

## بررسی دینامیک کوانتومی مدارهای الکتریکی مزوسکوپی با بار گسسته

فردین خیراندیش<sup>۱</sup> و حسن پهلوانی<sup>۲</sup>

۱. گروه فیزیک دانشگاه اصفهان

پست الکترونیکی: fardin\_kh@phys.ui.ac.ir

۲. گروه فیزیک دانشگاه قم

پست الکترونیکی: h\_pahlavaniha@yahoo.com

(دریافت مقاله: ۸۶/۸/۱۳ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۷/۴/۲۳)

### چکیده

دینامیک کوانتومی یک ذره باردار در زنجیره‌ای نامتناهی از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قوی، تحت تأثیر یک میدان خارجی وابسته به زمان بررسی شده است. ارتباط بین هامیلتونی چنین ذره‌ای با هامیلتونی مدارهای کوانتومی مزوسکوپی با بار گسسته روشن گردیده و بر این اساس جریان ماندگاری برای یک حلقه کوانتومی بدون اتلاف محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های مزوسکوپی، بار گسسته، جبر دینامیکی

### ۱. مقدمه

(طول همدوسی حاملها حداکثر فاصله‌ای است که یک ذره می‌تواند با حفظ اطلاعات مربوط به فاز خود طی نماید) برای بررسی دینامیک سامانه، باید مکانیک کوانتومی به کار گرفته شود. در این حالت گسسته بودن بار (بارها مضارب درستی از بار الکترون هستند) در بررسی مدارهای کوانتومی مزوسکوپی باید به حساب آورده شود.

برای اولین بار لی و چن یک نظریه کوانتومی برای مدارهای مزوسکوپی با بار گسسته ارائه نمودند [۷]. در این نظریه گسسته بودن بار الکتریکی توسط عملگر خودالحاق بار  $q$  که دارای یک طیف گسسته است در نظر گرفته می‌شود. یک مدل ساده از چنین سامانه‌هایی مدارهای کوانتومی  $LC$  هستند که با دو پارامتر اساسی القایدگی  $L$  و ظرفیت  $C$  توصیف می‌شوند [۷، ۸، ۹]. نظریه لی و چن در مسائل متنوعی مربوط به مدارهای مزوسکوپی به کار گرفته شده است [۷، ۹، ۱۰-۱۴].

دینامیک کوانتومی یک ذره باردار در یک پتانسیل دوره‌ای تحت اثر یک میدان خارجی یک پدیده جالب و مهم در فیزیک کوانتومی است [۱، ۲]. بلوخ در مرجع [۲] پیشگویی کرد که تابع موج یک ذره باردار در یک بلور ایده آل تحت میدان الکتریکی یکنواخت تغییر مکان پیدا می‌کند و منجر به نوسانهای تناوبی معروف به نوسانات الکترونی بلوخ می‌شود [۳، ۴]. برای مطالعه این ساختارها حالت‌های جای‌گزیده که به حالت‌های وانیر-استارک معروفند و نقش مهمی در خواص انتقال الکترونی جامدات دارند مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵، ۶]. این ساختارها که ابعادی در حدود  $10\text{ nm}$  دارند به سامانه‌های مزوسکوپی یا نانو ساختارها معروفند. در چنین سامانه‌هایی رفتار الکترون به صورت موجی است و این رفتار به شکل هندسی نمونه بستگی دارد. وقتی ابعاد سامانه در حدود طول همدوسی حاملهاست

این عملگرها روی حالت‌های واینر به شکل زیر عمل می‌کنند

$$\hat{K}^\dagger |j\rangle = |j+1\rangle \quad \hat{K} |j\rangle = |j-1\rangle, \quad (4)$$

$$\hat{N} |j\rangle = j |j\rangle,$$

و مجموعه عملگرهای  $\{\hat{K}, \hat{K}^\dagger, \hat{N}\}$  جبر لی زیر را ارضا می‌کنند

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{K}] &= -\hat{K} & [\hat{N}, \hat{K}^\dagger] &= \hat{K}^\dagger \\ [\hat{K}, \hat{K}^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

برای بررسی دینامیک سامانه مورد نظر، عملگر تحول زمانی در روش جبر دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha(t) \hat{N}} e^{-\frac{i}{\hbar} \beta(t) \hat{K}} e^{-\frac{i}{\hbar} \gamma(t) \hat{K}^\dagger} \quad (6)$$

که در آن  $\alpha(t)$ ،  $\beta(t)$  و  $\gamma(t)$  توابعی هستند که از معادلهٔ مربوط به  $\hat{U}(t)$  باید محاسبه شوند. بنابراین با جایگذاری رابطهٔ (۶) در معادلهٔ تحول:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{H}(t) \hat{U}(t), \quad (7)$$

و استفاده از فرمول بیکر - هاسدورف، توابع  $\alpha(t)$ ،  $\beta(t)$  و  $\gamma(t)$  به صورت زیر تعیین می‌گردند

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_0^t F(t') dt', \\ \beta(t) &= \int_0^t G(t') e^{\frac{i}{\hbar} \alpha(t')} dt', \\ \gamma(t) &= \beta^*(t) = \int_0^t G(t') e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha(t')} dt'. \end{aligned} \quad (8)$$

در نتیجه با معلوم بودن میدان خارجی  $F(t)$  و تابع جفت شده گی  $G(t)$  می‌توان عملگر تحول زمانی  $\hat{U}(t)$  را محاسبه نمود.

### ۳. مدارهای مزوسکوپي

همیلتونی  $\hat{H}$  برای مدارهای کوانتومی LC به صورت زیر است [۷]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2L} + \frac{\hat{q}^2}{2C}. \quad (9)$$

در این مقاله ویژگی‌های دینامیک کوانتومی مدارهای الکتریکی مزوسکوپي تحت یک میدان خارجی اختیاری بر اساس روش جبر دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۲ حرکت یک ذره کوانتومی باردار در یک زنجیره نامتناهی از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قوی و تحت اثر یک میدان خارجی بررسی شده است. عملگر تحول زمانی را برای این مسئله به دست آورده و نشان می‌دهیم که با حل ارائه شده در مرجع [۱۵] سازگاری کامل دارد. در بخش ۳ ارتباط بین نوسانات بلوخ در یک بلور تحت میدان خارجی با نوسانات ناشی از جریان و بار در یک مدار کوانتومی مزوسکوپي نشان داده شده است. در این بخش عملگر جریان برای مدار مزوسکوپي L (حلقه کوانتومی) محاسبه شده است. در بخش چهارم بحث و نتیجه گیری ارائه گردیده است.

### ۲. عملگر تحول زمانی

حرکت یک ذره باردار در یک زنجیره نامتناهی از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قوی و تحت اثر یک میدان اختیاری وابسته به زمان  $F(t)$  با همیلتونی زیر توصیف می‌شود

$$\hat{H}(t) = G(t) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (|j\rangle \langle j+1| + |j+1\rangle \langle j|) + F(t) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j |j\rangle \langle j| \quad (1)$$

که در آن  $|j\rangle$  بیانگر یک حالت واینر جایگزیده در مکان  $j$  است، این حالتها متعامدند. تابع حقیقی  $G(t)$  تابع جفت شده گی انتگرال همپوشانی نزدیکترین همسایه‌ها است. بر اساس روش جبر دینامیکی همیلتونی مدل بستگی قوی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۵]:

$$\hat{H}(t) = G(t)(\hat{K} + \hat{K}^\dagger) + F(t)\hat{N}, \quad (2)$$

که در آن عملگرهای بالا برنده  $\hat{K}^\dagger$  و پایین آرونده  $\hat{K}$  و عملگر موقعیت  $\hat{N}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\hat{K}^\dagger = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |j+1\rangle \langle j|, \quad \hat{K} = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |j\rangle \langle j+1|, \quad (3)$$

$$\hat{N} = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} j |j\rangle \langle j|.$$

در هامیلتونی مدل بستگی قوی (۲) و عملگرهای نردبانی  $\hat{Q}$ ،  $\hat{Q}^\dagger$  و بار  $\hat{q}$  در هامیلتونی مدارهای الکتریکی مزوسکوپی (۱۵) دارای ساختار جبری یکسانی هستند و دستگاههای  $L = \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger, \hat{q}\}$  و  $L = \{\hat{K}, \hat{K}^\dagger, \hat{N}\}$  به طور جداگانه تشکیل جبر لی می‌دهند. بنابراین می‌توانیم عملگرهای  $\hat{Q}$ ،  $\hat{Q}^\dagger$  و  $\hat{q}$  بر حسب حالت‌های جای‌گزیده وانیر-استارک بنویسیم

$$\hat{Q}^\dagger = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |j+1\rangle\langle j| = \hat{K}^\dagger, \quad \hat{Q} = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |j\rangle\langle j+1| = \hat{K}, \quad (17)$$

$$\hat{q} = q_e \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} j |j\rangle\langle j| = q_e \hat{N}.$$

با توجه به هم‌ارزی بین مولدهای ساختار جبر لی در مدارهای کوانتومی مزوسکوپی و نوسانات بلوخ در بلور می‌توان نتیجه گرفت که نوسانات بار و جریان در مدارهای کوانتومی مزوسکوپی با بار گسسته، معادل نوسانات بلوخ در بلور است. این تشابه به کوانتش بار ربط پیدا می‌کند، که در آن بار نقش مشابه با ثابت شبکه در بلور را بازی می‌کند. از آن جایی که نوسانات بلوخ پدیده‌ای همدوسند، مطالعه فرایندهایی که سبب ناهمدوس شدن سامانه می‌شوند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از این فرایندهای ناهمدوس، برهم‌کنش بین اتمها است. برهم‌کنش بین اتمها باعث از بین رفتن هم‌ارزی روابط جابه‌جایی (۵) و (۱۴) می‌گردد، دینامیک چنین سامانه‌هایی را می‌توان در یک شبکه اپتیکی بر اساس مدل بوز-هابارد در تقریب مدل بستگی قوی با روشهای تقریبی مورد مطالعه و بررسی قرار داد [۱۶ و ۱۷].

تحول عملگر جریان  $\hat{I}(t)$  را می‌توان از معادله حرکت هایزنبرگ

$$\hat{I} = \frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}, \hat{H}]$$

به دست آورد در لحظه  $t=0$  داریم

$$\hat{I} = \frac{\hbar}{iLq_e} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (|j\rangle\langle j+1| - |j+1\rangle\langle j|). \quad (18)$$

ویژه مقادیر و ویژه توابع عملگر جریان  $\hat{I}(0)$  به صورت زیر هستند:

$$I_\varphi = \frac{\hbar}{Lq_e} \sin\left(\frac{q_e}{\hbar} \varphi\right) \quad |I_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{ijq_e}{\hbar} \varphi\right) |j\rangle, \quad (19)$$

عملگرهای هرمیتی بار  $\hat{q}$  و تکانه متناظر  $\hat{p}$  در رابطه جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (10)$$

در نظریه لی و چن عملگر بار  $\hat{q}$  دارای طیف گسسته به صورت  $nq_e$  می‌باشد که در آن  $n$  یک عدد صحیح و  $C = 1/602 \times 10^{-19}$  کوانتوم بار (بار الکترون) می‌باشد.

$$\hat{q}|q\rangle = nq_e|q\rangle. \quad (11)$$

مشتق‌های گسسته به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\nabla_q = \frac{\hat{Q}-1}{q_e}, \quad \bar{\nabla}_q = \frac{1-\hat{Q}^\dagger}{q_e}, \quad (12)$$

که در آن عملگرهای  $\hat{Q}$  و  $\hat{Q}^\dagger$  به صورت زیر هستند

$$\hat{Q} = \exp\left(\frac{iq_e \hat{p}}{\hbar}\right), \quad \hat{Q}^\dagger = \exp\left(\frac{-iq_e \hat{p}}{\hbar}\right), \quad (13)$$

عملگرهای  $\hat{q}$ ،  $\hat{Q}$  و  $\hat{Q}^\dagger$  در جبر زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{Q}] &= -q_e \hat{Q} & [\hat{q}, \hat{Q}^\dagger] &= q_e \hat{Q}^\dagger \\ [\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}] &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که با باز تعریف  $\hat{Q} = \hat{K}$  و  $\hat{Q}^\dagger = \hat{K}^\dagger$ ،  $\hat{q} = q_e \hat{N}$  معادل جبر (۵) می‌شود.

هامیلتونی مدار کوانتومی مزوسکوپی  $LC$  با احتساب گسسته بودن بار به صورت زیر نوشته می‌شود که در حد  $q_e \rightarrow 0$  به هامیلتونی مدارهای کوانتومی با بار پیوسته میل می‌کند

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2Lq_e^2} (\hat{Q} + \hat{Q}^\dagger - 2) + \frac{\hat{q}^2}{2C}. \quad (15)$$

### ۳.۱. مدار کوانتومی $L$ (حلقه کوانتومی)

هامیلتونی وابسته به زمان (۱۵) برای مدار  $L$ ، در نمایش بار و تحت تأثیر پتانسیل خارجی، به شکل زیر است:

$$\hat{H}(t) = -\frac{\hbar^2}{2Lq_e^2} (\hat{Q} + \hat{Q}^\dagger - 2) + \varepsilon(t)\hat{q}, \quad (16)$$

این هامیلتونی با هامیلتونی مدل بستگی قوی (۲) معادل است. زیرا با مقایسه روابط جابه‌جایی (۵) و (۱۴) می‌توان نتیجه گرفت که عملگرهای پایین آورنده  $\hat{K}$ ، بالا برنده  $\hat{K}^\dagger$  و موقعیت  $\hat{N}$

و جریان به صورت زیر به دست می‌آید :

$$I_\varphi = \langle I_\varphi, t | \hat{I} | I_\varphi, t \rangle = \frac{\hbar}{Lq_e} \sin\left[\left(\frac{\varphi}{\hbar} - f(t)\right)q_e\right] \quad (25)$$

در حالت حدی  $q_e \rightarrow 0$  یعنی در حالت بار پیوسته جریان عبارت است از

$$I_\varphi(t) = \frac{\hbar}{L} \left(\frac{\varphi}{\hbar} - f(t)\right), \quad (26)$$

برای یک حلقه کوانتومی، با تغییر شار مغناطیسی  $\varphi(t)$  از داخل حلقه می‌توان نیروی محرکه  $\varepsilon(t)$  را مطابق قانون فاراده  $\varepsilon(t) = -\frac{df(t)}{dt}$  ایجاد کرد. در این حالت جریان ماندگاری را می‌توان از رابطه (۲۵) به دست آورد. نکته قابل توجه اینکه برای پتانسیل الکتریکی ثابت یا به طور معادل وقتی شار مغناطیسی به طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند، مطابق رابطه (۲۶) جریان به طور خطی افزایش پیدا می‌کند در حالی که رابطه (۲۵) یک رفتار دوره‌ای با فرکانس  $\omega = \frac{df(t)}{dt}$  را برای این حالت نمایش می‌دهد.

#### ۴. نتیجه گیری

با احتساب گسستگی بار الکتریکی در مدارهای کوانتومی مزوسکوپی نشان داده شد که هامیلتونی توصیف کننده این مدارها با هامیلتونی یک ذره باردار در زنجیره‌ای از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قوی معادل است. با استفاده از این تشابه جریان ماندگاری الکتریکی برای مدار کوانتومی  $L$  (حلقه کوانتومی) محاسبه شد.

که در آن  $\varphi \in R$  یک عدد کوانتومی حقیقی با ویژه مقادیر پیوسته  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  است. مطابق روش بخش قبل برای هامیلتونی (۱۶) عملگر تحول زمانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{-i\hbar t}{Lq_e}\right) \exp(-if(t)\hat{q}) \exp\left[\frac{i\hbar}{2Lq_e}(g(t)\hat{Q} + g^*(t)\hat{Q}^\dagger)\right] \quad (20)$$

$$f(t) = \int_0^t \frac{\varepsilon(t')}{\hbar} dt', \quad g(t) = \int_0^t \exp(-iq_e f(t')) dt'. \quad (21)$$

با معلوم بودن عملگر تحول زمانی به راحتی می‌توان تحول عملگر جریان را در سامانه به دست آورد. لذا اگر  $|I_\varphi\rangle$  ویژه حالت جریان در لحظه  $t=0$  باشد، در لحظه  $t \neq 0$  این حالت عبارت است از

$$|I_\varphi, t\rangle = \hat{U}(t) |I_\varphi\rangle. \quad (22)$$

برای این منظور ویژه توابع و ویژه مقدار عملگر  $(g(t)\hat{Q} + g^*(t)\hat{Q}^\dagger)$  را به دست می‌آوریم. با جایگذاری مستقیم می‌توان نشان داد که  $|I_\varphi\rangle$  ویژه حالت عملگر  $(g(t)\hat{Q} + g^*(t)\hat{Q}^\dagger)$  با ویژه مقدار  $\mu_\varphi$  است

$$(g(t)\hat{Q} + g^*(t)\hat{Q}^\dagger) |I_\varphi\rangle = \mu_\varphi |I_\varphi\rangle, \quad (23)$$

$$\mu_\varphi = 2 |g(t)| \cos\left(\alpha + \frac{q_e}{\hbar} \varphi\right),$$

که در آن  $\alpha = \arg(g(t))$  با رابطه (۲۱) داده شده است. با جایگذاری معادله‌های (۲۰ و ۲۳) در معادله (۲۲) داریم :

$$|I_\varphi, t\rangle = \exp\left(\frac{-i\hbar t}{Lq_e}\right) \exp\left(\frac{i\hbar \mu_\varphi}{2Lq_e}\right) \sum_j \exp\left(ij\left(\frac{\varphi}{\hbar} - f(t)\right)q_e\right) |j\rangle, \quad (24)$$

#### مراجع

1. C Zener, *Proc. R. Soc. Lond*, A **145** (1934) 523.
2. F Bloch, *Z. Phys* **52** (1928) 555.
3. G H Wannier, *Phys. Rev* **100** (1955) 1227.
4. D H Dunlap and V M Kenker, *Phys. Rev. B* **34** (1986) 3625.
5. K Leo, P Hairing, F Bruggemann, R Schwedler and K Kohler, *Solid State Commun.* **84** (1992) 943.
6. A Buchleitner and A R Kolovsky, *Phys. Rev. Lett* **91** (2003) 253002.
7. Y Q Li, B. Chen, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4027.
8. B Chen, X Shen and Y Q Li, *Phys. Lett. A* **313** (2003) 431.
9. J C Flores, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 235309.
10. H Cheung, Y Gefen, E K Riedel and W H Shih, *Phys. Rev. B* **37** (1988) 6050.
11. Y Q Li, in *Proc. 5th Wigner Symposium*, eds. P Kasperkovitz and D Grau, World Scientific, Singapore (1998) 307-310.

15. H J Korsch, S Mossmann, *Phys. Lett. A* **317** (2003) 54-63.
16. A R Kolovsky, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 213002.
17. A R Kolovsky and H J Korsch, e-print cond-mat/0403205 (2004).
12. B Chen, X Shen, Y Li, L. Sun and R Han, *Physica E* **31** (2006) 27.
13. B Chen, X Shen, Y. Li, D. Yu and R. Han, *Physica E* **31** (2006) 165.
14. J C Flores , *Europhys. Lett* **69** (2005) 116.