

a\_kargarian@yahoo.com :

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۲/۱۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۸۹/۱۱/۲۴)

(PIC)

شد، کروسکال<sup>۲</sup> و زابوسکی<sup>۳</sup> با استفاده از روش‌های عددی نشان دادند دو سالیتون پس از برخورد در اثر برهم کنش شتاب اندکی می‌گیرند، بنابراین سالیتون‌ها خواص ذره‌ای دارند. شریدان<sup>۴</sup> جواب‌های سالیتونی معادله KdV در یک پلاسمای سرد با یون‌های جنبشی و الکترون‌های بولتزمنی را با استفاده از روش شبیه‌سازی مورد مطالعه قرار داد، طبق نتایج به دست آمده سالیتون‌هایی با دامنه بزرگ و سرعت ۱/۵۹ برابر سرعت امواج یون آکوستیک در پلازما ناپایدار می‌باشند، بنابراین تنها برای سالیتون‌هایی با دامنه کوچک تئوری کرتوگ دوریس بر نتایج

سالیتون نوعی ساختار پایای غیرخطی است که حین انتشار در محیط، شکل و دامنه خود را به خوبی حفظ می‌کند، این ساختار پایا حاصل تعادل بین اثرات پاشندگی و اثرات غیر خطی در یک محیط می‌باشد [۱].

دو دسته عمده سالیتون‌ها در پلازما از معادله غیرخطی کرتوگ دوریس (KdV)<sup>۱</sup> و معادله غیرخطی شرودینگر به دست می‌آیند. در دامنه‌های بزرگ معادله KdV حاکم بر انتشار امواج یونی در پلازما است و جواب این معادله را سالیتون یون آکوستیک می‌نامند [۲].

شبیه‌سازی رفتارهای غیرخطی با ظهور کامپیوترها ممکن

۲. Kruskal

۳. Zabusky

۴. Sheridan

۱. Kortweg-de Vrise

معادلات بی بعد استفاده کرده‌ایم.

چگالی الکترون از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n_e = e^{\phi}, \quad (1)$$

که در آن  $\phi \equiv e\varphi / KT_e$  دمای الکترون،  $e$  بار الکترون و  $K$  ثابت بولتزمن می‌باشد (پتانسیل الکتریکی بهنجار شده و  $n_e / n_0 \equiv n_e$  چگالی در حال تعادل است) چگالی بهنجار شده الکترون می‌باشد.

دینامیک یون‌ها به صورت ذره‌ای بررسی شده است. ابتدا چگالی یون را بر روی نقاط شبکه از طریق وزن دهی محاسبه می‌کنیم، به عنوان مثال در تقریب مرتبه اول اطلاعات هر ذره داخل یک سلول با تابع وزنی که متناسب با معکوس فاصله ذره با نزدیک ترین نقاط شبکه است، توزیع می‌شود. سپس با حل معادله پواسون به روش FFT<sup>۲</sup> میدان الکتریکی بر روی نقاط شبکه به کمک چگالی یون و الکترون محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(n_i - n_e), \quad (2)$$

که در آن  $n_i \equiv n_i / n_0$  چگالی بهنجار شده یون می‌باشد، و  $x$  به  $\lambda_{De}$  بهنجار شده است. در مرحله بعد از طریق درون یابی، میدان در مکان ذرات محاسبه شده و بعد از محاسبه نیروی وارد بر ذرات سرعت و مکان آنها طبق روابط (۳) و (۴) در یک گام زمانی دچار تحول می‌گردد.

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{d\varphi}{dx_i}, \quad (3)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad (4)$$

که در آن  $v_i \equiv v_i / C_s$  و  $C_s = (KT_e / M_i)^{1/2}$  سرعت موج یون-صوت و  $M_i$  جرم یون است (سرعت بهنجار شده یون و  $t \equiv t\omega_{pi}$  فرکانس یونی پلاسما است) زمان بهنجار شده می‌باشد [۵ و ۶].

یکی از آزمون‌های درستی کد شبیه‌سازی، بررسی قانون بقای

تجربی منطبق می‌باشد [۳]. مدودف<sup>۱</sup> نیز اثر دمایی یون بر روی سالیتون‌های یون آکوستیک را با استفاده از روش‌های محاسباتی بررسی کرد، نتایج به دست آمده با جواب‌های سالیتونی معادله KdV و نتایج تجربی مطابقت داشتند [۴]. در این مقاله با استفاده از کد شبیه‌سازی ذره در جعبه یک بعدی، پایداری سالیتون‌های یون آکوستیک در پلاسمایی شامل الکترون‌های بولتزمنی و یون‌های ذره‌ای را مورد بررسی قرار داده و نشان داده‌ایم سالیتون حین حرکت در محیط شکل و سرعت خود را به خوبی حفظ می‌کند. هم چنین نمودارهای مربوط به چگالی یون و چگالی الکترون و فضای فاز یون نیز که حرکت این ساختار پایا در فضای فاز و موقعیت را به خوبی نشان می‌دهند را نمایش داده‌ایم.

ابتدا ساختار کد شبیه‌سازی و بخش‌های مختلف آن به طور کامل توضیح داده شده است سپس نمودار پاشندگی امواج یون آکوستیک در ناحیه خطی و هم چنین نمودار مربوط به خطای نسبی انرژی کل به عنوان آزمون درستی کد شبیه‌سازی رسم شده‌اند و در نهایت دینامیک سالیتون در دستگاه مختصات متحرک با سرعت سالیتون و هم چنین دستگاه مختصات آزمایشگاه بررسی شده است.

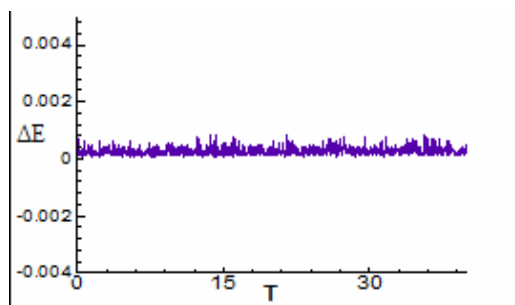
به منظور استفاده از روش شبیه‌سازی ذره در جعبه مجموعه‌ای از میلیون‌ها ذره (یون) را داخل یک جعبه شبیه‌سازی با ابعاد معلوم و متناهی در نظر می‌گیریم، این جعبه توسط خطوط موازی با مرزها به سلول‌هایی با عرض یکسان ( $\Delta x$ ) تقسیم شده است. محل تقاطع این خطوط با جعبه نقاطی را مشخص می‌کند که به نقاط شبکه معروفند. با اعمال شرایط مسئله واقعی (اعم از میدان، پتانسیل الکتریکی، دما، توزیع حرارتی و غیره) به ذرات، سیستمی شبیه به سیستم واقعی داریم که می‌توان رفتار آن را مورد بررسی قرار داد. الکترون‌ها در حال تعادل حرارتی می‌باشند بنابراین چگالی آنها از معادله بولتزمن (رابطه (۱)) به دست می‌آید. به منظور پرهیز از کار با پارامترهای بزرگ از

۲. Fast Fourier Transform

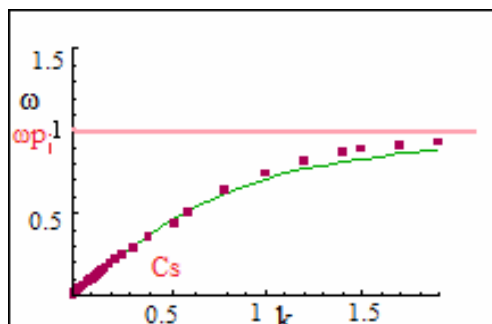
۱. Medvedev

جدول ۱. پارامترهای شبیه‌سازی.

تعداد ذرات (Np)	۱۰ <sup>۶</sup>
تعداد نقاط شبکه (Ng)	۱۰۰
طول جعبه شبیه‌سازی (L)	۱۰
پای شبکه (Δx)	۰/۱
عدد موج (K)	۵
گام زمانی (Δt)	۰/۰۱



شکل ۱. نمودار خطای نسبی انرژی بر حسب زمان.



شکل ۲. نمودار پاشندگی موج یون صوت پلاسما. منحنی مربوط به نمودار تئوری و نقاط مربوط به نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی است.

فرکانس یونی پلاسما می‌باشد. بنابراین برای طول موج‌های کوتاه موج یون صوت به موجی با فرکانس ثابت تبدیل می‌شود [7]. به منظور شبیه‌سازی رابطه پاشندگی موج یون صوت توسط کد مذکور ابتدا اختلالی با دامنه کوچک در نظر می‌گیریم، با محاسبه میدان الکتریکی بر روی نقاط شبکه،  $E(x,t)$  را در هر گام زمانی برای تمام نقاط شبکه محاسبه می‌کنیم سپس با استفاده از تبدیل فوری سریع (FFT)، طیف توانی  $|E(k,\omega)|$  را به دست می‌آوریم. پس از آن به ازای هر فرکانس، عدد موج یا  $k$ ی را پیدا می‌کنیم که برای آن،  $|E(k,\omega)|$  بیشینه است. به این ترتیب یک نقطه از نمودار پاشندگی  $(\omega,k)$  به دست می‌آید. این کار برای  $\omega$ های مختلف انجام شده و نمودار  $\omega = \omega(k)$  به ازای پارامترهای داده شده در جدول ۱ رسم شده است [۸ و ۹].

در شکل ۲ نمودار پاشندگی موج یون صوت با استفاده از شبیه‌سازی و همچنین نمودار پاشندگی تحلیلی (رابطه (۵)) نشان

انرژی است. در شکل ۱ نمودار مربوط به خطای نسبی انرژی  $(\Delta E)$  که توسط رابطه (۵) تعریف می‌شود، به ازای پارامترهای داده شده در جدول ۱ رسم شده است.

$$\Delta E = \frac{E - E_0}{E_0}, \quad (5)$$

که در آن  $E_0$  انرژی اولیه ذرات و  $E$  انرژی در هر لحظه می‌باشد. این منحنی با خطای کمتر از ۰/۰۱ درصد نشان می‌دهد قانون بقای انرژی در حین اجرای کد به خوبی رعایت می‌شود.

در این مرحله آزمونی جهت بررسی صحت کد شبیه‌سازی در ناحیه خطی صورت گرفته است. بدین منظور رابطه پاشندگی امواج یون صوت در ناحیه خطی را مورد ارزیابی قرار داده‌ایم. با حل تحلیلی معادلات سیالی یون، رابطه پاشندگی امواج یون آکوستیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\omega}{k} = \left( C_s^2 \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

که در آن  $\lambda_{De} \equiv V_{Te} / \omega_{pe}$  سرعت حرارتی الکترون  $V_{Te}$  و فرکانس الکترونی پلاسما است) طول موج دمای الکترون و  $C_s = (KT_e / M_i)^{\frac{1}{2}}$  این رابطه در حد طول موج‌های بلند ( $\lambda_D^2 k^2 \ll 1$ ) به صورت زیر می‌باشد:

$$\omega = C_s k, \quad (7)$$

و در طول موج‌های کوتاه ( $\lambda_D^2 k^2 \ll 1$ ) به مجانب زیر نزدیک می‌شود:

$$\omega = \omega_{pi} = \frac{n_e e^2}{M_i \epsilon_0}. \quad (8)$$

تطابق داشته باشد به طوری که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v) dv = n_i(x), \quad (9)$$

که در آن  $f_i(x, v)$  تابع توزیع ذرات و  $n_i(x)$  چگالی یونها است. به منظور انتخاب شرایط اولیه مناسب از جواب سالیوتونی معادله KdV استفاده می‌کنیم [۷]:

$$\varphi(x) = \varphi_{max} \operatorname{sech}^2(x/D), \quad (10)$$

که در آن  $\varphi_{max}$  دامنه اختلال و  $D$  پهنای آن می‌باشد.

با استفاده از معادله پواسون و رابطه (۱) برای چگالی

الکترون، چگالی اولیه یون از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n_i = e^{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (11)$$

بنابراین به کمک روابط (۹) و (۱۱) تابع توزیع مناسب برای تعیین شرایط اولیه یونها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x, v) = e^{-\gamma(v-u)} \left( n_e - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

که در آن  $u$  سرعت متوسط یون می‌باشد.

به کمک تابع توزیع  $f_i(x, v)$  مکان و سرعت اولیه یونها

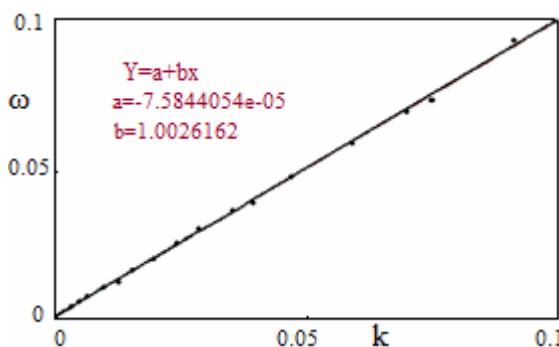
تعیین می‌شود. پس از تعیین شرایط مناسب برای یونها چگالی آنها بر روی نقاط شبکه از طریق وزن دهی محاسبه می‌گردد، سپس با حل معادله پواسون، پتانسیل و میدان الکتریکی در هر گام زمانی بر روی نقاط محاسبه می‌شود. در مرحله بعد از طریق درون یابی میدان در مکان یونها محاسبه شده و بعد از محاسبه نیروی وارد بر یونها سرعت و مکان آنها در یک گام زمانی دچار تحول می‌گردد.

با تعیین مکان و سرعت ذرات در هر گام زمانی می‌توان چگالی و تابع توزیع مربوط به آنها را محاسبه نمود. آنتروپی سیستم که از رابطه زیر به دست می‌آید بایستی با گذشت زمان ثابت بماند.

$$S = - \int f^2(x, v) dx dv. \quad (13)$$

خطای نسبی آنتروپی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta S = \frac{S - S_0}{S_0}, \quad (14)$$



شکل ۳. نمودار پاشندگی موج یون صوت برای طول موج‌های بلند ( $k$  های کوچک).

داده شده است.

از آنجا که سرعت‌ها به  $C_s$  بی بعد شده‌اند انتظار داریم شیب نمودار پاشندگی که برای  $k$ های کوچک طبق معادله (۷)  $C_s$  می‌باشد، برابر با ۱ باشد. در شکل ۳ نمودار پاشندگی برای  $k$ های کوچک نشان داده شده است. شیب نمودار برابر با  $b=1/0.0261$  می‌باشد که با دقت خوبی با حل تحلیلی تطابق دارد.

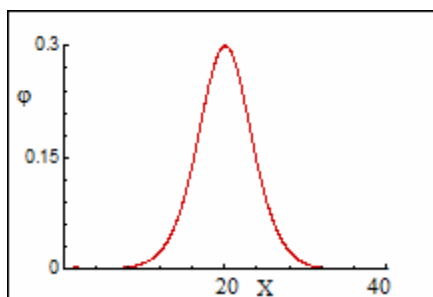
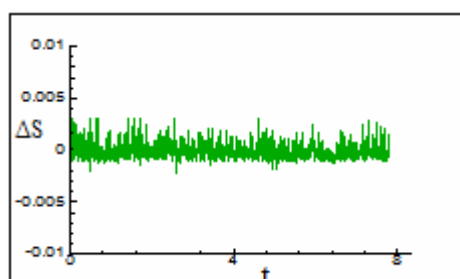
هم چنین طبق رابطه (۸) امواج یون صوت برای طول موج‌های کوچک به امواج با فرکانس ثابت تبدیل می‌شوند که این فرکانس برابر با فرکانس یونی پلاسما ( $\omega_{pi}$ ) می‌باشد. به دلیل اینکه  $\omega$  به  $\omega_{pi}$  بی بعد شده است انتظار داریم در  $\omega=1$  شیب منحنی پاشندگی صفر شود. این مطلب در شکل ۲ نشان داده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند با وجود طبیعت نوفه‌ای کدهای ذره‌ای این کد در ناحیه خطی به خوبی کار می‌کند.

### KdV

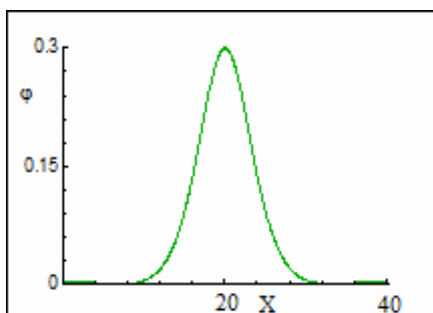
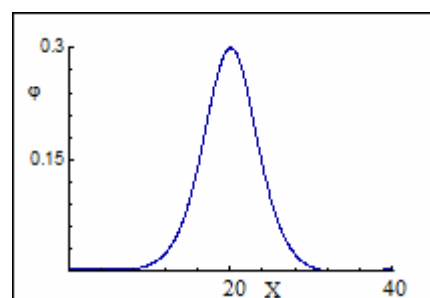
در این مرحله انتشار سالیوتون یون آکوستیک را توسط کد شبیه‌سازی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه یونها را ذره‌ای در نظر گرفته ایم، ابتدا بایستی سرعت و مکان اولیه آنها با استفاده از یک تابع توزیع معین در فضای فاز تعیین شود، بدین منظور یک شبکه فاز دو بعدی که در جهت مکان دارای  $Ngx$  نقطه و در جهت سرعت دارای  $Ngv$  نقطه می‌باشد را در نظر می‌گیریم. آرایش یونها در فضای فاز باید به گونه‌ای باشد که اگر چگالی یونی را با روش وزن دهی بر روی نقاط شبکه به دست آوریم با انتگرال تابع توزیع روی فضای سرعت

جدول ۲. پارامترهای شبیه سازی.

تعداد ذرات (Np)	$10^6 \times 45$
تعداد نقاط شبکه در راستای x (Ngx)	۸۰۱
تعداد نقاط شبکه در راستای v (Ngv)	۱۰۱
طول جعبه شبیه سازی (L)	۴۰
بیشینه سرعت (Vmax)	۵
کمینه سرعت (Vmin)	-۵
گام زمانی ( $\Delta t$ )	۰/۰۰۵
پای شبکه ( $\Delta x$ )	۰/۰۵
سرعت سالیتون ( $u$ )	۱/۱۵
دامنه سالیتون ( $\phi_{max}$ )	۰/۳

شکل ۵. منحنی پتانسیل بر حسب مکان در زمان  $t=0$ .

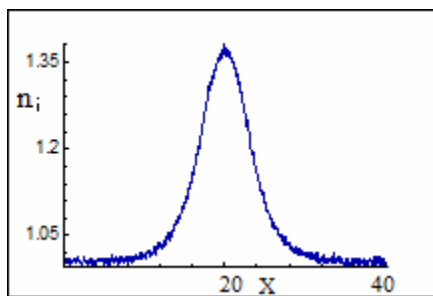
شکل ۴. منحنی خطای نسبی آنتروپی بر حسب مکان.

شکل ۷. منحنی پتانسیل بر حسب مکان در زمان  $t=7$ .شکل ۶. منحنی پتانسیل بر حسب مکان در زمان  $t=3$ .

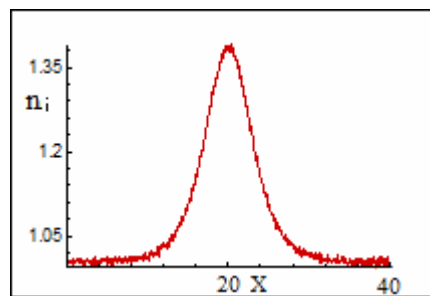
ابتدا پایداری سالیتون در دستگاه مختصات متحرک با سرعت سالیتون را مورد بررسی قرار داده ایم. شکل های ۵ تا ۷ پتانسیل الکتریکی بر حسب مکان به ازای زمان های متفاوت را نشان می دهند. مشاهده می شود شکل پروفایل در بستر زمان ثابت می ماند.

که در آن  $S_0$  آنتروپی اولیه سیستم و  $S$  آنتروپی در هر لحظه می باشد.

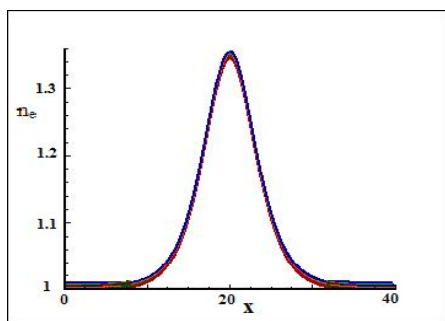
نمودار مربوط به خطای نسبی آنتروپی ( $\Delta S$ ) به ازای پارامترهای داده شده در جدول ۲ رسم شده است. همان گونه که ملاحظه می شود قانون بقای آنتروپی در حین اجرای برنامه به خوبی حفظ می شود.



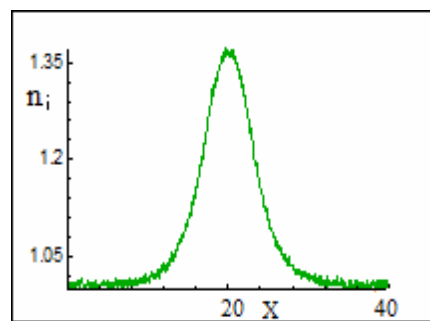
شکل ۹. منحنی چگالی یون بر حسب مکان در زمان  $t=3$ .



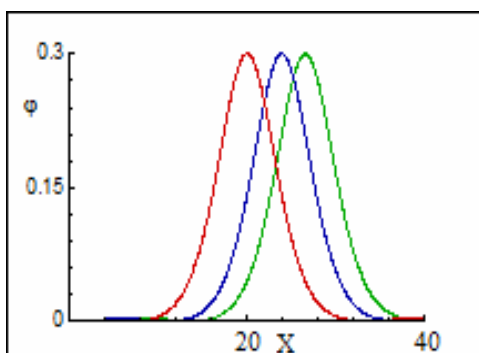
شکل ۸. منحنی چگالی یون بر حسب مکان در زمان  $t=0$ .



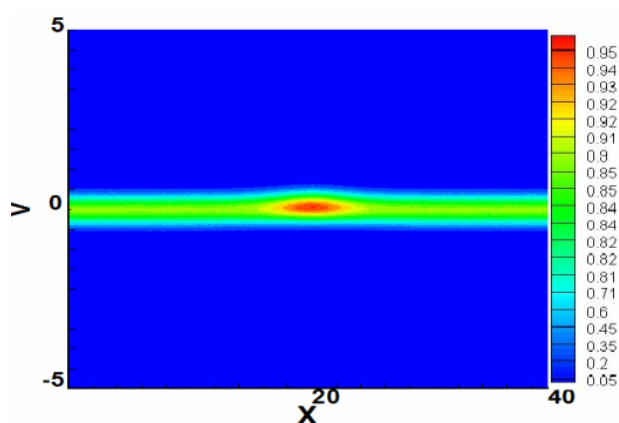
شکل ۱۱. منحنی چگالی الکترون بر حسب مکان در زمان‌های  $t=0$  تا  $t=7$ .



شکل ۱۰. منحنی چگالی یون بر حسب مکان در زمان  $t=7$ .



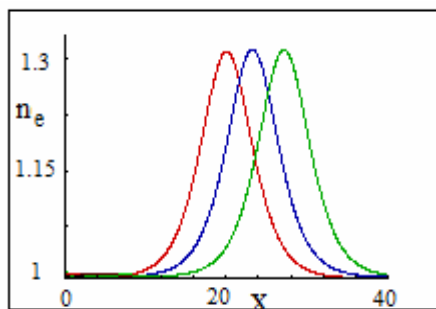
شکل ۱۳. منحنی پتانسیل بر حسب مکان در سه زمان مختلف. منحنی قرمز رنگ (سمت چپ) زمان  $t=0$ ، منحنی آبی رنگ (وسط) زمان  $t=3$  و منحنی سبز رنگ (سمت راست) زمان  $t=6$  را نشان می‌دهد.



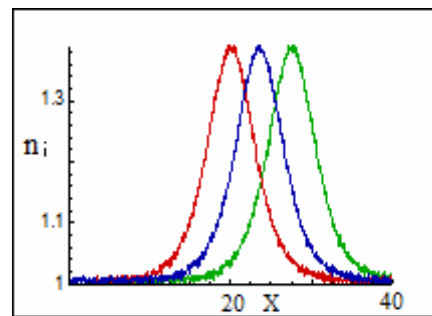
شکل ۱۲. فضای فاز یون در زمان‌های بین  $t=0$  تا  $t=7$  ثابت می‌ماند.

شکل‌های ۸ تا ۱۰ نمودار چگالی یون ( $n_i$ ) بر حسب شکل پروفایل اولیه چگالی یونی در بستر زمان ثابت می‌ماند. شکل ۱۱ نمودار چگالی الکترون ( $n_e$ ) بر حسب مکان در زمان‌های مختلف  $t=0$  تا  $t=7$  را نشان می‌دهند. همان گونه که مشاهده می‌شود شکل پروفایل چگالی الکترون نیز در بستر زمان ثابت می‌ماند. نمودار فضای فاز یونی به صورت شکل ۱۱ می‌باشد این نمودار نیز در زمان‌های بین  $t=0$  تا  $t=7$  به همین شکل باقی مانده و تغییری نکرده است.

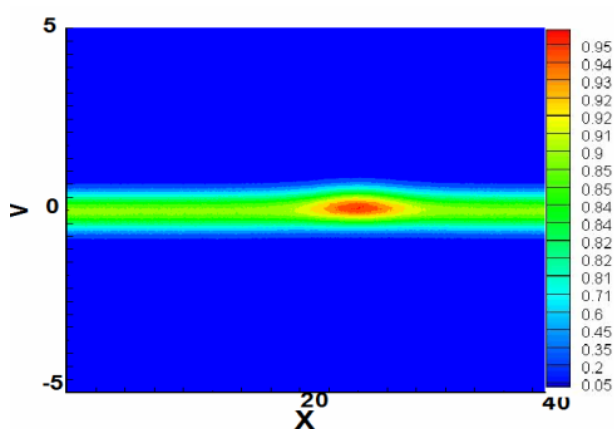
در مرحله بعد، انتشار سالیتون در دستگاه مختصات آزمایشگاه مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت انتظار داریم حرکت سالیتون را با گذشت زمان ببینیم. نمودارهای مربوط به پتانسیل و چگالی یون و الکترون در سه زمان مختلف در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ نشان داده شده است. فضای فاز یونی نیز در سه زمان مختلف در شکل‌های ۱۶ تا ۱۸ نمایش داده شده است.



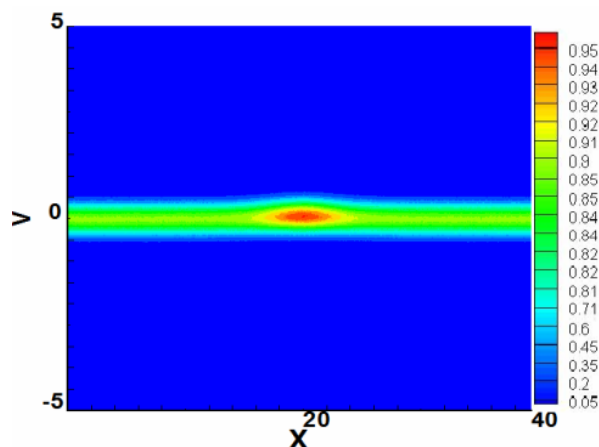
شکل ۱۵. منحنی چگالی الکترون بر حسب مکان در سه زمان متفاوت. منحنی قرمز رنگ (سمت چپ) زمان  $t=0$ ، منحنی آبی رنگ (وسط) زمان  $t=3$  و منحنی سبز رنگ (سمت راست) زمان  $t=6$  را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴. منحنی چگالی یون بر حسب مکان در سه زمان مختلف. منحنی قرمز رنگ (سمت چپ) زمان  $t=0$ ، منحنی آبی رنگ (وسط) زمان  $t=3$  و منحنی سبز رنگ (سمت راست) زمان  $t=6$  را نشان می‌دهد.

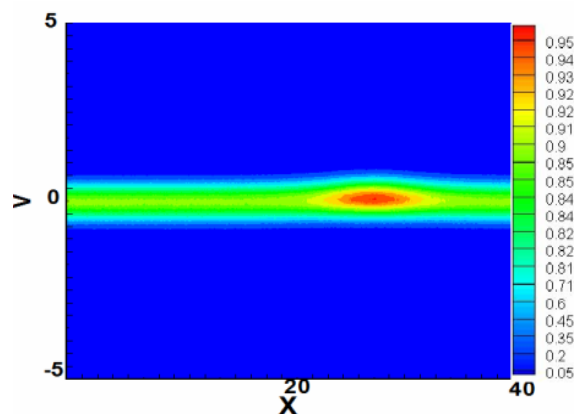


شکل ۱۷. منحنی فضای فاز یونی در زمان  $t=3$ .



شکل ۱۶. منحنی فضای فاز یونی در زمان  $t=0$ .

در این مقاله ضمن معرفی یک کد شبیه‌سازی ذره‌ای رابطه پاشندگی امواج یون آکوستیک در پلاسما را مورد بررسی قرار داده و نشان دادیم این کد در رژیم خطی به خوبی کار می‌کند و نتایج به دست آمده منطبق بر نتایج تحلیلی می‌باشد. هم چنین به منظور بررسی عملکرد کد در ناحیه غیر خطی انتشار سالیتون‌های یون آکوستیک که با معادله Kdv غیر خطی توصیف می‌شوند را مورد مطالعه قرار داده و نشان دادیم این نوع سالیتون با حفظ شکل و سرعت خود در محیط حرکت می‌کند.



شکل ۱۸. منحنی فضای فاز یونی در زمان  $t=7$ .

شکل‌های فوق حرکت سالیتون در فضای فاز و موقعیت را به خوبی نشان می‌دهند.

- Computer Simulation*”, Institute of Physics Publishing (1995).
6. D E Potter, “*Computational Physics*”, A Wiley-interscience Publication (1973).
  7. D K Callebaut, G K Karvghila, *Phys. Scr* (2003) 1.
  8. P D Welch, *IEEE Transaction on Audio and Electroacoustic* (1967).
  9. T E Sheridan, K E Longrenn, *Physics of Plasma*, (1998) 5.
  1. K B Shivamoggi, “*Introduction to Nonlinear Fluid-Plasma Waves*”, Kluwer Academic Publishers (1988).
  2. F F Chen, “*Introduction to Nonlinear Fluid-Plasma Waves*”, Kluwer Academic Publishers (1988).
  3. T E Sheridan, *IEEE Transaction on plasma science* 27 (1999).
  4. Yu V Medvedev, *Physika Plazmy*, (2008) 35.
  5. C K Birdsall, A B Langdon, “*Plasma Physics Via*