

## دینامیک پیوندگاههای جوزفسون جفت شده در یک یاخته مثلثی نامتقارن

علیرضا ولی زاده<sup>۱</sup>، محمدرضا کلاه چی<sup>۱</sup> و جوزف پی استریلی<sup>۲</sup>

۱. دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، کد پستی ۴۵۱۹۵-۱۱۵۹

۲. دانشکده فیزیک و نجوم، دانشگاه کنتاکی، لکزینگتن ۴۰۵۰۶

### چکیده

آرایه‌های متشکل از دو پیوندگاه جوزفسون را در نظر می‌گیریم که توسط پیوند سومی در یک یاخته مثلثی به هم جفت شده‌اند. شرایط بروز همنازی از مرتبه غیرصحیح را بررسی کرده و نشان می‌دهیم وجود عدم تقارن در آرایه موجب پدیدار شدن مشتق‌های مرتبه دوم و بالاتر یا جملات غیر سینوسی در معادلات توصیف کننده سیستم شده که در حضور میدان متناوب خارجی منجر به پله‌های کسری شاپیرو می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: پیوندگاه جوزفسون جفت شده، پله‌های کسری شاپیرو

### ۱. مقدمه

پیوندگاه جوزفسون در تقریب نیمه کلاسیکی با مدلی توصیف می‌شود که شدیداً غیر خطی است [۱] و از این رو زمینه مناسبی را برای مطالعه دینامیک سیستمهای غیر خطی فراهم می‌کند. برهم‌کنش پیوندگاهها با هم و پاسخ آنها به میدانهای دوره‌ای بیرونی می‌تواند منجر به بروز رفتارهای منظم در قالب همنازی دوسویه بین پیوندگاهها و همنازی با میدانهای بیرونی شود. همنازی با میدان خارجی موجب می‌شود که رفتار پیوند در گستره‌ای از جریان مستقیم بیرونی بدون تغییر بماند که منجر به پدیدار شدن پله‌های شاپیرو در نمودار جریان - ولتاژ پیوندگاهها می‌شود [۲]. روی پله‌ها نرخ تغییر فاز پیوندگاه که متناسب با ولتاژ آن است، مضرب صحیحی از بسامد میدان خارجی است که نمایانگر همنازی فرا- هماهنگ می‌باشد.

در آرایه‌های دو بعدی جوزفسون در حضور میدان مغناطیسی متعامد خارجی، همنازی حرکت شبکه گردابه‌ای با

میدان متناوب خارجی منجر به پله‌های کسری شاپیرو می‌شود [۳]. این پله‌ها در آرایه‌های با شمار کم یاخته‌ها نیز مشاهده شده‌اند [۴]. اما در اینجا همنازی زیر- هماهنگ موجب به وجود آمدن پله‌های کسری می‌شود. در این نوشتار نشان می‌دهیم که شرط وقوع همنازی زیر- هماهنگ وجود مشتق مرتبه دوم (یا بالاتر) و یا جملات غیر سینوسی در معادلات توصیف کننده سیستم است. سپس دینامیک یک آرایه مثلثی را در حضور میدان خارجی بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم آرایه‌ای که جریانهای اعمال شده به آن آرایش نامتقارن دارند یا میدان مغناطیسی خارجی به آن اعمال شده است، شرایط وقوع همنازی زیر- هماهنگ را دارد.

### ۲. مدل و بحث

پیوند جوزفسون را با معادله بدون بعد زیر توصیف می‌کنیم [۱]:

$$b \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{df}{dt} + \sin f = i + j \sin \omega t \quad (1)$$

می‌شود، شدت هارمونیکها با بزرگ شدن  $b$  کم می‌شود که نتیجه آن کم شدن عرض پله‌های کسری است.

معادله دیگری که پله‌های کسری می‌توانند در مشخصه آن ظاهر شوند، و در بررسی آرایه مثلی به آن برمی‌خوریم این گونه است:

$$\frac{df}{dt} + \sin f + e \sin 2f = i + j \sin wt \quad (3)$$

این معادله می‌تواند توصیف کننده یک پیوند فرامیرا باشد که رابطه جریان و فاز آن غیر سینوسی است [۶]. لازم به ذکر است که در این معادله عرض پله‌های کسری تابعی از ضریب جمله هارمونیک نیست و تنها پس از میانگین‌گیری و به دست آوردن معادله‌ای مشابه رابطه (۲)، قدرت جمله هارمونیک در  $f(\bar{F})$  می‌تواند با پهنای پله کسری متناسب باشد.

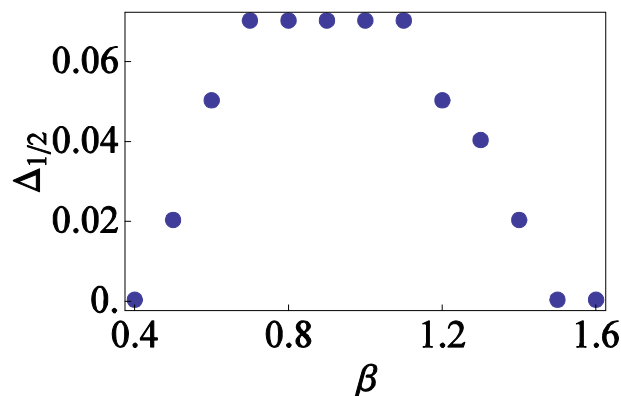
اینک یک آرایه مثلی را در نظر می‌گیریم که در شکل (۲) نمایش داده شده است. پیوندهای جوزفسون یکسان و فرامیرا در نظر گرفته شده و هر پیوند با فاز مربوط به خود نامگذاری شده است. پارامتر  $a$  تعیین کننده نحوه توزیع جریان است. بدین معنی که  $a$  غیر صفر نشانه توزیع نامتقارن جریان می‌باشد. معادلات توصیف کننده دینامیک سیستم با استفاده از دو متغیر  $r = q + j$  و  $g = q - j$  این گونه خواهند بود:

$$3 \frac{dg}{dt} + 2 \sin g + 2 \sin \frac{g-2pf}{2} \cos \frac{r}{2} = a i_{ext} \quad (4)$$

$$\frac{dr}{dt} + 2 \cos \frac{g-2pf}{2} \sin \frac{r}{2} = i_{ext} \quad (5)$$

$f$  در اینجا نسبت شار مغناطیسی ثابت اعمال شده به یاخته به کوانتوم شار است. در اینجا سه حالت خاص را بررسی می‌کنیم. نخست حالت کاملاً متقارن با  $a=0$  بدون حضور میدان مغناطیسی خارجی را در نظر می‌گیریم. در این حالت معادله (۴) دارای یک نقطه تراز پایدار به ازای  $g=0$  است. در این صورت معادله (۵) معادله یک پیوند فرامیرا خواهد بود و پله‌های کسری در مشخصه سیستم ظاهر نمی‌شوند.

در حالت دوم جریان را کاملاً نامتقارن فرض می‌کنیم به این معنی که  $a$  را برابر یک قرار می‌دهیم. در این صورت دو پیوندگاه  $j$  و  $g$  به صورت سری با هم و موازی با پیوندگاه  $q$  قرار می‌گیرند. با فرض پاسخ هم فاز برای دو پیوندگاه سری،



شکل ۱. پهنای پله کسری شاپیرو بر حسب اندازه ضریب جمله خازنی.

که در آن جریان خارجی مجموع جریانهای متناوب و مستقیم است و  $b$  اندازه نسبی جمله خازنی (اینرسی) را نمایش می‌دهد. نخست یک پیوند فرامیرا را در نظر می‌گیریم که در آن  $b$  برابر صفر است. با روش میانگین‌گیری می‌توان نشان داد [۵] که میانگین فاز که آن را با  $\bar{f}$  نمایش می‌دهیم از این رابطه پیروی می‌کند:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = w_0 + \frac{j}{w_0} f(\bar{f}) \sin wt \quad (2)$$

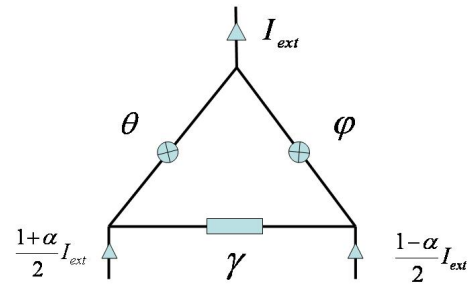
که در آن  $f(\bar{f}) = i - \cos \bar{f}$  و  $w_0$  بسامد درونی چرخش فاز پیوند در غیاب میدان متناوب خارجی است. عدم وجود هماهنگیهای مرتبه بالاتر در این معادله نشان آن است که تنها همنازی از مرتبه صحیح برای پیوند فرامیرا امکان‌پذیر است. با در نظر گرفتن دینامیک کندتغییر، معادله (۲)، همچنین می‌توان پهنای پله‌های صحیح شاپیرو را نیز با تقریبی از مرتبه  $j$  به دست آورد که متناسب با وارون بسامد موج بیرونی می‌باشد.

در صورتی که یک پیوند زیرمیرا با  $b \neq 0$  را در نظر بگیریم هماهنگیهای مرتبه بالاتر در  $f(\bar{f})$  ظاهر می‌شوند که ضامن وقوع همنازیهای زیرهماهنگ هستند. عرض پله‌های کسری متناسب با ضریب بسط فوریه هماهنگ مربوط به پله در  $f(\bar{f})$  می‌باشد. در شکل (۱) عرض پله  $\frac{1}{2}$  بر حسب مقدار  $b$  رسم شده است. عرض کم پله برای  $b$  های کوچک دور از انتظار نیست اما همان‌گونه که مشاهده می‌شود عرض پله به ازای مقادیر بزرگ اینرسی نیز کم می‌شود. از آنجایی که نرخ رشد فاز برای پیوند با جمله اینرسی (خازنی) یکنواخت

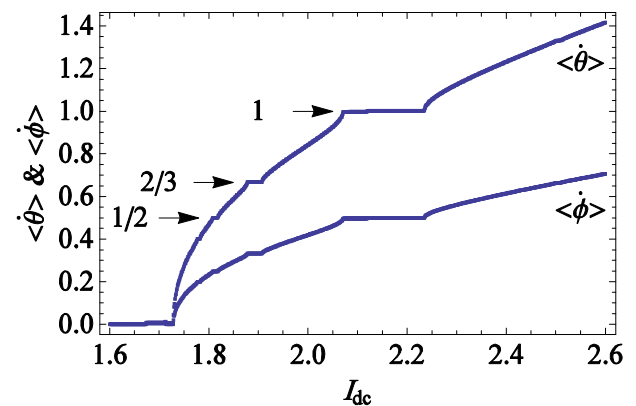
در حالت سوم توزیع جریانها را متقارن فرض می‌کنیم و میدان مغناطیسی غیر صفر به یاخته اعمال می‌کنیم. می‌توان نشان داد که در این صورت نقطه ترازوی که در حالت اول برای معادله (۴) موجود بود، به یک مرکز تبدیل شده و  $g$  نوسانی می‌شود و معادله (۵) به شکل پارامتری واداشته می‌شود. با خطی کردن معادله (۴) و قرار دادن حل آن در معادله (۵) مشتقهای مرتبه بالاتر در معادله ظاهر می‌شوند که شرط کافی برای ظاهر شدن پله‌های کسری در مشخصه جریان-ولتاژ است. همچنین می‌توان نشان داد که دامنه نوسانات  $g$  به صورت یکنوا با بزرگ شدن  $f$  در بازه  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  رشد می‌کند و انتظار می‌رود پهنای پله‌های کسری نیز در این بازه با بزرگ شدن، افزایش یابد [۸].

### ۳. نتیجه‌گیری

وجود اختلاف ناخواسته در ساخت پیوندگاههای جوزفسون موجب ناپایدار شدن پاسخهای منظم در آرایه‌ها می‌شود. در اینجا نشان داده‌ایم که در یک یاخته مثلثی متشکل از سه پیوند جوزفسون با در نظر گرفتن شکل توزیع جریانها و میدان مغناطیسی خارجی به عنوان پارامترهای اعمال عدم تقارن، پدیدار شدن پله‌های شاپیروی کسری در مشخصه سیستم، نتیجه وجود عدم تقارن است. از این رو می‌توان عدم تقارن را در سیستم، با مطالعه مشخصه جریان-ولتاژ آشکار کرد و در شرایطی با اعمال میدان مغناطیسی مناسب، ناهمگنی ناخواسته در پارامترهای آرایه را جبران نمود.



شکل ۲. آرایه مثلثی مورد مطالعه. پیوندگاههای  $q$  و  $j$  توسط پیوندگاه  $g$  با هم جفت شده‌اند.  $a$  میزانی از عدم تقارن در توزیع جریان است.



شکل ۳. مشخصه جریان-ولتاژ آرایه مثلثی با توزیع جریان نامتقارن  $a=1$ .

بوده و معادلات بالا را می‌توان با استفاده از این رابطه جدا کرد. آزمون پایداری خطی نشان می‌دهد که این پاسخ پایدار است [۷]. با بازنویسی معادلات بر حسب متغیرهای  $q$  و  $j$ ، با فرض این پاسخ به معادله‌ای مشابه معادله (۳) برای هر یک از پیوندگاهها می‌رسیم که وجود پله‌های کسری را در مشخصه آن انتظار داریم (شکل ۳).

### مراجع

1. D E McCumber, *J. Appl. Phys.* **39** (1968) 3113-3118.
2. S Shapiro, *Phys. Rev. B* **11** (1963) 80-82.
3. S P Benz et al., *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 693-696.
4. L L Sohn and M Octavio, *Phys. Rev. B* **49** (1994) 9236-9239.
5. علیرضا ولی‌زاده، پایان‌نامه دکتري، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، بهمن (۱۳۸۶) ۶۰ تا ۶۳.
6. H Sellier et al., *Phys. Rev. Lett.* **92** (2003) 25700.
7. A Valizadeh, M R Kolahchi and J P Straley. *Phys. Rev. B* **76** (2007) 214511.
8. A Valizadeh, M R Kolahchi and J P Straley. *J. Nonlinear Math. Phys.* **15** (2008) 397-406.

۵. علیرضا ولی‌زاده، پایان‌نامه دکتري، دانشگاه تحصیلات