضای $\tilde{B}^\circ$ جابه‌جا نمی‌شوند.

اگر بخواهیم جبر مختصات گرین فرافرمیونی و فرابوزونی را با هم درآمیزیم و آنها را به‌عنوان زیرجبرهای یک جبر بزرگتر تلقی کنیم به روابط فراآمار نسبی طبیعی که در بخش ۳ معرفی شد نیازمند خواهیم بود. با شرط پیروی از این قرارداد، جبر مورد نظر با تعمیم تعریف فراکروشه به‌صورت:

$$\| \theta_{im}^{\alpha\mu}, \theta_{jn}^{\beta\nu} \| := \theta_{im}^{\alpha\mu} \theta_{jn}^{\beta\nu} - (-1)^{\mu\nu+\alpha+\beta} \theta_{jn}^{\beta\nu} \theta_{im}^{\alpha\mu} \qquad (۲۷-۴)$$

و رابطهٔ:

$$\| \theta_{im}^{\alpha\mu}, \theta_{jn}^{\beta\nu} \| = \hbar \delta_{ij} \delta^{\alpha\beta} [\, i(1-\mu)(1-\nu)\, \varepsilon_{mn} + \mu\nu\delta_{mn}] \qquad (۲۸-۴)$$

برای مولدهای جبر، $\theta_{im}^{\alpha\mu}$، داده می‌شود. تعریف فراکروشه‌ها برای تک‌جمله‌ایهای:

$$M_1 := \theta_{i_1 m_1}^{\alpha_1 \mu_1} \dots \theta_{i_{d_1} m_{d_1}}^{\alpha_{d_1} \mu_{d_1}} \quad , \quad M_2 := \theta_{j_1 n_1}^{\beta_1 \nu_1} \dots \theta_{j_{d_2} n_2}^{\beta_{d_2} \nu_{d_2}}$$

(۲۹-۴)

با رابطهٔ:

$$\| M_1, M_2 \| := M_1 M_2 - (-1)^{\eta(M_1, M_2)} M_2 M_1 \quad (۳۰\text{-}۴)$$

$$\eta(M_1, M_2) := \left(\sum_{k=1}^{d_1} \mu_k \right) \left(\sum_{l=1}^{d_2} \nu_l \right) + d_1 \sum_{l=1}^{d_2} \beta_l + d_2 \sum_{k=1}^{d_1} \alpha_k$$

(۳۱-۴)

داده می‌شود. این تعاریف برای همهٔ اعضای جبر چندجمله‌ایها در $\theta_{im}^{\alpha\mu}$ که با $\tilde{B}$ نشان می‌دهیم با شرط خطی‌بودن کروشه در هر دو ورودی آن تعمیم می‌یابد و حد کلاسیک به‌صورت

$$\| f, g \| = 0 \qquad f, g \in \tilde{B} \qquad (۳۲\text{-}۴)$$

نشان داده می‌شود.

با توجه به اینکه $\theta_{im}^{\alpha\mu}$ مختصات گرین متغیرهای فیزیکی هستند تنها زیرفضایی از $\tilde{B}$ به‌عنوان فضای فیزیکی مطرح است. در اینجا باید این مورد را نیز متذکر شد که گرچه تناظر نسبیی بین جبر گراسمان در مورد $p = 1$ و جبر $\tilde{B}$ برای $p = 2$ وجود دارد، اما این دو ساختار تفاوت بسیار عمده‌ای نیز دارند. به این ترتیب که جبر گراسمان Λ^{∞} هر دو نوع متغیر مورد نیاز برای پدیدهٔ ابر تقارن را به‌صورت مشخصی به‌دست می‌داد. درواقع بین مولدهای Λ^{∞} و ابر اعداد فرمیونی تفاوت بسیاری وجود داشت ولی در مورد $\tilde{B}$ مولدهای آن همان "فرااعدادی" هستند که برای توصیف درجات آزادی فرافرمیونی و فرابوزونی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در ادامهٔ این بخش به مبحث دستگاههای فرافرمیونی و کوانتش به روش پایرلز برای آنها می‌پردازیم. برای به‌دست آوردن لاگرانژی چنین سیستمی، ابتدا کلیترین لاگرانژی برای یک سیستم فرافرمیونی یک بعدی را به‌دست می‌آوریم. برای تحقق این امر نیز شرط تطابق کوانتش به‌روش پایرلز و کوانتش کانونیک را مبنا قرار می‌دهیم.

لاگرانژی یک سیستم فرافرمیونی یک بعدی به‌عنوان یک کمیت جبری باید جابه‌جاگر باشد، از این‌رو داریم

$$L = L(\psi, \dot{\psi}, t) \in \tilde{B}_c^1 \qquad (۳۳\text{-}۴)$$

که در آن ψ مختصات فرافرمیونی حقیقی، t زمان و $\tilde{B}_c^1$ زیرفضای زوج $\tilde{B}^1$ (۴-۱۵) است. اگر ψ را که متغیر فیزیکی است در نمایش گرین نمایش دهیم، داریم

$$\psi = \theta^0 + \theta^1, \dot{\psi} = \dot{\theta}^0 + \dot{\theta}^1$$
$$\theta^{\alpha} := \theta_{1_1}^{\alpha_1} \qquad (۳۴\text{-}۴)$$

با توجه به جبر سادهٔ θ^{α} (روابط ۴-۱۴، با $\hbar = 0$) می‌توان نشان داد که:

$$\psi^3 = \dot{\psi}^3 = 0 \qquad (۳۵\text{-}۴)$$
$$\psi\dot{\psi}^2 = -\dot{\psi}^2\psi \qquad (۳۶\text{-}۴)$$
$$\psi^2\dot{\psi} = -\dot{\psi}\psi^2 \qquad (۳۷\text{-}۴)$$
$$\psi^2\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}^2\psi^2 \qquad (۳۸\text{-}۴)$$

در اثبات این تساویها θ^{α} به‌عنوان مختصات گرین $\dot{\psi}$ که متغیر غیروابسته به ψ است، مطرح می‌شود. با توجه به رابطهٔ (۴-۳۰)، L باید به‌صورت چندجمله‌ایی زوج در متغیرهای ψ و $\dot{\psi}$ که فراگراسمان مرتبهٔ ۲ نیز نامیده می‌شوند [۱۲]، انتخاب شود. جملات درجه دو در ψ و $\dot{\psi}$ عبارت‌اند از: $\dot{\psi}^2$ و ψ^2 و $\dot{\psi}\psi$ و $\psi\dot{\psi}$. با استفاده از این جملات و روابط جبری (۴-۳۵) – (۴-۳۸) جملات واجد شرایط که مخالف صفرند عبارت‌اند از

$$\psi^2, \dot{\psi}^2, \psi^2\dot{\psi}^2, (\psi\dot{\psi})^r, (\psi\dot{\psi})^s$$
$$r, s \in \mathbb{N}$$

از طرفی نیز شرط حقیقی‌بودن L ایجاب می‌کند که:

$$L = \frac{A}{2}\psi^2 + \frac{B}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{C}{4}\psi^2\dot{\psi}^2 + \sum_{r=1}^{N} \left\{ J_r \left[(\psi\dot{\psi})^r + (\dot{\psi}\psi)^r \right] + iK_r \left[(\psi\dot{\psi})^r - (\dot{\psi}\psi)^r \right] \right\} \qquad (۳۹\text{-}۴)$$

در این رابطه، $A,B,C,J_r,\ K_r \in \mathbb{R}$ و $N \in \mathbb{N}$. حال با استفاده از نمایش گرین (۴-۳۴) و روابط جبری (۴-۱۴) در حد کلاسیک ($\hbar = 0$) می‌توان نشان داد که:

$$(\dot{\psi}\psi)^2 = (\psi\dot{\psi})^2 = 0 \qquad (۴\text{-}۴۰)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{d}{dt}(\psi^2) = \dot{\psi}\psi + \psi\dot{\psi} \qquad (۴\text{-}۴۱)$$

بنابراین با به‌کارگیری (۴-۴۰) و (۴-۴۱) در رابطهٔ (۴-۳۸) داریم:

$$L = \frac{A}{2}\psi^2 + \frac{B}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{C}{4}\psi^2\dot{\psi}^2 + i\frac{D}{4}(\psi\dot{\psi} - \dot{\psi}\psi) \qquad (۴\text{-}۴۲)$$

که در آن $D := 4K_1$. رابطهٔ (۴-۴۲) برحسب مختصات گرین به‌صورت:

$$\begin{aligned} L &= A\theta^0\theta^1 + B\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + C\theta^0\theta^1\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + \frac{iD}{2}\left(\theta^0\dot{\theta}^0 + \theta^1\dot{\theta}^1\right) \\ &= \frac{A}{2}\sigma_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta + \frac{B}{2}\sigma_{\alpha\beta}\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}^\beta + \frac{C}{4}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}\theta^\alpha\theta^\beta\dot{\theta}^\gamma\dot{\theta}^\delta + \frac{iD}{2}\delta_{\alpha\beta}\theta^\alpha\dot{\theta}^\beta \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۴۳)$$

نوشته می‌شود، که در آن

$$\sigma_{\alpha\beta} := \begin{cases} 0 & \text{اگر}\quad \alpha=\beta \\ 1 & \text{اگر}\quad \alpha\neq\beta \end{cases} \qquad (۴\text{-}۴۴)$$

برای وردش کنش (۳-۱۳) به روش مشتق‌گیری نسبت به مختصات گرین نیاز داریم. حساب دیفرانسیل برای مختصات گرین در مرجع [۱۲] بررسی شده است. برای $p = 2$ قوانین مشتق‌گیری را می‌توان با تعمیم فراکروشه به مشتقات جزئی نسبت به مختصات گرین به‌صورت بسیار ساده‌ای نشان داد. ابتدا فراکروشه را با رابطهٔ

$$\left\| R^{\alpha\mu}_{im}, S^{\beta\nu}_{jn} \right\| := R^{\alpha\mu}_{im} S^{\beta\nu}_{jn} - (-1)^{\mu\nu+\alpha+\beta} S^{\beta\nu}_{jn} R^{\alpha\mu}_{in}$$

$$R^{\alpha\mu}_{in}, S^{\alpha\mu}_{in} = \theta^{\alpha\mu}_{in} \ \text{ویا}\ \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^{\alpha\mu}_{in}} \ \text{ویا}\ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^{\alpha\mu}_{in}} \qquad (۴\text{-}۴۵)$$

تعریف می‌کنیم. سپس می‌توان روابط حساب دیفرانسیل را به‌صورت:

$$\left\| \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^{\alpha\mu}_{im}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^{\beta\nu}_{jn}} \right\| = \left\| \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^{\alpha\mu}_{im}}, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^{\beta\nu}_{jn}} \right\| = 0 \qquad (۴\text{-}۴۶)$$

$$\left\| \theta^{\alpha\mu}_{im}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^{\beta\nu}_{jn}} \right\| = \left\| \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^{\alpha\mu}_{im}}, \theta^{\beta\nu}_{jn} \right\| = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\,\delta_{mn} \qquad (۴\text{-}۴۷)$$

خلاصه کرد. معادلات دینامیک برای لاگرانژی (۴-۴۳) به‌صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} 0 &= S[\theta]\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} =: S_\alpha = L\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(L\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\dot{\theta}^\alpha}\right) \\ &= A\sigma_{\alpha\beta}\theta^\beta - B\,\sigma_{\alpha\beta}\ddot{\theta}^\beta - \frac{C}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}(\dot{\theta}^\gamma\theta^\delta\dot{\theta}^\beta + \theta^\gamma\dot{\theta}^\delta\dot{\theta}^\beta + \theta^\gamma\theta^\delta\ddot{\theta}^\beta - \dot{\theta}^\gamma\dot{\theta}^\delta\theta^\beta) - iD\delta_{\alpha\beta}\dot{\theta}^\beta \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۴۸)$$

این معادلات با قراردادن $\alpha = 1$ و $\alpha = 0$ شکل ساده‌تری به خود می‌گیرند. در این صورت داریم

$$A\theta^1 - B\ddot{\theta}^1 - C\left(2\theta^1\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + \theta^0\theta^1\ddot{\theta}^1\right) - iD\dot{\theta}^0 = 0 \qquad (۴\text{-}۴۹)$$

$$A\theta^0 - B\ddot{\theta}^0 - C\left(2\theta^0\dot{\theta}^0\dot{\theta}^1 + \theta^0\theta^1\ddot{\theta}^0\right) - iD\dot{\theta}^1 = 0 \qquad (۴\text{-}۵۰)$$

در حقیقت همان‌گونه که از شکل معادلات (۴-۴۹) و (۴-۵۰) برمی‌آید، مختصات گرین با اندیسهای مختلف به هم ربط داده شده‌اند و این با ساختار جبری مربوط در تناقض است. اما باید به‌یاد آورد که مختصات گرین درجات آزادی فیزیکی نیستند. معادلهٔ دینامیکی با مفهوم فیزیکی باید برحسب ψ نوشته شود.

چنین معادله‌ای با جمع طرفین (۴-۴۹)،(۴-۵۰) به‌دست می‌آید:

$$A\psi - B\ddot{\psi} - C\left(\psi\dot{\psi}^{2} + \frac{1}{2}\psi^{2}\ddot{\psi}\right) - iD\dot{\psi} = 0 \qquad (۵۱\text{-}۴)$$

این معادله را می‌توان به اجزای حقیقی و موهومی آن جدا کرد. در این صورت معادلات:

$$B\ddot{\psi} - A\psi = 0 \quad , \quad D\dot{\psi} - iC\left(\psi\dot{\psi}^{2} + \frac{1}{2}\psi^{2}\ddot{\psi}\right) = 0 \qquad (۵۲\text{-}۴)$$

به‌دست می‌آیند که با استفاده از رابطهٔ (۴-۳۵) ساده‌ می‌شوند:

$$B\ddot{\psi} - A\psi = 0 \quad , \quad (D - iC\psi\dot{\psi})\,\dot{\psi} = 0 \qquad (۵۳\text{-}۴)$$

برای تعیین ضرایب A,B,C,D می‌توان نتایج کوانتش دستگاه (۴-۴۲) را که به روش پایرلز انجام می‌شود با نتایج کوانتش کانونیک، یعنی رابطهٔ (۴-۲۸) مقایسه کرد. برای انجام کوانتش به روش پایرلز ابتدا عملگر ژاکوبی سیستم را به‌دست می‌آوریم. پس از انجام محاسبات لازم، داریم:

$$ {}_{\beta'},S_{,\alpha} = \left\{ \left[\sigma_{\alpha\beta}(-B + \frac{C}{2}\sigma_{\gamma\delta}\theta^{\gamma}\theta^{\delta})\right]\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} + \left[-iD\delta_{\alpha\beta} - C\left([(-1)^{\alpha+\beta} + 1]\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\delta\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\beta}\right)\theta^{\gamma}\dot{\theta}^{\delta}\right]\frac{\partial}{dt} + \left[A\sigma_{\alpha\beta} - C\left([\sigma_{\alpha\delta}\sigma_{\gamma_{\beta}} - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}]\dot{\theta}^{\gamma}\dot{\theta}^{\delta} + \sigma_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma}\theta^{\gamma}\ddot{\theta}^{\delta}\right)\right] \right\} \delta(t - t') \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

سپس توابع گرین پیش‌افتاده و پس‌افتاده را که با روابط (۳-۲۲) تعریف می‌شوند، محاسبه می‌کنیم. به این منظور این توابع گرین را به‌صورت

$$G^{\pm\alpha\gamma'} = \left[G_{0}^{\pm\alpha'\gamma'} + G_{1}^{\pm\alpha'\gamma'}(t - t') + \frac{1}{2}G_{2}^{\pm\alpha'\gamma'}(t - t')^{2} + \dots\right]\theta(\pm t' \mp t) \qquad (۵۵\text{-}۴)$$

بسط می‌دهیم، که در آن $G_i^{\pm\alpha\gamma'}$ توابعی از t' هستند. با قراردادن (۴-۵۴) و (۴-۵۵) در معادلهٔ (۴-۲۲) می‌توان $G_i^{\pm\alpha\gamma'}$ را به‌دست آورد. نتایج محاسبات به قرار زیر است

اگر $B \neq 0$ و یا $C \neq 0$ باشد، داریم $G_0^{\pm\alpha\gamma'} = 0$ در این صورت با توجه به رابطهٔ (۳-۲۴):

$$\tilde{G}^{\alpha\gamma'} = O(t - t') \qquad (۵۶\text{-}۴)$$

رابطهٔ (۴-۵۶) نشان می‌دهد که فراکروشهٔ پایرلز

$$\|\theta^{\alpha}(t), \theta^{\beta}(t')\|_{p} := \tilde{G}^{\alpha\beta'} \qquad (۵۷\text{-}۴)$$

برای $t = t'$ مقدار صفر را اختیار می‌کند:

$$\|\theta^{\alpha}(t), \theta^{\beta}(t)\|_{p} = 0 \qquad (۵۸\text{-}۴)$$

که بعد از کوانتش با نتایج کوانتش کانونیک یعنی

$$\left\|\hat{\theta}^{\alpha}(t), \hat{\theta}^{\beta}(t)\right\| = \hbar\,\delta^{\alpha\beta} \qquad (۵۹\text{-}۴)$$

تناقص دارد. از این‌رو شرط تطابق نتایج این‌دو روش به شرط $B = C = 0$ می‌انجامد. در این‌صورت عملگر ژاکوبی به شکل سادهٔ:

$${}_{\beta},S_{,\alpha} = \left\{-iD\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial t} + A\sigma_{\alpha\beta}\right\}\delta(t - t') \qquad (۶۰\text{-}۴)$$

در می‌آید و توابع گرین با توجه به بسط (۴-۵۵) به‌صورت:

$$G^{\pm\alpha\gamma'} = \left[\mp\frac{i}{D}\delta^{\alpha\gamma} + O(t - t')\right]\theta(\pm t' \mp t)$$

داده می‌شوند. در این صورت داریم

$$\|\theta^{\alpha}(t), \theta^{\beta}(t')\|_{p} = -\frac{i}{D}\delta^{\alpha\beta} + O(t - t') \qquad (۶۱\text{-}۴)$$

از طرف دیگر می‌توان با دوباره‌تعریف‌کردن مختصات ψ لاگرانژی (۴-۴۲)، مقدار D را ۱ فرض کرد. در این‌صورت، فراکروشهٔ پایرلز به‌صورت:

$$\|\theta^{\alpha}(t), \theta^{\beta}(t')\|_{p} = -i\delta^{\alpha\beta} + O(t - t')$$

در می‌آید و بعد از کوانتش به ازای $t = t'$ رابطهٔ

$$\left\|\hat{\theta}^{\alpha}(t), \hat{\theta}^{\beta}(t)\right\| := i\hbar\,\|\widehat{\theta^{\alpha}(t), \theta^{\beta}(t)}\|_{p} = \hbar\delta^{\alpha\beta} \qquad (۶۲\text{-}۴)$$

را نتیجه می‌دهد که با رابطهٔ (۴-۵۹) کاملاً سازگار است.

با این وصف، کلیترین لاگرانژی برای یک سیستم فرافرمیونی درجه ۲ با رابطهٔ

$$L=\frac{i}{4}(\psi\dot{\psi}-\dot{\psi}\psi)+\frac{A}{2}\psi^{2} \qquad (۴\text{-}۶۳)$$

داده می‌شود. با درنظر گرفتن تساوی (۴-۴۱) لاگرانژی (۴-۶۳) را به‌صورت معادل:

$$L=\frac{i}{2}\psi\dot{\psi}+\frac{A}{2}\psi^{2} \qquad (۴\text{-}۶۴)$$

نیز می‌توان نوشت. در مقایسه با رابطهٔ (۳-۱۵)، جملهٔ اول لاگرانژی (۴-۶۴) را می‌توان جملهٔ آزاد و یا جنبشی نامید. جملهٔ دوم نیز مانند یک پتانسیل نوسانگر (۳-۱۷) عمل می‌کند که مشابه فرمیونی ندارد.

با تعمیم رابطهٔ (۴-۶۴) به دستگاههای چندبعدی، لاگرانژی آزاد برای دستگاههای فرافرمیونی مرتبهٔ ۲ نیز با رابطهٔ (۳-۱۵) داده می‌شود.

برای دستگاههای فرابوزونی مرتبهٔ ۲ نیز می‌توان به همین ترتیب به بررسی لاگرانژی آزاد پرداخت. نتیجهٔ قابل ذکر آن است که شکل لاگرانژی آزاد و یا به عبارت دیگر شکل جملهٔ (انرژی) جنبشی برای چنین دستگاههایی متناظر با دستگاههای بوزونی است.

۵- نتیجه گیری

همانگونه که نشان داده شد روش کوانتش پایرلز راکه در چارچوب مکانیک لاگرانژی عمل می‌کند، می‌توان به دستگاههای فرافرمیونی و فرابوزونی مرتبهٔ ۲ نیز تعمیم داد. علاوه بر این، لاگرانژی آزاد برای چنین دستگاههایی در تناظر کامل با دستگاههای فرمیونی و بوزونی است. درنتیجه، برای مطالعهٔ چنین دستگاههایی فقط باید جملات پتانسیل گوناگونی را که البته الزاماً توابع زوجی از درجات آزادی هستند، به‌کار برد. با استفاده از نتایج مذکور می‌توان لاگرانژیهای مربوط به دستگاههای کلاسیک فراابر تقارنی را با توجه به شکل لاگرانژیهای ابرتقارنی، به‌دست آورد و به بررسی ساختار گروهی فراابر تقارن و فرمولبندی انتگرال مسیر برای کوانتش این دستگاهها پرداخت.

مرجعها

1. L. Alvarez-Gaume, *Commun. Math.Phys.* **90** (1983) 161.
2. F. Ardalan and F. Mansouri, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3341.
3. M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963)422; *Ann.Math* **87** (1968)546.
4. F. A. Berezin, *The Method of Second Quzntization* Academic Press, NewYork (1966).
5. B. S. Dewitt, *Supermanifolds* Cambridge Univ Press, Cambridge (1992).
6. A. B. Govorkov, Sov. J. Part. Nucl. **14** (1983)520.
7. H. S. Green, *Phys. Rev* **90** (1957)270.
8. O. W. Greenberg and A.M.L. Messiah, *Phys. Rev* **138**,B (1965)1155.
9. A. Mostafazadeh, J. *Math. Phys* **35** (1994)1095.
10. A. Mostafazadeh, "Spectrum Degeneracy of General (p=2)-Parasupersymmetric Quantum Mechanics and Parasupersymmetric topological Invariants," *Int. J. Mod. Phys. A.*, to appear (1995).
11. A. Mostafazadeh, "Topological Aspects of Parasuper – symmetry," Submitted to *Mod.Phys.Lett.* (1995).
12. Y. Ohnuki and S. Kamefuechi, *Quantum Field Theory and Parastatistics,* Springer-Verlag, Berlin (1982).
13. R.E.Peierls, *Proc.Roy.Soc,* (London) A **214**, (1952)143.
14. V. A. Rubakov and V. P. Spiridonov, *Mod.Phys. Lett* **A3**, (1988)1334.
15. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B202** (1982)263.
16. P. Windey, *Acta Physica Polonica* **B15** (1984)453.