مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۹، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۸

واپاشیهای پنگوئن درکوارک b

حسین مهربان

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه سمنان
پست الکترونیکی: hmehraban@semnan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۷/۹/۱۵ ؛ پذیرش: ۸۸/۳/۲۰)

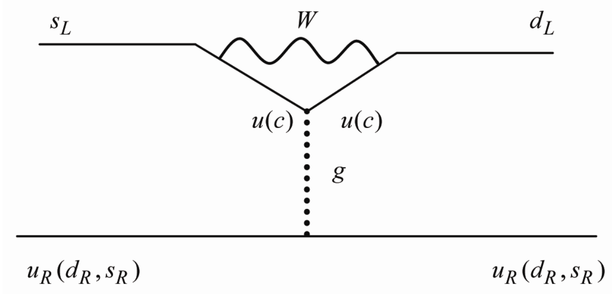
چکیده

در این تحقیق ساختار پنگوئن QCD معرفی و تا تقریب مرتبهٔ دوم محاسبه شده است. دامنهٔ واپاشیهای مربوط به پنگوئن QCD در مدل کوارک در مرتبهٔ اول و دوم محاسبه شده است. دامنهٔ پنگوئن QCD در پایینترین مرتبهٔ α_s برای واپاشی فرآیندهای مرتبهٔ اول بهصورت $b \to q_k g \to q_k q_i \overline{q}_j$ و مرتبهٔ دوم بهصورت $b \to q_k q_i \overline{q}_j \to \quad q_k q_i \overline{q}_j g \to q_k q_i \overline{q}_j (q_o \overline{q}_p)$ محاسبه شده است. آهنگ زمانی واپاشیهای مختلف کوارک b تا تقریب مرتبهٔ اول و دوم پنگوئن QCD محاسبه شده است. ملاحظه می‌کنیم که آهنگ زمانی واپاشیهای مرتبهٔ دوم نسبت به مرتبهٔ اول در واپاشیهای کوارک b بسیار کوچک است. با محاسبهٔ نسبت تناسب واپاشیهای کوارک b – پادکوارک $\overline{b}$، ملاحظه می‌کنیم که تقریب مرتبهٔ دوم پنگوئن QCD در این واپاشیها ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: پنگوئن QCD، مدل کوارک، کوارک b، آهنگ زمانی واپاشی، نسبت تناسب

۱. مقدمه

نظریهٔ مناسبی در سال ۱۹۵۷ برای واپاشیهای ضعیف غیر لپتونی پیشنهاد شد که بعدها پنگوئن نامیده شد. این مکانیزم به ایدهٔ ویلسون یعنی بسط حاصل ضرب عملگریOPE در فواصل کوتاه و آشکار شدن اثر متقابل این تئوری به کوارکهای سنگین در نظریهٔ GIM و کوارکهای سبک در خواص کایرال از QCD گسترش یافت و به این ترتیب تئوری پنگوئن پیشنهاد شد تا نقش جدیدی در میدانهای پدیده شناسی ذرات ایفا کند [۱]. واپاشیهای پنگوئن قبل از تحلیل اثرات QCD در واپاشیهای مزون K بیان شده بود و به مدت کوتاهی نمودارهای پنگوئن نقش مهمی در نقض cp ایفا کردند که ابتدا در واپاشیهای مزون K و بعد از آن در واپاشیهای مزون B مورد مطالعه قرار گرفتند[۲]. زمانی که QCD به عنوان تئوری بر هم‌کنش قوی در نظر گرفته شد، اثرات آن در واپاشیهای ضعیف مورد مطالعه قرار گرفت. مهمترین مسئله از برهم‌کنشهای قوی در این واپاشیها، قانون $\Delta I = ۱/۲$ در برهم‌کنشهای ضعیف غیر لپتونی در مورد ذرات عجیب است[۳]. به‌وسیله پدیدهٔ آزادی مجانبی امکان کنترل کامل آزمایشگاهی در فواصل کوتاه به‌وجود آمد. در نظریهٔ QCD بسط OPE در رابطه با برهم‌کنشهای ضعیف غیر لپتونی به چندین جمله تکنیکی که می‌توانند هامیلتونی موثر در برهم‌کنشهای ضعیف در فواصل کوتاه را محاسبه نماید، محدود می‌شود. برهم‌کنشهای ضعیف توسط بوزون W حمل می‌شوند، بنابر این فواصلی در حدود $۱/M_W$ با حدود $M_W = ۸۰$ GeV می‌باشند. تحلیل نظریهٔ QCD در این فواصل با هامیلتونی موثر انجام می‌شود. پدیدهٔ آزادی مجانبی در فواصل کوتاه نشان می‌دهد که برهم‌کنشهای قوی وابستگی لگاریتمی به اندازهٔ حرکت دارد[۴]. نتیجهٔ تعیین وابستگی



شکل ۱. نمودار فاینمن مربوط به عملگرهای پنگوئن.

$LogM_W / \Lambda_{QCD}$ است که Λ_{QCD} مقیاسهادرونی است. در این فرضیه $1/\Lambda_{QCD}$ برابر $1/M_W$ مقیاسهای برای جرم کوارکهای سنگین t، b و c هستند. حلقهٔ کوارک c در واپاشیهای غیر لپتونی بی اهمیت به نظر می‌رسد و با حذف فاکتور $(m_c^2 - m_u^2)/M_W$ می‌توان این حلقه را به‌دست آورد چرا که اثرات کوارکهای سنگین مهمتر می‌باشد. حذف این فاکتور وابسته به فاصله است که اگر آن را با $r = 1/\mu$ تعریف کنیم خواهیم داشت[۵]،

$$\frac{m_c^2 - m_u^2}{\mu^2}, \qquad m_c << \mu << M_W$$

$$\log \frac{m_c^2}{\mu^2} \qquad \mu << m_c$$

به هر حال عملگرهای جدید ظاهر شده در هامیلتونی موثر در فواصل بزرگتر از $1/m_c$ از نظر کیفی متفاوت هستند. آنها میدانهای کوارکهای راست دست را در مقابل کوارکهای چپ دست در فواصل بسیار کوچکتر از $1/m_c$ شامل می‌شوند. بدین ترتیب هنگامی‌که کوارکهای راست دست که قوی شده‌اند در برهم‌کنشهای ضعیف در مدل استاندارد با جریانهای ضعیف وارد می‌شوند، چپ دست می‌گردند[۶]. بنابر این کوارکهای راست دست با گلئونها که بدون اسپین هستند کوپل می‌شوند و عملگرهای جدید فقط در جریانهایی با $\Delta I = 1/2$ شرکت می‌کنند. به عبارت دیگر افزایش جریانهای $\Delta I = 1/2$ از اثر مهم OPE با حذف GIM و مقیاس کوارکهای سنگین و مقیاسهای اصلی متفاوت در هادرونهای سبک ناشی می‌شود. این عملگر جدید را پنگوئن می‌نامند. شکل ۱ نمودار فاینمن برای عملگرهای جدید را نشان می‌دهد.

۲. پنگوئن گلئونی

با توجه به قانون پایستگی جریان گلئونی، رأس $b \to q_k g$ دارای ساختار زیر می‌باشد [۷ و ۸].

$$\Gamma_\mu^a(q^2) = (ig_s / 4\pi^2)\bar{u}_k(p_k)T^a V_\mu(q^2) u_b(p_b), \qquad (1)$$

$$V_\mu(q^2) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\gamma^\nu [F_1^L(q^2)P_L + F_1^R(q^2)P_R] + i\sigma_{\mu\nu}q^\nu [F_2^L(q^2)P_L + F_2^R(q^2)P_R], \qquad (2)$$

که در آن F_1 و F_2 فرم فاکتورهای تک قطبی الکتریکی و دو قطبی مغناطیسی هستند و $q = q_g = p_b - p_k$ چهار اندازهٔ حرکت گلئون، $P_{L(R)} \equiv (1 \mp \gamma_5)/2$ عملگرهای تصویر کایرال و T^a $(a = 1,...,8)$ مولد بهنجارش $SU(3)_c$ در حالت $Tr(T^a T^b) = \delta^{ab}/2$ می‌باشند. همچنین برای رأس $\bar{b} \to \bar{q}_k g$ می‌توان ساختاری شبیه زیر در نظر گرفت.

$$\bar{\Gamma}_\mu^a(q^2) = -(ig_s / 4\pi^2)\bar{v}_b(p_b)T^a \bar{V}_\mu(q^2) v_k(p_k), \qquad (3)$$

که در آن $\bar{V}_\mu$ همان شکل معادلهٔ (۲) را دارد با این تفاوت که به‌جای $F_{1,2}^{L,R}(q^2)$ باید $\bar{F}_{1,2}^{L,R}(q^2)$ را قرار داد. در پایینترین مرتبهٔ α_s دامنهٔ پنگوئن برای واپاشیهای $b \to q_k g \to q_k q'\bar{q}'$ $(q_k q_i \bar{q}_j)_{i=j}$ برابر است با،

$$M^{Peng} = -i(\alpha_s/\pi)[\bar{u}_k(p_k)T^a Q_\mu u_b(p_b)][\bar{u}_{q'}(p_{q'})\gamma^\mu T^a v_{\bar{q}'}(p_{\bar{q}'})], \qquad (4)$$

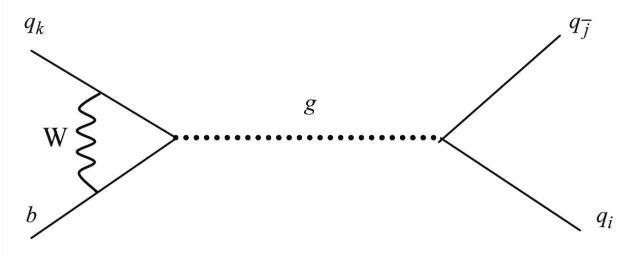
که در آن $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ و Q_μ برابر است با،

$$Q_\mu \equiv \gamma_\mu [F_1^L(q^2)P_L + F_1^R(q^2)P_R] + (i\sigma_{\mu\nu}q^\nu / q^2)[F_2^L(q^2)P_L + F_2^R(q^2)P_R]. \qquad (5)$$

به‌طور مشابه دامنهٔ واپاشی برای پاد کوارک $\bar{b} \to \bar{q}_k q'\bar{q}'$ برابر است با،

$$\bar{M}^{Peng} = i(\alpha_s/\pi)[\bar{v}_k(p_k)T^a \bar{Q}_\mu v_b(p_b)][\bar{u}_{q'}(p_{q'})\gamma_\mu T^a v_{\bar{q}'}(p_{\bar{q}'})], \qquad (6)$$

که در آن $\bar{Q}_\mu$ از شکل معادلهٔ (۵) پیروی می‌کند با این تفاوت که باید به‌جای فرم فاکتور $F(q^2)$ فرم فاکتور $\bar{F}(q^2)$ را جایگذاری کرد. در رابطهٔ جمع F_2 سهم کوارک t غالب است، در نتیجه در مقیاس q^2 با تقریب خوب خواهیم داشت،



شکل ۲. نمودار فاینمن مربوط به واپاشی پنگوئن در تقریب مرتبهٔ اول.

$F_2^R(q^2) \approx F_2^R(0)$ و $F_2^L(q^2) \approx F_2^L(0)$ [۹]، و در نتیجه،

$$F_1^L(q^2) = (G_F/\sqrt{2}) \sum_{i=u,c,t} V_{ik}^* V_{ib} f_1(x_i, q^2),$$

$$F_1^R(0) = 0, \qquad (7)$$

$$F_2^L(0)/m_q = F_2^R(0)/m_b = (G_F/\sqrt{2}) \sum_{i=u,c,t} V_{iq}^* V_{ib} f_2(x_i), \qquad (8)$$

که در آن $x_i \equiv m_i^2 / M_W^2$ $(i = u,c,t)$ و همچنین،

$$f_2(x) = -(x/4(1-x)^4)[2 + 3x - 6x^2 + x^3 + 6x \ln x], \qquad (9)$$

$$f_1(x) = (1/12(1-x)^4), \times[18x - 29x^2 + 10x^3 + x^4 - (8 - 32x + 18x^2)\ln x], \qquad (10)$$

$$f_1(x_i, q^2) = (10/9) - (2/3)\ln x_i + (2/3z_i) - (2(2z_i+1)/3z_i) g(z_i), \qquad (11)$$

که در آن $z_i \equiv q^2 / 4m_i^2$ و [۱۰،۱۱]،

$$g(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \arctan(\sqrt{\frac{z}{1-z}}), & z < 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z-1}{z}}[\ln(\frac{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}-\sqrt{z-1}}) - i\pi], & z > 1 \end{cases} \qquad (12)$$

برای کوارک u مقدار z_i بزرگ است و ما می‌توانیم از شکل مجانبی رابطهٔ (۱۱) استفاده کنیم،

$$f_1(x_u, q^2) = (10/9) - (2/3)[\ln(q^2/M_W^2) - i\pi]. \qquad (13)$$

ملاحظه می‌کنیم که $F_1^L >> F_1^R$ و $F_2^R >> F_2^L$ می‌باشد. برای دامنهٔ واپاشی $b \to dq'\bar{q}'$، ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ مربوط به F_1^L غالب می‌باشد. در فرآیندهایی شبیه $b \to ds\bar{s}$ و $\bar{b} \to \bar{d}s\bar{s}$ انتظار می‌رود که سهم پنگوئن غالب باشد [۹] و سهم F_1^L نسبت به سایر فرم فاکتورها غالب باشد. در واپاشیهای شبیه $b \to sq'\bar{q}'$، دوباره ملاحظه می‌کنیم که $F_1^L >> F_1^R$ و $F_2^R >> F_2^L$ و سهم مربوط به فرم فاکتور F_1^L غالب است.

۳. آهنگ زمانی واپاشی پنگوئن گلئونی تا تقریب مرتبهٔ اول $b \to q_k q_i \bar{q}_j$

نمودار فاینمن مربوط به واپاشی پنگوئن در تقریب مرتبهٔ اول در شکل ۲ نمایش داده شده است. دامنهٔ پنگوئن گلئونی در پایینترین مرتبه در g_s برای فرآیند واپاشی $b \to q_i q_k \bar{q}_j$ مطابق رابطهٔ (۴) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$M^{peng} = \frac{g_s^2}{4\pi^2}[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k}) T^a Q_\mu u_b(p_b)] \times [\bar{u}_{q_i}(p_{q_i}) \gamma^\mu T^a v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})], \qquad (14)$$

که Q_μ با رابطهٔ (۵) مشخص می‌شود. از آنجا که سهم F_2^L بسیار کوچک است عامل Q_μ به صورت زیر ساده می‌شود.

$$Q_\mu = \gamma_\mu P_L F_1^L(q^2) = \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} F_1^L(q^2) = \tilde{\sigma}_\mu F_1^L(q^2). \qquad (15)$$

با جایگذاری رابطهٔ بالا در دامنهٔ پنگوئن گلئونی (۱۴) داریم.

$$M^{peng} = \frac{g_s^2}{4\pi^2}[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k}) T^a F_1^L(q^2) \tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)] \times [\bar{u}_{q_i}(p_{q_i}) \gamma^\mu T^a v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]. \qquad (16)$$

در رابطهٔ بالا مقدار γ^μ را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} + \gamma^\mu \frac{1+\gamma_5}{2} = \tilde{\sigma}^\mu + \sigma^\mu. \qquad (17)$$

برای سادگی فقط جملهٔ اول رابطهٔ بالا را انتخاب می‌کنیم و در دامنهٔ پنگوئن (۱۶) قرار می‌دهیم.

$$M^{peng} = \frac{g_s^2}{4\pi^2}[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k}) T^a F_1^L(q^2) \tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)] \times [\bar{u}_{q_i}(p_{q_i}) \tilde{\sigma}^\mu T^a v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]. \qquad (18)$$

به منظور ساده نوشتن خواهیم داشت.

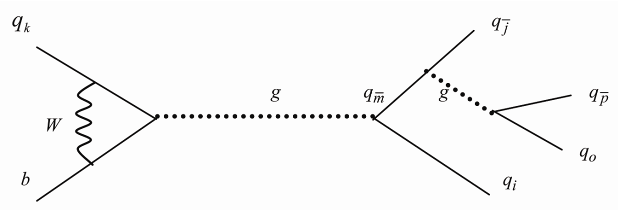
$$M^{peng} = \frac{g_s^2}{4\pi^2} T^a_{q_k b} T^a_{q_i q_j} F_1^L(q^2) \times [\tilde{\sigma}_\mu(q_k b)][\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j)] \qquad (19)$$

که،

$$[\tilde{\sigma}_\mu(q_k b)] = [\bar{u}_{q_k}(p_{q_k}) \tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)],$$

$$[\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j)] = [\bar{u}_{q_i}(p_{q_i}) \tilde{\sigma}^\mu v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]. \qquad (20)$$

با محاسبهٔ مولفه‌های دامنهٔ واپاشی (۲۰) و متوسط گیری روی حالتهای اسپینی ۱/۲ و ۱/۲− کوارک b و در نظر گرفتن هشت



شکل ۳. نمودار فاینمن مربوط به واپاشی پنگوئن در تقریب مرتبهٔ دوم.

حالت هلیسیته، مربع دامنهٔ واپاشی برابر می‌شود با (پیوست الف را نگاه کنید)،

$$\begin{aligned}\left|M^{peng}\right|^2 &= [\frac{g_s^2}{4\pi^2}T^a_{q_kb}T^a_{q_iq_j}F_1^L(q^2)]^2 \\ &\quad\times[(\tilde{\sigma}_\mu(q_kb))(\tilde{\sigma}^\mu(q_iq_j))]^2 \\ &= [\frac{g_s^2}{4\pi^2}T^a_{q_kb}T^a_{q_iq_j}F_1^L(q^2)]^2 \quad \frac{1}{2}(1-v_iv_k\cos(\theta_i-\theta_k))\end{aligned} \quad (۲۱)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از مجذور دامنهٔ واپاشی، آهنگ زمانی واپاشیهای مختلف کوارک b را محاسبه کنیم. با استفاده از قاعدهٔ طلایی فرمی آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن گلئونی کوارک $b\to q_iq_k\bar{q}_j$ تا تقریب مرتبهٔ اول برابر است با (پیوست الف را نگاه کنید)،

$$\Gamma=\frac{3}{8\pi^3}(\frac{M_b}{2})^5\int_0^1\int_0^1[\xi(x)]^2xy\ f_1\ g_1\ dxdy \quad . \quad (۲۲)$$

در اینجا داریم:

$$f_1=(2-\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{y^2+b^2}),$$

$$g_1=(1-\frac{(f_1)^2-(c^2+x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{y^2+b^2}}),$$

$$\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{g_s^2}{4\pi^2}(T^a_{q_kb}T^a_{q_iq_j})\ F_1^L(q^2)\ . \quad (۲۳)$$

ثابتهای a و b و c عبارتند از :

$$a=\frac{2m_i}{M_b},\quad b=\frac{2m_k}{M_b},\quad c=\frac{2m_j}{M_b}. \quad (۲۴)$$

به عبارت ساده‌تر داریم،

$$\Gamma_{b\to q_iq_k\bar{q}_j}=3\Gamma_0 I^{peng}. \quad (۲۵)$$

که در آن انتگرال فضای فاز برابر است با،

$$I^{peng}=\int_0^1\int_0^1[\xi(x)]^2\,6xy.f_1.g_1.dxdy, \quad (۲۶)$$

و ثابت Γ_0 از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\Gamma_0=\frac{1}{8}\frac{M_b^5}{192\pi^3}. \quad (۲۷)$$

در حد $m_q\to 0$ فرم فاکتور $F_1^L(q^2)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}F_1^L(q^2)&=F_1^L(0)=\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\sum_{i=u,c,t}V_{iq}^*V_{ib}f_1(x_i)] \\ &=\frac{G_f}{\sqrt{2}}(V_{uq}^*V_{ub}f_1(x_u)+V_{cq}^*V_{cb}f_1(x_c)+V_{tq}^*V_{tb}f_1(x_t)).\end{aligned} \quad (۲۸)$$

کوارک q می‌تواند کوارکهای d و s باشد. همچنین عامل رنگ مربوط به گلئون برابر است با:

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{8}T^aT^a &\equiv \langle green|T^a|red\rangle\langle red|T^a|green\rangle \\ &\equiv\frac{1}{3}\langle green|T^aT^a|green\rangle=\frac{1}{3}\frac{1}{3}Tr(T^aT^a)=\frac{1}{9}\frac{8}{2}=\frac{4}{9}.\end{aligned} \quad (۲۹)$$

۴. آهنگ زمانی واپاشی پنگوئن گلئونی تا تقریب مرتبهٔ دوم $b\to q_kq_i\bar{q}_j(q_o\bar{q}_p)$

نمودار فاینمن مربوط به واپاشی پنگوئن در تقریب مرتبهٔ دوم در شکل ۳ نمایش داده شده است. دامنهٔ پنگوئن گلئونی در دومین مرتبه در g_s برای فرآیند واپاشی $b\to q_iq_k\bar{q}_j(q'_oq'_p)$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned}M^{peng}&=(\frac{g_s^2}{4\pi^2})^2[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k})T^aQ_\mu u_b(p_b)] \\ &\quad\times[\bar{u}_{q_i}(p_{q_i})\bar{W}^\mu T^a v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})].\end{aligned} \quad (۳۰)$$

در اینجا داریم:

$$\begin{aligned}Q_\mu &\equiv\gamma_\mu[F_1^L(q^2)P_L+F_1^R(q^2)P_R] \\ &\quad+\frac{i\sigma_{\mu\upsilon}}{q^2}[F_2^L(q^2)P_L+F_2^R(q^2)P_R].\end{aligned} \quad (۳۱)$$

پارامترهای F_1 و F_2 فرم فاکتورهای تک قطبی الکتریکی و دو قطبی مغناطیسی هستند و q تکانهٔ گلئون $q=p_b-p_{q_k}$ است. عملگر تصویر کایرال $P_{L(R)}=(1\pm\gamma_5)/2$ و $a=(1,...,8)$ و T^a مولدهای $SU(3)$ هستند که تحت رابطهٔ $Tr(T^aT^b)=\delta^{ab}/2$ بهنجار شده‌اند. رابطهٔ (۳۱) با توجه به سهم غالب $F_1^L(q^2)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}Q_\mu&=\gamma_\mu P_LF_1^L(q^2) \\ &=\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}F_1^L(q^2)=\tilde{\sigma}_\mu F_1^L(q^2).\end{aligned} \quad (۳۲)$$

بنابراین دامنهٔ واپاشی پنگوئن به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$M^{peng}=(\frac{g_s^2}{4\pi^2})^2[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k})T^a F_1^L(q^2)\tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)] \times[\bar{u}_{q_i}(p_{q_i})\bar{W}^\mu T^a v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]. \quad (۳۳)$$

اکنون باید قسمت اضافه شده گلئونی $g\to q_o'q_p'$ را وارد معادلهٔ بالا کنیم. این قسمت را در جملهٔ $\bar{W}^\mu$ به‌صورت زیر وارد می‌کنیم :

$$\bar{W}^\mu=\gamma^\mu[\bar{u}_{q_j}(p_{q_j})T^a\gamma_\mu v_{\bar{q}_m}(p_{\bar{q}_m})] \times[\bar{u}_{q_o'}(p_{q_o'})\gamma^\mu T^a v_{\bar{q}_p'}(p_{\bar{q}_p'})]. \quad (۳۴)$$

اکنون سعی می‌کنیم تا رابطهٔ بالا را بر حسب تصویر کایرال بنویسیم. برای این منظور γ^μ و γ_μ رابطهٔ بالا را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\gamma^\mu=\gamma^\mu\frac{(1-\gamma_5)}{2}+\gamma^\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}=\tilde{\sigma}^\mu+\sigma^\mu,$$
$$\gamma_\mu=\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_5)}{2}+\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}=\tilde{\sigma}_\mu+\sigma_\mu. \quad (۳۵)$$

برای سادگی فقط جمله‌های اول روابط بالا یعنی قسمت چپ گرد را انتخاب می‌کنیم. با جایگذاری در رابطهٔ (۳۴) خواهیم داشت:

$$\bar{W}^\mu=\tilde{\sigma}^\mu[\bar{u}_{q_j}(p_{q_j})T^a\tilde{\sigma}_\mu v_{\bar{q}_m}(p_{\bar{q}_m})] \times[\bar{u}_{q_o'}(p_{q_o'})\tilde{\sigma}^\mu T^a v_{\bar{q}_p'}(p_{\bar{q}_p'})]. \quad (۳۶)$$

ابتدا شاخهٔ $g\to q_o'q_p'$ را محاسبه می‌کنیم و سپس آن را در رابطه اصلی دامنهٔ پنگوئن (۳۳) قرار می‌دهیم. رابطهٔ (۳۶) با کمی خلاصه کردن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\bar{W}^\mu=\tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_jq_m}T^a_{q_o'q_p'})[\tilde{\sigma}_\mu(q_jq_m)][\tilde{\sigma}^\mu(q_o'q_p')]. \quad (۳۷)$$

که در آن:

$$[\tilde{\sigma}_\mu(q_jq_m)]=[\bar{u}_{q_j}(p_{q_j})\tilde{\sigma}_\mu u_{q_m}(p_{q_m})],$$
$$[\tilde{\sigma}^\mu(q_o'q_p')]=[\bar{u}_{q_o'}(p_{q_o'})\tilde{\sigma}^\mu u_{q_p'}(p_{q_p'})]. \quad (۳۸)$$

دامنهٔ قسمت شاخه‌ای $g\to q_o'q_p'$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (پیوست ب را نگاه کنید):

$$\bar{W}^\mu=\tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_jq_m}T^a_{q_o'q_p'})[\tilde{\sigma}_\mu(q_jq_m)][\tilde{\sigma}^\mu(q_o'q_p')] =\tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_jq_m}T^a_{q_o'q_p'})(1+v_o)(1+v_p)(1+v_j) \times[1-\cos(\theta_o-\theta_j)]. \quad (۳۹)$$

حال که دامنهٔ قسمت شاخه‌ای $g\to q_o'q_p'$ را به‌دست آوردیم به قسمت اصلی یعنی دامنهٔ واپاشی پنگوئن (۳۳) باز می‌گردیم. با جایگذاری $\bar{W}^\mu$ از رابطهٔ (۳۷) در دامنهٔ واپاشی پنگوئن (۳۳) خواهیم داشت:

$$M^{peng}=(\frac{g_s^2}{4\pi^2})^2\,[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k})T^a_{q_kb}F_1^L(q^2)\tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)] \times[\bar{u}_{q_i}(p_{q_i})\,\tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_jq_m}T^a_{q_o'q_p'})\,[\tilde{\sigma}_\mu(q_jq_m)] \times[\tilde{\sigma}^\mu(q_o'q_p')]\,T^a_{q_iq_j}\,v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]. \quad (۴۰)$$

با کمی ساده سازی خواهیم داشت:

$$M^{peng}=(\frac{g_s^2}{4\pi^2})^2F_1^L(q^2)\,(T^a_{q_kb}T^a_{q_iq_j})\,(T^a_{q_jq_m}T^a_{q_o'q_p'}) \times[\tilde{\sigma}_\mu(q_kb)]\,[\tilde{\sigma}^\mu(q_iq_j)] \times[\tilde{\sigma}_\mu(q_jq_m)]\,[\tilde{\sigma}^\mu(q_o'q_p')]. \quad (۴۱)$$

که در آن:

$$[\tilde{\sigma}_\mu(q_kb)]=[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k})\tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)],$$
$$[\tilde{\sigma}^\mu(q_iq_j)]=[\bar{u}_{q_i}(p_{q_i})\tilde{\sigma}^\mu u_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]. \quad (۴۲)$$

بعد از محاسبهٔ عبارات (۴۲) و جایگذاری آن در دامنه واپاشی (۴۱) و مربع آن خواهیم داشت (پیوست ب را نگاه کنید):

$$\left|M^{peng}\right|^2=\left|(\frac{g_s^2}{4\pi^2})^2F_1^L(q^2)\,(T^a_{q_kb}T^a_{q_iq_j})\,(T^a_{q_jq_m}T^a_{q_o'q_p'})\right|^2 \times 64\,[1-v_ov_j\cos(\theta_o-\theta_j)-v_kv_i\cos(\theta_i-\theta_k) +v_jv_ov_iv_k\cos(\theta_i-\theta_k)\cos(\theta_o-\theta_j)] \quad (۴۳)$$

اکنون می‌خواهیم با استفاده از مجذور مولفه‌های دامنهٔ واپاشی، آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئنی کوارک b تا تقریب مرتبهٔ دوم را محاسبه کنیم. با استفاده از قاعدهٔ طلایی فرمی آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن گلئونی کوارک $b\to q_iq_k\bar{q}_j(q_o'q_p')$ تا تقریب مرتبهٔ دوم برابر است با (پیوست ب را نگاه کنید)،

$$\Gamma_{b\to q_iq_k\bar{q}_j(q_oq_p)}=\frac{6}{\pi^7}(\frac{16}{81})^2[\frac{g_s^2}{4\pi^2}]^4(\frac{M_b}{4})^{11} \times\int_0^1\int_0^1\int_0^1 dxdydz\,\,[F_1^L(q^2)]^2 \times\left\{\frac{xyz^5}{5}f_2g_2+\frac{xyz^7}{7}hf_2-\frac{xyz^7}{7}hf_2g_2\right\}. \quad (۴۴)$$

جدول ۱ . آهنگ زمانی واپاشی (DR) و نسبت تناسب (BR) واپاشیهای کوارک b و پاد کوارک $\bar{b}$ برای واپاشیهای پنگوئن در تقریب مرتبهٔ اول، $(DR\times 10^{-17}\text{GeV})$ و $(BR\times 10^{-4})$.

Process	DR	BR	Process	DR	BR
$b \to cd\bar{c}$	۶/۰۲۲	۱/۸۲۷	$\bar{b} \to \bar{c}\bar{d}c$	۷/۰۵۶	۲/۰۷۳
$b \to \mathrm{cs\bar{c}}$	۱۱۷/۱۲	۳۴/۴۱	$\bar{b} \to \mathrm{\bar{c}\bar{s}c}$	۱۱۵/۸۷	۳۴/۰۴
$b \to sd\bar{s}$	۹/۱۴۶	۲/۶۸۷	$\bar{b} \to \bar{s}\bar{d}s$	۹/۴۰۵	۲/۷۶۲
$b \to ds\bar{d}$	۱۸۳/۳۸	۵۳/۸۷	$\bar{b} \to \bar{d}\bar{s}d$	۱۸۳/۹۹	۵۴/۰۵
$b \to ud\bar{u}$	۱/۰۳۵	۰/۳۰۴	$\bar{b} \to \bar{u}\bar{d}u$	۱/۲۱۳	۰/۳۵۶
$b \to us\bar{u}$	۱۹/۷۶۶	۵/۸۰۶	$\bar{b} \to \bar{u}\bar{s}u$	۱۹/۵۳۱	۵/۷۳۸
$b \to dd\bar{d}$	۸/۱۹۶	۲/۴۰۸	$\bar{b} \to \bar{d}\bar{d}d$	۸/۹۰۱	۲/۶۱۵
$b \to ss\bar{s}$	۱۸۵/۵۷	۵۴/۵۱	$\bar{b} \to \bar{s}\bar{s}s$	۱۸۳/۰۷	۵۳/۷۸

در رابطهٔ بالا عامل رنگ مربوط بـه گلئـون تـا مرتبـهٔ دوم برابـر است با:

$$\sum_{a=1}^{8} T^a T^a \sum_{a=1}^{8} T^a T^a \equiv \frac{4}{9}\frac{4}{9} = \frac{16}{81} \tag{45}$$

در حد $m_q \to 0$ فرم فاکتور $F_1^L(q^2)$ با رابطهٔ (۲۸) مـشخص می‌شود و ثابتهای f_2، g_2 و h عبارتند از:

$$f_2 = (4-\sqrt{z^2+a^2}-\sqrt{z^2+b^2}) - (\sqrt{x^2+c^2}+\sqrt{y^2+d^2}),$$

$$g_2 = 1 - \frac{(f_2)^2-(e^2+x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+c^2}\sqrt{y^2+d^2}},$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}}, \tag{46}$$

که در آن ثابتهای e,d,c,b,a به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$a = \frac{4m_i}{M_b}, \qquad b = \frac{4m_k}{M_b}, \qquad c = \frac{4m_p}{M_b}, \qquad d = \frac{4m_j}{M_b},$$

$$e = \frac{4m_o}{M_b}. \tag{47}$$

۵. نتایج عددی

بـا اسـتفاده از اسـتاندارد گـروه اطلاعـات ذرات [۱۲] در مـورد پارامترهـای مـاتریس CKM بـا مقـادیر عمـومی $\theta_{12} = 0/221$، $\theta_{13} = 0/0035$، $\theta_{23} = 0/041$ و انتخاب مقدار $\pi/2$ برای فـاز δ_{13} ماتریس CKM می‌توان مثالهائی از مدل ارائه شده در این تحقیق را به‌دست آورد. مطابق با مقالهٔ علی و گروب [۱۳]، جرم کوارکهای ورودی و خروجی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$m_b = 4/70 \ \text{GeV} \qquad m_s = 0/95 \ \text{GeV}$$
$$m_d = 0/007 \ \text{GeV} \qquad m_u = 0/003 \ \text{GeV}$$
$$m_c = 1/25 \ \text{GeV} \qquad m_W = 80/403 \ \text{GeV}$$

و مقدار ثابت فرمی را برابر :

$$G_F = 1/16639\times 10^{-5} \quad (1/(GeV)^2)$$

در نظر می‌گیریم.

آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن در تقریب مرتبـهٔ اول و دوم مطـابق روابـط (۲۵) و (۴۴) بـرای هـر دو ذرات و پـاد ذرات $b \to ds\bar{d}, us\bar{u}, cd\bar{c}, \mathrm{cs\bar{c}}, ud\bar{u}, sd\bar{s}, ss\bar{s}, dd\bar{d}$ بـه ترتیـب در جدولهای ۱ و ۲ نمایش داده شده است.

ملاحظه می‌کنیم که آهنـگ زمـانی بـرای واپاشـی پـاد ذرهٔ $\bar{b}$ یعنی $\bar{b} \to \bar{u}\bar{d}u$ بزرگتر از آهنگ زمانی بـرای واپاشـی کـوارک b یعنی $b \to ud\bar{u}$ می‌باشد. همچنین آهنگ زمـانی واپاشـی پـاد ذره $\bar{b} \to \bar{u}\bar{s}u$ کمتر از آهنگ زمانی واپاشی ذره $b \to us\bar{u}$ اسـت. در تقریب مرتبه اول $b \to ss\bar{s}$ و $b \to ds\bar{d}$ و در تقریب مرتبـه دوم $b \to ss\bar{s}(c\bar{c})$ و $b \to ds\bar{d}(c\bar{c})$ بـه ترتیـب واپاشـیهای غالـب می‌باشند.

اکنون می‌خواهیم نسبت تناسب واپاشیهای مختلف را از نظر تئوری و تجربی مقایسه کنیم. می‌دانـیم کـه کـل آهنـگ زمـانی واپاشی برابر با مجموع آهنگ زمانی هر یک از واپاشیها است،

$$\Gamma_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

و طول عمر هر ذره عکس Γ_{tot} است.

جدول ۲ . آهنگ زمانی (DR) واپاشیهای کوارک b برای واپاشیهای پنگوئن در تقریب مرتبهٔ دوم، $(DR\times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{GeV})$.

Process	DR	Process	DR
$b\to cs\bar{c}(d\bar{d})$	۱۰۳/۲۱	$b\to cd\bar{c}(d\bar{d})$	۱۰/۳۶
$b\to cs\bar{c}(u\bar{u})$	۹۸/۷۶	$b\to cd\bar{c}(u\bar{u})$	۹/۸۱۲
$b\to cs\bar{c}(c\bar{c})$	۸۱۱/۷۳	$b\to cd\bar{c}(c\bar{c})$	۷۵/۰۹
$b\to cs\bar{c}(s\bar{s})$	۲۱۷/۰۱	$b\to cd\bar{c}(s\bar{s})$	۲۲/۴۶
$b\to sd\bar{s}(d\bar{d})$	۱۷/۸۵	$b\to ds\bar{d}(d\bar{d})$	۲۳۱/۰۲
$b\to sd\bar{s}(u\bar{u})$	۱۲/۲۳	$b\to ds\bar{d}(u\bar{u})$	۲۱۹/۸۶
$b\to sd\bar{s}(c\bar{c})$	۱۰۷/۱۶	$b\to ds\bar{d}(c\bar{c})$	۹۷۸/۵۲
$b\to sd\bar{s}(s\bar{s})$	۳۹/۴۴	$b\to ds\bar{d}(s\bar{s})$	۳۹۹/۴۱
$b\to ud\bar{u}(d\bar{d})$	۳/۳۲۸	$b\to us\bar{u}(d\bar{d})$	۳۱/۸۶
$b\to ud\bar{u}(u\bar{u})$	۲/۴۱۵	$b\to us\bar{u}(u\bar{u})$	۲۷/۰۵
$b\to ud\bar{u}(c\bar{c})$	۲۸/۸۹	$b\to us\bar{u}(c\bar{c})$	۳۰۱/۱۴
$b\to ud\bar{u}(s\bar{s})$	۸/۱۹۷	$b\to us\bar{u}(s\bar{s})$	۹۰/۶۷
$b\to dd\bar{d}(d\bar{d})$	۱۹/۲۳	$b\to ss\bar{s}(d\bar{d})$	۱۱/۲۵۶
$b\to dd\bar{d}(u\bar{u})$	۱۰/۸۱	$b\to ss\bar{s}(u\bar{u})$	۲۴۰/۸۱
$b\to dd\bar{d}(c\bar{c})$	۱۳۱/۷۶	$b\to ss\bar{s}(c\bar{c})$	۹۹۸/۷۶
$b\to dd\bar{d}(s\bar{s})$	۴۲/۲۴	$b\to ss\bar{s}(s\bar{s})$	۴۱۷/۶۲

$$\tau=\frac{۱}{\Gamma_{tot}}$$

بدین ترتیب می‌توان نسبت تناسب هر ذره که در مد واپاشی i ام است را به‌صورت زیر تعریف کرد :

$$BR_i=\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}$$

از طرفی کل آهنگ زمانی واپاشی برابر با مجموع حالت شاخه‌ای و پنگوئن می‌باشد :

$$\Gamma_{tot}=\sum\ [\Gamma_{tot}^{Tree}+\Gamma_{tot}^{Penguin}]$$

کل آهنگ زمانی واپاشی حالت شاخه‌ای برابر است با [۱۴] :

$$\Gamma_{tot}^{Tree}=۳/۰۴۴\times۱۰^{-۱۳}$$

و کل آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن در تقریب مرتبهٔ اول و دوم برابر است با :

$$\Gamma_{tot}^{Penguin}=۵/۳۰۴\times۱۰^{-۱۵}$$

در نتیجه کل آهنگ زمانی واپاشیها برابر می‌شود با :

$$\Gamma_{tot}=۳/۰۹۷\times۱۰^{-۱۳}$$

به‌طور مثال مقدار تئوری نسبت تناسب یکی از واپاشیهای مزون B^- برابر است با :

$$BR_{B^-\to\pi^-\pi^\circ}=\frac{\Gamma_{B^-\to\pi^-\pi^\circ}}{\Gamma_{tot}}=\frac{\Gamma_{b\to ud\bar{u}}}{\Gamma_{tot}}$$

$$=\frac{۱/۰۳۵\times۱۰^{-۱۷}}{۳/۰۹۷\times۱۰^{-۱۳}}=۳/۳۴۱\times۱۰^{-۵}$$

و مقدار تجربی این واپاشی مطابق اندازه گیری آن در شتابدهنده $BABAR$ برابر است با :

$$BR_{B^-\to\pi^-\pi^\circ}<۱/۷\times۱۰^{-۵}$$

بدین ترتیب می‌توان بین مقادیر تئوری و آزمایشگاهی نسبت تناسب واپاشیهای مختلف مقایسه‌ای به عمل آورد. ملاحظه می‌کنیم که مقادیر تئوری محاسبه شده در این تحقیق به مقادیر آزمایشگاهی نزدیک است.

۶. بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق آهنگ زمانی واپاشیهای کوارک b در حالت پنگوئن گلئونی در تقریب مرتبهٔ اول و دوم محاسبه شده است. مطابق جدول ۱ واپاشی غالب در واپاشیهای هادرونی کوارک b، واپاشیهای $b \to ss\bar{s}$ و $b \to ds\bar{d}$ است چرا که آهنگ زمانی واپاشیهای $b \to s$ خیلی بیشتر از واپاشیهای $b \to d$ و $b \to u$ است. در این تحقیق، این نتیجه به‌دست آمد که تقریب مرتبهٔ دوم پنگوئن گلئونی در واپاشیهای کوارک b و پاد کوارک $\bar{b}$ خیلی کوچک می‌باشد و اثر اندکی در کل واپاشیها دارد. به عبارت دیگر توزیع جمله پنگوئن گلئونی در واپاشیهای کوارک b کوچک و تقریب مرتبهٔ دوم آن به مراتب کوچکتر است. در نتیجه آهنگ زمانی واپاشیهای کوارک b در حالت شاخه‌ای با مجموع حالت شاخه‌ای و پنگوئن اختلاف اندکی دارد. آهنگ زمانی و نسبت تناسب واپاشیهای مختلف در مدلهای مختلف بسیار به هم نزدیک می‌باشند ولی آهنگ زمانی کل مجموع حالت شاخه‌ای و پنگوئن نسبت به حالت شاخه‌ای درحدود ۱٪ بیشتر است. آهنگ زمانی واپاشیهای مختلف کوارک b و پاد کوارک $\bar{b}$ در حالت شاخه‌ای یکسان است اما در واپاشیهای پنگوئن گلئونی با یکدیگر متفاوت می‌باشند. به‌طور مثال داریم:

$$\Gamma_{b\to ds\bar{d}} < \Gamma_{\bar{b}\to \bar{d}\bar{s}d}\,, \quad \Gamma_{b\to ud\bar{u}} < \Gamma_{\bar{b}\to \bar{u}\bar{d}u}\,,$$
$$\Gamma_{b\to cd\bar{c}} < \Gamma_{\bar{b}\to \bar{c}\bar{d}c}\,, \quad \Gamma_{b\to dd\bar{d}} < \Gamma_{\bar{b}\to \bar{d}\bar{d}d}$$
$$\Gamma_{b\to cs\bar{c}} > \Gamma_{\bar{b}\to \bar{c}\bar{s}c}\,, \quad \Gamma_{b\to sd\bar{s}} > \Gamma_{\bar{b}\to \bar{s}\bar{d}s}\,,$$
$$\Gamma_{b\to us\bar{u}} > \Gamma_{\bar{b}\to \bar{u}\bar{s}u}\,, \quad \Gamma_{b\to ss\bar{s}} > \Gamma_{\bar{b}\to \bar{s}\bar{s}s}\,,$$

چرا که آهنگ زمانی کل حالت شاخه‌ای و پنگوئن گلئونی واپاشیهای مختلف کوارک b و پاد کوارک $\bar{b}$، $\Gamma_b^{total} = \Gamma_{\bar{b}}^{total}$، برابر هستند. به بیان دیگر، در هر واپاشی با شامل شدن قسمت پنگوئن پاد متقارن شدن ماده– پاد ماده ظاهر می‌شود. بیشترین این پاد تقارن در واپاشی ماده $b \to ud\bar{u}$ و پاد ماده $\bar{b} \to \bar{u}\bar{d}u$ ظاهر می‌شود که حدود ۷٪ است. به عبارت دیگر نسبت واپاشی ماده $b \to ud\bar{u}$ حدود ۷٪ کمتر از واپاشی پاد ماده $\bar{b} \to \bar{u}\bar{d}u$ است. همچنین نسبت واپاشی ماده $b \to us\bar{u}$ بیشتر از نسبت واپاشی پاد ماده $\bar{b} \to \bar{u}\bar{s}u$ است.

پیوست الف

محاسبهٔ آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن گلئونی کوارک b تا تقریب مرتبهٔ اول

از آنجائی که کوارک b در امتداد زاویه θ_b دارای اسپین ۱/۲– و در امتداد زاویه $\pi - \theta_b$ دارای اسپین ۱/۲ است و از آنجائی که اسپین کوارک b را در امتداد محور z و در چارچوب آزمایشگاه در حال سکون یعنی $p_b = ۰$ فرض شده است، بنابراین تابع موج کوارک b برابر است با :

$$\left|b_{(+۱/۲)}\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{V}}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix},$$
$$\left|b_{(-۱/۲)}\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{V}}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۰\\۱\end{pmatrix}. \qquad \text{(الف–۱)}$$

اندازهٔ حرکت کوارکهای p_k ، p_i ، $p_{\bar{j}}$ را در صفحه xz فرض می‌کنیم $(\phi = ۰)$، و از آنجایی که $\vec{p}_b = \vec{p}_i + \vec{p}_k + \vec{p}_{\bar{j}} = ۰$ است، خواهیم داشت.

$$p_k = p_k(\sin\theta_k, ۰, \cos\theta_k)\,,$$
$$p_i = p_i(\sin\theta_i, ۰, \cos\theta_i)\,,$$
$$p_{\bar{j}} = p_{\bar{j}}(\sin\theta_{\bar{j}}, ۰, \cos\theta_{\bar{j}})\,. \qquad \text{(الف–۲)}$$

بنابراین مولفه‌های دامنهٔ واپاشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$[\tilde{\sigma}_\mu(q_k b)] = \sqrt{۱+v_k}\,[(-\sin(\frac{\theta_k}{۲})\cos(\frac{\theta_k}{۲}))\tilde{\sigma}_\mu \begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix} \;\; or \;\; \begin{pmatrix}۰\\۱\end{pmatrix}]$$
$$[\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j)] = \sqrt{۱+v_i}\sqrt{۱+v_j}\,[(-\sin(\frac{\theta_i}{۲})\cos(\frac{\theta_i}{۲}))\tilde{\sigma}^\mu \times \begin{pmatrix}-\sin(\frac{\theta_j}{۲})\\ \cos(\frac{\theta_j}{۲})\end{pmatrix}].$$
(الف–۳)

به ازای مقادیر $\mu = ۰,۱,۲,۳$، مولفه‌های دامنهٔ واپاشی برای کوارک b با اسپین ۱/۲ و ۱/۲– برابر می‌شود با:

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]_{LL(۱/۲)} = \sqrt{۱+v_i}\sqrt{۱+v_j}\sqrt{۱+v_k} \times[\sin(\frac{\theta_i - \theta_j - \theta_k}{۲}) + \sin(\frac{\theta_i + \theta_j - \theta_k}{۲})].$$
$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]_{LL(-۱/۲)} = \sqrt{۱+v_i}\sqrt{۱+v_j}\sqrt{۱+v_k} \times[\cos(\frac{\theta_i - \theta_j - \theta_k}{۲}) - \cos(\frac{\theta_i + \theta_j - \theta_k}{۲})]. \qquad \text{(الف–۴)}$$

و مربع آن برابر است با:

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]^2_{LL(\frac{1}{2})} = (1+v_i)(1+v_j)(1+v_k)$$
$$\times[\frac{1}{2}(1-\cos(\theta_i-\theta_j-\theta_k))$$
$$+\frac{1}{2}(1-\cos(\theta_i+\theta_j-\theta_k))-\cos(\theta_i-\theta_k)+\cos(\theta_j)],$$
$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]^2_{LL(-1/2)} = (1+v_i)(1+v_j)(1+v_k)$$
$$\times[\frac{1}{2}(1+\cos(\theta_i-\theta_j-\theta_k))$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos(\theta_i+\theta_j-\theta_k))-\cos(\theta_i-\theta_k)-\cos(\theta_j)].$$
(الف–۵)

برای به‌دست آوردن مولفه‌های دامنه واپاشی، اکنون باید روی حالتهای اسپینی ۱/۲ و ۱/۲– کوارک b متوسط گیری کنیم:

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]^2_{spin-ave}$$
$$=(1+v_i)(1+v_j)(1+v_k)[1-\cos(\theta_i-\theta_k)]. \qquad \text{(الف–۶)}$$

رابطهٔ بالا برای حالت هلیسیته دلخواه (+,+,+) برای واپاشی $b\to q_i q_k \bar{q}_j$ می‌باشد. اکنون باید همهٔ حالتهای هلیسیته را به‌دست آورده و با هم جمع کنیم. با جمع هشت حالت هلیسیته خواهیم داشت :

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]^2_{spin-ave}$$
$$=\frac{1}{2}(1-v_i v_k\cos(\theta_i-\theta_k)). \qquad \text{(الف–۷)}$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از مربع مولفه‌های دامنه واپاشی، آهنگ زمانی واپاشیهای مختلف کوارک b را محاسبه کنیم. با استفاده از قاعدهٔ طلایی فرمی آهنگ دیفرانسیلی زمانی چنین واپاشیهایی در حالت کلی برابر است با:

$$d\Gamma = V^2|M|^2\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}(2\pi)^4 \qquad \text{(الف–۸)}$$
$$\times\delta^4(p_b-p_i-p_j-p_k).$$

مطابق پایستگی انرژی و تکانه، $E^2=p^2+m^2c^2$، داریم:

$$E_{q_j}=\sqrt{m^2_{q_j}+p^2_{q_i}+p^2_{q_k}+2p_{q_i}p_{q_k}\cos\theta}$$
$$(\theta=\theta_i-\theta_k) \qquad \text{(الف–۹)}$$

با جایگذاری در رابطهٔ آهنگ دیفرانسیلی زمانی واپاشی خواهیم داشت:

$$d\Gamma=V^2[\frac{1}{V\sqrt{2}}\frac{g_s^2}{4\pi^2}T^a_{q_k b}T^a_{q_i q_j}F_1^L(q^2)]^2$$
$$\times\frac{1}{2}(1-v_i v_k\cos(\theta_i-\theta_k))$$
$$\times\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_b-p_i-p_j-p_k).$$
(الف–۱۰)

بعد از کمی ساده سازی و انتگرال گیری بر روی p_j خواهیم داشت:

$$\Gamma=[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{g_s^2}{4\pi^2}T^a_{q_k b}T^a_{q_i q_j}]^2$$
$$\times\frac{1}{2}\int\int[F_1^L(q^2)]^2\ (1-v_i v_k\cos(\theta_i-\theta_k))$$
$$\times\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\ (2\pi)\ \delta(E_i+E_j+E_k-M_b)\ . \qquad \text{(الف–۱۱)}$$

با جایگذاری E_j در رابطهٔ بالا و اینکه :

$$\int\delta(E_i+E_k+\sqrt{m^2_{q_j}+p^2_{q_i}+p^2_{q_k}+2p_{q_i}p_{q_j}\cos(\theta_i-\theta_k)}-M_b)$$
$$d(\cos(\theta_i-\theta_k))$$
$$=\frac{M_b-E_i-E_k}{p_i p_k}\ . \qquad \text{(الف–۱۲)}$$

همچنین ،

$$\cos(\theta_i-\theta_k)$$
$$=\frac{(M_b\_(E_i+E_k))^2-(m_j^2+p_i^2+p_k^2)}{2p_i p_k}\ . \qquad \text{(الف–۱۳)}$$

آهنگ زمانی واپاشی (الف–۱۱) برابر می‌شود با:

$$\Gamma=[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{g_s^2}{4\pi^2}T^a_{q_k b}T^a_{q_i q_j}]^2$$
$$\times\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int p_i^2dp_i d\Omega\int[F_1^L(q^2)]^2p_k^2dp_k\frac{(M_b-E_i-E_k)}{p_i p_k}$$
$$\times(1-\frac{(M_b-(E_i+E_k))^2-(m_j^2+p_i^2+p_k^2)}{2E_iE_k})\ . \qquad \text{(الف–۱۴)}$$

با جایگذاری کمیتهای E_i و E_k بر حسب اندازهٔ حرکت و جرم در رابطهٔ بالا و از آنجائی‌که $-1\le\cos\theta\le 1$ است؛ بنابراین:

$$0\le p_i\le\frac{M_b}{2},\quad 0\le p_k\le\frac{M_b}{2}\ . \qquad \text{(الف–۱۵)}$$

و فرض می‌کنیم که :

$$p_i = x\frac{M_b}{2}, \quad p_k = y\frac{M_b}{2}. \qquad \text{(الف–۱۶)}$$

و جایگذاری p_i و p_k در رابطهٔ (الف–۱۴) و کمی ساده سازی، آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن گلئونی کوارک $b \to q_i q_k \bar{q}_j$ تا تقریب مرتبهٔ اول برابر می‌شود با،

$$\Gamma = 3\frac{1}{8\pi^3}\left(\frac{M_b}{2}\right)^5 \int_0^1 \int_0^1 [\xi(x)]^2\, xy\, f_1\, g_1\, dxdy . \qquad \text{(الف–۱۷)}$$

ضریب ۳ نماینده رنگ کوارک b می‌باشد و

$$f_1 = (2 - \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{y^2 + b^2}),$$

$$g_1 = \left(1 - \frac{(f_1)^2 - (c^2 + x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + a^2}\sqrt{y^2 + b^2}}\right),$$

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{g_s^2}{4\pi^2}(T^a_{q_k b} T^a_{q_i q_j})\ F_1^L(q^2). \qquad \text{(الف–۱۸)}$$

ثابتهای a و b و c عبارتند از :

$$a = \frac{2m_i}{M_b}, \qquad b = \frac{2m_k}{M_b}, \qquad c = \frac{2m_j}{M_b}. \qquad \text{(الف–۱۹)}$$

پیوست ب

محاسبه آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن گلئونی کوارک b تا تقریب مرتبهٔ دوم

از آنجائی که کوارک q_m در امتداد زاویه θ_m دارای اسپین ۱/۲- و در امتداد زاویه $\pi - \theta_m$ دارای اسپین ۱/۲ است و از آنجائی که اسپین کوارک q_m را در امتداد محور z و در چارچوب آزمایشگاه در حال سکون یعنی $p_{q_m} = 0$ فرض شده است، بنابراین تابع موج کوارک q_m برابر است با :

$$\left|q_{m(-1/2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\left|q_{m(+1/2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad \text{(ب–۱)}$$

همچنین فرض می‌کنیم اندازهٔ حرکت کوارکهای p_o ، p_p ، $p_{\bar{j}}$ در صفحه xz باشند، یعنی مؤلفهٔ y آن صفر باشد $(\phi = 0)$، پس از آنجایی که $\vec{p}_{q_m} = \vec{p}_o + \vec{p}_p + \vec{p}_{\bar{j}} = 0$ است، خواهیم داشت:

$$p_p = p_p(\sin\theta_p, 0, \cos\theta_p),$$
$$p_o = p_o(\sin\theta_o, 0, \cos\theta_o),$$
$$p_{\bar{j}} = p_{\bar{j}}(\sin\theta_{\bar{j}}, 0, \cos\theta_{\bar{j}}). \qquad \text{(ب–۲)}$$

بنابراین مولفه‌های دامنهٔ واپاشی (۳۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m)] = \sqrt{1 + v_j}\,[(-\sin(\tfrac{\theta_j}{2})\cos(\tfrac{\theta_j}{2}))\tilde{\sigma}_\mu \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} or \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}],$$

$$[\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p)] = \sqrt{1 + v_o}\sqrt{1 + v_p}$$
$$\times [(-\sin(\tfrac{\theta_o}{2})\cos(\tfrac{\theta_o}{2}))\tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix}-\sin(\tfrac{\theta_p}{2})\\ \cos(\tfrac{\theta_p}{2})\end{pmatrix}]. \qquad \text{(ب–۳)}$$

به ازای $\mu = 0,1,2,3$ و اینکه $[\tilde{\sigma}^\mu][\tilde{\sigma}_\mu] = \tilde{\sigma}^0\tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}^1\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}^2\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}^3\tilde{\sigma}_3$ است، مولفه‌های دامنهٔ واپاشی برای کوارک q_m با اسپین ۱/۲ و ۱/۲- برابر می‌شود با:

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m))(\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p))]_{LL(1/2)} =$$
$$\times\sqrt{1 + v_o}\sqrt{1 + v_p}\sqrt{1 + v_j}$$
$$\times(\sin(\frac{\theta_o - \theta_p - \theta_j}{2}) + \sin(\frac{\theta_o + \theta_p - \theta_j}{2})),$$
$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m))(\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p))]_{LL(-1/2)} =$$
$$\times\sqrt{1 + v_o}\sqrt{1 + v_p}\sqrt{1 + v_j}$$
$$\times(\cos(\frac{\theta_o - \theta_p - \theta_j}{2}) - \cos(\frac{\theta_o + \theta_p - \theta_j}{2})). \qquad \text{(ب–۴)}$$

با مربع این جملات و متوسط گیری روی اسپین ۱/۲ و ۱/۲-، مولفه‌های دامنهٔ واپاشی کوارک q_m برابر است با:

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m))(\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p))]^2_{spin-ave}$$
$$= (1 + v_o)(1 + v_p)(1 + v_j)[1 - \cos(\theta_o - \theta_j)]. \qquad \text{(ب–۵)}$$

با جایگذاری رابطهٔ بالا در (۳۶)، دامنه قسمت شاخه‌ای $g \to q'_o q'_p$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{W}^\mu = \tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_j q_m} T^a_{q'_o q'_p})[\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m)][\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p)]$$
$$= \tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_j q_m} T^a_{q'_o q'_p})(1 + v_o)(1 + v_p)(1 + v_j)$$
$$\times[1 - \cos(\theta_o - \theta_j)]. \qquad \text{(ب–۶)}$$

حال که دامنه قسمت شاخه‌ای $g \to q'_o q'_p$ را به‌دست آوردیم به قسمت اصلی یعنی دامنهٔ واپاشی پنگوئن (۳۱) باز می‌گردیم. با جایگذاری $\bar{W}^\mu$ از رابطه (۳۶) در دامنهٔ واپاشی پنگوئن (۳۱) خواهیم داشت:

$$M^{peng}=\left(\frac{g_s^2}{4\pi^2}\right)^2\ [\bar{u}_{q_k}(p_{q_k})T^a_{q_k b}F_1^L(q^2)\tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)]$$
$$\times[\bar{u}_{q_i}(p_{q_i})\ \tilde{\sigma}^\mu(T^a_{q_j q_m}\ T^a_{q'_o q'_p})$$
$$\times[\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m)]\ [\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p)]\ T^a_{q_i q_j}\ \ v_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})].$$
(ب–۷)

با کمی ساده سازی داریم:

$$M^{peng}=\left(\frac{g_s^2}{4\pi^2}\right)^2F_1^L(q^2)\ (T^a_{q_k b}T^a_{q_i q_j})\ (T^a_{q_j q_m}\ T^a_{q'_o q'_p})$$
$$\times[\tilde{\sigma}_\mu(q_k b)]\ [\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j)]$$
$$\times[\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m)]\ [\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p)].$$
(ب–۸)

که در آن:

$$[\tilde{\sigma}_\mu(q_k b)]=[\bar{u}_{q_k}(p_{q_k})\tilde{\sigma}_\mu u_b(p_b)]\,,$$
$$[\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j)]=[\bar{u}_{q_i}(p_{q_i})\tilde{\sigma}^\mu u_{\bar{q}_j}(p_{\bar{q}_j})]\,.$$
(ب–۹)

ابتدا دو عبارت (ب–۹) را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور تابع موج کوارک b را همانند (الف–۱) و اندازه حرکت کوارکهای p_k ، p_i ، $p_{\bar{j}}$ را همانند (الف–۲) در نظر می‌گیریم. برای به‌دست آوردن متوسط مولفه‌های دامنه واپاشی همانند (الف–۶) محاسبه کرده، خواهیم داشت:

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))]^2_{spin-ave}$$
$$=(1+v_i)(1+v_j)(1+v_k)[1-\cos(\theta_i-\theta_k)].$$
(ب–۱۰)

چون برای به‌دست آوردن آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئن کوارک b احتیاج به مربع دامنهٔ واپاشی پنگوئن است لذا لازم است که مربع رابطهٔ (ب–۸) را به‌دست آوریم. با استفاده از روابط (ب–۵) و (ب–۱۰) می‌توان مربع دامنهٔ واپاشی پنگوئن (ب–۸) را به‌دست آورد :

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))(\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m))(\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p))]^2_{spin-ave}$$
$$=(1+v_i)(1+v_j)(1+v_k)(1+v_o)(1+v_p)$$
$$\times(1+v_j)[1-\cos(\theta_i-\theta_k)][1-\cos(\theta_o-\theta_j)]$$
(ب–۱۱)

عبارت بالا هنوز قانع کننده نیست چرا که در عبارت بالا فقط یکی از حالات ممکن هلیسیته در نظر گرفته شده است. اکنون باید همه حالتهای ممکن هلیسیته را به‌دست آورده، با هم جمع کنیم. ۶۴ حالت ممکن هلیسیته داریم که بعد از جمع همه آنها خواهیم داشت :

$$[(\tilde{\sigma}_\mu(q_k b))(\tilde{\sigma}^\mu(q_i q_j))(\tilde{\sigma}_\mu(q_j q_m))(\tilde{\sigma}^\mu(q'_o q'_p))]^2_{spin-ave}$$
$$=64\ [1-v_o v_j\cos(\theta_o-\theta_j)-v_k v_i\cos(\theta_i-\theta_k)$$
$$+v_j v_o v_i v_k\cos(\theta_i-\theta_k)\cos(\theta_o-\theta_j)].$$
(ب–۱۲)

با جایگذاری رابطهٔ بالا در دامنهٔ واپاشی پنگوئن (ب–۸)، مربع این دامنه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\left|M^{peng}\right|^2=\left|\left(\frac{g_s^2}{4\pi^2}\right)^2F_1^L(q^2)\ (T^a_{q_k b}T^a_{q_i q_j})\ (T^a_{q_j q_m}\ T^a_{q'_o q'_p})\right|^2$$
$$\times 64\ [1-v_o v_j\cos(\theta_o-\theta_j)-v_k v_i\cos(\theta_i-\theta_k)$$
$$+v_j v_o v_i v_k\cos(\theta_i-\theta_k)\cos(\theta_o-\theta_j)]$$
(ب–۱۳)

اکنون می‌خواهیم با استفاده از مجذور مولفه‌های دامنهٔ واپاشی، آهنگ زمانی واپاشیهای پنگوئنی کوارک b تا تقریب مرتبهٔ دوم را محاسبه کنیم. با استفادهٔ از قاعدهٔ طلایی فرمی آهنگ دیفرانسیلی زمانی چنین واپاشیهایی در حالت کلی برابر است با:

$$d\Gamma=V^2\left|M\right|^2\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_o}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_b-p_i-p_j-p_k-p_p-p_o)$$
(ب–۱۴)

با جایگذاری رابطهٔ (ب–۱۳) در رابطهٔ بالا و مرتب کردن جملات بر حسب متغییرهای انتگرال گیری، خواهیم داشت :

$$\Gamma=64\ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{g_s^2}{4\pi^2}\right)^2(T^a_{q_j q_m}T^a_{q'_o q'_p})(T^a_{q_k b}T^a_{q_i q_j})\right]^2$$
$$\times(I_1^{peng}+I_2^{peng}+I_3^{peng}).$$
(ب–۱۵)

اینجا I_1^{peng} و I_2^{peng} و I_3^{peng} انتگرالهای فضای فاز هستند که عبارتند از :

$$I_1^{peng}=\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int[F_1^L(q^2)]^2\ \ (1-v_o v_j\cos(\theta_o-\theta_j))$$
$$\times(2\pi)\delta(M_b-E_k-E_i-E_j-E_o-E_p)$$
$$\times(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_b-\vec{p}_i-\vec{p}_j-\vec{p}_k-\vec{p}_p-\vec{p}_o)$$
$$\times\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_o}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}\,,$$

$$I_2^{peng}=-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int[F_1^L(q^2)]^2\ \ v_i v_k\cos(\theta_i-\theta_k)$$
$$\times(2\pi)\delta(M_b-E_k-E_i-E_j-E_o-E_p)$$
$$\times(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_b-\vec{p}_i-\vec{p}_j-\vec{p}_k-\vec{p}_p-\vec{p}_o)$$
$$\times\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_o}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_p}{(2\pi)^3}\,,$$

$$I_3^{peng}$$
$$= \int\int\int\int\int [F_1^L(q^2)]^2 \; v_o v_j v_i v_k \cos(\theta_o - \theta_j)\cos(\theta_i - \theta_k)$$
$$\times (2\pi)\delta(M_b - E_k - E_i - E_j - E_o - E_p)$$
$$\times (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_b - \vec{p}_i - \vec{p}_j - \vec{p}_k - \vec{p}_p - \vec{p}_o)$$
$$\times \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_o}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3} . \qquad \text{(ب-۱۶)}$$

اکنون باید I_3^{peng} ، I_2^{peng} ، I_1^{peng}، را محاسبه کنیم وسپس در داخل رابطهٔ (ب-۱۵) قرار دهیم. همانند روشی که در پیوست الف انجام داده‌ایم، می‌توان انتگرالهای فضای فاز را به‌صورت زیر محاسبه کرد.

$$I_1^{peng} = \frac{1}{5} \frac{1}{16\pi^7} (\frac{M_b}{4})^{11} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 dx\, dy\, dz\, [F_1^L(q^2)]^2 \, xyz^5 \, f_2 \, g_2 ,$$
$$I_2^{peng} = \frac{1}{7} \frac{1}{16\pi^7} (\frac{M_b}{4})^{11} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 dx\, dy\, dz\, [F_1^L(q^2)]^2 \, xyz^7 \, h \, f_2 ,$$
$$I_3^{peng}$$
$$= \frac{-1}{7} \frac{1}{16\pi^7} (\frac{M_b}{4})^{11} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 dx\, dy\, dz\, [F_1^L(q^2)]^2 \, xyz^7 \, h \, f_2 \, g_2 , \qquad \text{(ب-۱۷)}$$

که در آن داریم:

$$f_2 = (4 - \sqrt{z^2 + a^2} - \sqrt{z^2 + b^2}) - (\sqrt{x^2 + c^2} + \sqrt{y^2 + d^2})$$
$$g_2 = 1 - \frac{(f_2)^2 - (e^2 + x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + c^2}\sqrt{y^2 + d^2}} ،$$
$$h = \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} \qquad \text{(ب-۱۸)}$$

که ثابتهای e,d,c,b,a به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$a = \frac{4m_i}{M_b}, \quad b = \frac{4m_k}{M_b}, \quad c = \frac{4m_p}{M_b}, \quad d = \frac{4m_j}{M_b}, \quad e = \frac{4m_o}{M_b} . \qquad \text{(ب-۱۹)}$$

اکنون که مقادیر فضای فاز I_1^{peng}، I_2^{peng} و I_3^{peng} مشخص شده‌اند، می‌توان با جایگذاری آنها در رابطهٔ (ب-۱۵)، آهنگ زمانی واپاشی گلئون پنگوئن تا تقریب مرتبهٔ دوم $b \to q_i q_k \bar{q}_j (q'_o q'_p)$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\Gamma_{b \to q_i q_k \bar{q}_j (q_o q_p)} = 3 \times 64 \; [\frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{g_s^2}{4\pi^2})^2 (\frac{16}{81})]^2$$
$$\times \frac{1}{16\pi^7} (\frac{M_b}{4})^{11}$$
$$\times \int_0^1\int_0^1\int_0^1 dxdydz \; [F_1^L(q^2)]^2$$
$$\times \left\{ \frac{xyz^5}{5} f_2 \; g_2 + \frac{xyz^7}{7} h \; f_2 - \frac{xyz^7}{7} h \; f_2 g_2 \right\}. \qquad \text{(ب-۲۰)}$$

مراجع

1. A Vainshtein, "*How Penguin started to fly*," hep-ph/9906263.
2. R Fleischer, "*Exploring CP Violation and Penguin Effects through $B^0_d \to D^+ D^-$ and $B^0_s \to D^+_s D^-_s$*", arXiv:0705.4421.
3. T N Pham, "Charming penguin in nonleptonic B decays," *AIP Conf. Proc.* **602** (2001) 206-211.
4. R Fleischer, S Recksiegel, "*b -> d Penguins: CP Violation, General Lower Bounds on the Branching Ratios and Standard Model Tests*," hep-ph/0511325.
5. R Fleischer, S Recksiegel, *Phys. Rev.* D **71** (2005) 051501.
6. R Fleischer, "*Flavour Physics and CP Violation*," hep-ph/0608010.
7. Z Xiao, C S Li, K T Chao, *Phys. Lett*. B **473** (2000) 148-156.
8. M Beneke, J Rohrer, D Yang, *Phys. Rev. Lett*. **96** (2006) 141801.
9. S A Abel, W N Cottingham, I B Wittingham, *Phys. Rev*. D **58** (1998) 073006.
10. Z Xiao, W Li, L Guo, G Lu, *Eur. Phys. J*. C **18** (2001) 681-709.
11. A J Buras, P Gambino, U Haisch, *Nucl. Phys*. B **570** (2000) 117-154.
12. Particle Data Group; *J. Phys.* G **33** (2006) 1.
13. A Ali, C Greub, *Phys. Rev.* D **57** (1998) 2996-3016.
14. W N Cottingham, H Mehrban, I B Wittingham, *Phys. Rev*. D **60** (1999) 114029.