

shahbazi@cc.iut.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱/۱۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۵/۲)

$$\gamma \approx 1$$

می‌شود، که در آن دمای بحرانی T_C است. ۳۰ سال بعد نمای بحرانی $\beta = 0.125$ برای این مدل به دست آمد که در توافق با نتایج آزمایشگاهی بود [۶-۹]. اولین بار انرژی آزاد میدان صفر شبکه‌های نامنظم برای شبکه کاکومه، توسط کانا و نایا محاسبه شد [۱۰]. نمای بحرانی γ برای پذیرفتاری مغناطیسی $(\chi \sim |T - T_C|^{-\gamma})$ در $T > T_C$ مقدار ۱/۷۵ را به خود اختصاص داد [۱۱ و ۱۲]. نماهای بحرانی مدل آیزینگ دو بعدی با برهم‌کنش همسایه‌های اول مطابق با فرضیه جهان شمولی با مدل آیزینگ شبکه مربعی یکسان است [۶، ۱۳ و ۱۴].

در این تحقیق، پذیرفتاری مغناطیسی میدان صفر مدل آیزینگ فرومغناطیس و مدل آیزینگ با دو برهم‌کنش فرومغناطیس و یک برهم‌کنش پادفرومغناطیس و مدل آیزینگ پادفرومغناطیس بر روی شبکه دو بعدی کاکومه به شیوه بسط سری‌های دمای بالا و با استفاده از تقریب پد مورد مطالعه قرار گرفت.

مدل آیزینگ یکی از ساده‌ترین مدل‌های توصیف کننده برهم‌کنش ذرات است. این مدل اولین بار توسط لنز و آیزینگ در سال ۱۹۲۵ به عنوان یک مدل فرومغناطیسی ارائه شد [۱-۳]. آیزینگ در پایان نامه دکتریش اثبات کرد که، این مدل در یک بعد هیچ گونه گذار فازی از خود نشان نمی‌دهد [۲ و ۴]. ده سال بعد پیرلس در سال ۱۹۳۶ نشان داد که مدل آیزینگ دوبعدی دارای یک مغناطش هم‌زمان غیر صفر است که می‌تواند به عنوان یک مدل معتبر فرومغناطیسی مورد توجه قرار گیرد [۲ و ۵]. با انجام اولین محاسبات انرژی آزاد میدان صفر توسط انزاگر در سال ۱۹۴۴ و محاسبه مغناطش هم‌زمان توسط یانگ در سال ۱۹۵۲، ویژگی گذار فاز مرتبه دوم اثبات شد. نمای بحرانی β که تعیین کننده رابطه مغناطش با دما در نزدیکی نقطه بحرانی است به صورت $M \sim |T - T_C|^\beta$ تعریف

واگرا، و یک مغناطش هم‌زمان در زیر دمای بحرانی را اثبات کند. این پژوهش نشان داد که محاسبات مکانیک آماری دقیق می‌تواند نوعی از رفتارهای غیر تحلیلی مشخصه گذار فازها را تصدیق کند. حل مدل آیزینگ در یک بعد و دو بعد (در غیاب میدان خارجی) می‌تواند برای تعیین نماهای بحرانی سیستم‌هایی که در این دو رده جهان‌شمولی قرار می‌گیرند، استفاده شود. با این وجود مدل آیزینگ دو بعدی در حضور میدان مغناطیسی و مدل آیزینگ سه بعدی حتی در میدان صفر همچنان حل نشده باقی مانده است [۱۹ و ۲۰]. اما ویژگی آنها توسط شیوه‌های عددی از قبیل شبیه سازی مونت کارلو و بسط سری‌ها شناخته شده است.

شیوه بسط سری‌ها، از جمله روش‌های تقریبی با دقت بالا است که در محاسبه دما و نماهای بحرانی شبکه‌های مختلف کاربرد دارد. در این شیوه با بالا بردن تعداد جملات سری، نتایج آن به مقادیر دقیق بسیار نزدیک می‌شود.

اولین پیشرفت‌های بسط سری‌ها برای یک مدل شبکه‌ای، توسط اوپچوکی در سال ۱۹۳۷ ارائه شد [۶]. استفاده از بسط سری‌ها برای تخمین رفتار بحرانی اولین بار توسط دامب پیشنهاد داده شد و توسط واگفیلد در سال ۱۹۵۱ برای محاسبه گرمای ویژه به کار برده شد [۲۱].

با استفاده از این شیوه، می‌توان به محاسبه دقیق تعدادی از ضرایب بسط سری توانی از قبیل $f(x)$ (رابطه ۲) پرداخت. اما مسئله این است که چگونه از اطلاعات موجود در ضرایب تشکیل دهنده تابع $f(x)$ استفاده کرد. برای این کار از شیوه‌های عددی همچون بسط سری‌ها استفاده می‌شود.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

نظریه بسط سری‌ها به دو شیوه بسط دمای بالا و بسط دمای پایین قابل اجرا است. به وسیله این دو شیوه می‌توان تقریبی از خواص ترمودینامیکی مدل‌ها در دماهای بالا و پایین به دست آورد. در این پژوهش مدل آیزینگ به کمک شیوه بسط دمای بالا مورد مطالعه قرار گرفته است.

مدل آیزینگ ساده‌ترین و مشهورترین مدل سیستم اسپینی مکانیک آماری است. این مدل می‌تواند به خوبی پدیده‌های گوناگونی از جمله مگنت‌ها و همزیستی گاز-مایع و آلیاژهای دو فلزی را توصیف کند. مدل آیزینگ بر اساس یک دسته متغیرهای کلاسیکی دو مقداری، $S_i = \pm 1$ تعیین می‌شود، که S_i ‌ها اشاره به اسپین‌های قرار گرفته بر روی سایت‌های شبکه دارند. هامیلتونی این مدل به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i, \quad (1)$$

که در آن J ثابت برهم‌کنش است و h به میدان مغناطیسی خارجی اشاره دارد. پارامترهای J و h ثوابتی با بعد انرژی هستند. در اولین جمله این رابطه، $\langle ij \rangle$ نشان دهنده برهم‌کنش اسپین‌هایی است که در نزدیک‌ترین همسایگی یکدیگر قرار دارند. احتمال وقوع گذار فاز در این مدل از این جمله ناشی می‌شود. جمله دوم این رابطه، به برهم‌کنش اسپین‌ها با میدان خارجی اشاره می‌کند. در این رابطه h تنها عامل نظم‌دهی اسپین‌ها است. از طرف دیگر در این جمله هیچ‌گونه اثری از اثرات برهم‌کنشی اسپین‌ها با یکدیگر و در نتیجه هیچ‌گونه گذار فازی مشاهده نمی‌شود. در این رابطه اگر $J > 0$ برهم‌کنش بین اسپین‌ها فرو مغناطیس و اگر $J < 0$ برهم‌کنش پادفرومغناطیس خواهد بود و چنانچه $J = 0$ باشد آنگاه هامیلتونی مدل آیزینگ به هامیلتونی پارامغناطیس تبدیل می‌شود.

آیزینگ به طور دقیق این مدل را برای شبکه‌های یک بعدی حل کرد و هیچ‌گونه گذار فاز و مغناطش خود به خودی برای این مدل در یک بعد پیدا نکرد [۲، ۴، ۱۵ و ۱۶]. علت این امر آن است که در یک بعد افت و خیزهای حرارتی، احتمال مغناطش خود به خودی غیر صفر در دماهای مخالف صفر را از بین می‌برند [۱ و ۱۵]. حل مدل آیزینگ در دو بعد برخلاف مدل یک بعدی بسیار مشکل است. اما با وجود این انزاگر در سال ۱۹۹۴ با انجام محاسبات ریاضی توانست تابع پارش میدان صفر مدل آیزینگ را به طور دقیق حل نماید [۱۶-۱۸]. انزاگر توانست وجود یک نقطه بحرانی با ظرفیت گرمایی

محاسبات جملات بسط تابع پارش به دو قسمت محاسبه $\omega(g)$ و $C(g)$ تقسیم می‌شود. $\omega(g)$ ، فاکتور وزنی نامیده می‌شود. این فاکتور مستقل از ساختار شبکه است و یک فاکتور ترکیبی برای باندهای چندتایی است. $C(g)$ یک فاکتور وابسته به نوع شبکه است. این فاکتور اصطلاحاً فاکتور غوطه‌وری یا ثابت شبکه نامیده می‌شود. این فاکتور معرف تعداد راه‌های قرار گرفتن یک گراف l بانندی بر روی یک شبکه N سایتی می‌باشد. این ثوابت نقش اساسی در محاسبه بسط سری‌های سیستم‌های برهم کنشی دارند، به طوری که دامب و سایزر در سال ۱۹۷۵ به معرفی این ثابت‌ها و شیوه محاسبه آنها برای دماهای بالا و دماهای پایین برای گراف‌های متصل و جدا پرداختند [۱۳].

از آن جایی که برای مدل آیزینگ داریم $S_i S_j = \pm 1$ ، می‌توان عبارت $e^{KS_i S_j}$ در رابطه (۴) را به صورت زیر نوشت.

$$e^{KS_i S_j} = (\cosh K)(1 + v S_i S_j), \quad (8)$$

که در آن، $v = \tanh K$ است. با جایگزین کردن رابطه (۸) در رابطه (۴) و حذف میدان خارجی، تابع پارش میدان صفر به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Z_N(K) = (\cosh K)^{Nq} \sum_{\{S\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + v S_i S_j) \quad (9)$$

این رابطه را می‌توان به بیان گرافی هم نوشت. در بیان گرافی جمع بر روی گراف‌ها بی زده می‌شود که هیچ راس درجه فردی نداشته باشد. به همین دلیل این گراف‌ها با نماد g نشان داده می‌شوند.

$$Z_N(K) = 2^N (\cosh K)^{Nq} \sum_{\{g\}} C(g) v^{l_g}, \quad (10)$$

که در آن q عدد هم‌آرایی شبکه، l_g تعداد باندهای مربوط به هر گراف و $C(g)$ فاکتور غوطه‌وری گراف‌ها است.

جهت بررسی کمیت‌هایی چون پذیرفتاری مغناطیسی لازم است که تابع پارش در حضور میدان خارجی محاسبه شود. به همین منظور هامیلتونی رابطه (۴) در محاسبه تابع پارش به کار برده می‌شود. با انجام محاسبات مورد نیاز، تابع پارش در حضور میدان مغناطیسی به صورت زیر حاصل می‌شود.

برای به دست آوردن خواص ترمودینامیکی یک سیستم بایستی تابع پارش آن را محاسبه کرد. با استفاده از رابطه هامیلتونی (۱) و جایگزینی آن در رابطه (۳)، تابع پارش مدل آیزینگ به صورت رابطه (۴) حاصل می‌شود.

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H}, \quad (3)$$

$$Z(K, h) = \sum_{\{S\}} \exp(K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + \beta h \sum_i S_i). \quad (4)$$

در رابطه (۴)، $K = \beta J$ یک ثابت جفت‌شدگی وابسته به دما و $\beta = \frac{1}{K_B T}$ است. در دماهای بالا K کوچک خواهد شد. بنابراین می‌توان تابع پارش را بر حسب K بسط داد. با حذف میدان خارجی ($h = 0$) تابع پارش به رابطه (۵) تبدیل می‌شود.

$$Z(K) = \sum_{\{S\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{KS_i S_j} = \sum_{\{S\}} \prod_{\langle ij \rangle} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K^l}{l!} (S_i S_j)^l. \quad (5)$$

برای درک بهتر رابطه (۵) می‌توان از بیان گرافی کمک گرفت. بیان گرافی این رابطه به این صورت است که در فاکتور $(S_i S_j)^l$ ، l بیان کننده تعداد خطوطی (باند) است که دو راس i و j بر روی شبکه را به هم متصل می‌کند. به ازای هر راس i ، یک فاکتور S^P می‌توان تعریف کرد. در این فاکتور P همان درجه راس i است که به ازای P ‌های زوج برابر با ۲ و به ازای P ‌های فرد برابر با صفر است. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$\sum_{\{S=\pm 1\}} S^P = 2 \quad \text{اگر } P \text{ زوج باشد} \quad (6)$$

$$\sum_{\{S=\pm 1\}} S^P = 0 \quad \text{اگر } P \text{ فرد باشد}$$

معادله (۶) نشان می‌دهد که، جملات غیر صفر تابع پارش را گراف‌هایی تشکیل می‌دهند که تمامی راس‌های آنها درجه زوج باشند. حال می‌توان با بیان گرافی، تابع پارش جدید را به صورت زیر نوشت.

$$Z_N(K) = 2^N \sum_{\{g\}} \frac{C(g)}{\omega(g)} K^{l_g}, \quad (7)$$

که l_g تعداد باندهای مربوط به هر گراف است. در این رابطه بر روی گراف‌هایی که تمامی راس‌های آنها درجه زوج هستند، جمع زده می‌شود. همان طور که رابطه (۷) نشان می‌دهد

روش‌های مختلفی برای تحلیل سری‌ها وجود دارد. از جمله این روش‌ها می‌توان به تقریب پد اشاره کرد. این تقریب برای مطالعه کمیت‌های ترمودینامیکی در نزدیکی نقطه بحرانی بسیار مناسب است. تقریب پد برای N جمله اول از یک سری توانی به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای بیان می‌شود. برای نمونه برای N جمله اول از تابع $F(x)$ ، تقریب پد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n = P_L(x)/Q_M(x), \quad (15)$$

که $P_L(x)$ و $Q_M(x)$ چند جمله‌هایی از درجه L و M هستند به طوری که $L+M \leq N$ است. ضرایب دو چندجمله‌ای $P_L(x)$ و $Q_M(x)$ با حل کردن یک سری معادلات خطی تعیین می‌شوند. این دو چندجمله‌ای با توجه به رابطه بالا، در رابطه (۱۶) صدق می‌کنند [۱۵].

$$F(x) \times Q_M(x) - P_L(x) = Ax^{M+N+1} + Bx^{M+N+2} + \dots \quad (16)$$

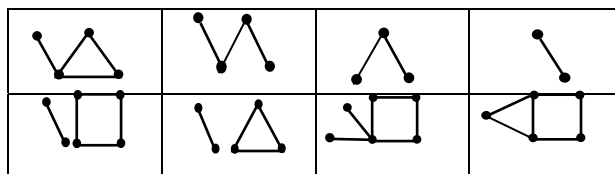
با استفاده از این تقریب می‌توان ساختار تحلیلی سری‌ها را بررسی و قطب‌های توابع را به طور دقیق تعیین کرد. این کار به این صورت انجام می‌شود که با گرفتن مشتق لگاریتمی از سری‌ها، تکنیکی جبری آنها، قطب سری می‌شود. برای نمونه اگر تابع مورد نظر به صورت رابطه (۱۷) بیان شود آنگاه تکنیکی آن مطابق رابطه (۱۸) به دست می‌آید.

$$f(x) = A(x_C - x)^{-\theta}, \quad (17)$$

$$D \log F(x) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\theta}{x_C - x}, \quad (18)$$

به این ترتیب مکان نقاط تکنیکی را می‌توان با تخمین زدن ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج $Q_M(x)$ به دست آورد و از این طریق نمای بحرانی θ را ارزیابی کرد. اگر x_C یک عدد حقیقی باشد، معرف نقطه بحرانی خواهد بود. در نتیجه به وسیله این نقطه می‌توان نماهای بحرانی را به دست آورد.

شبکه کاگومه یکی از سیستم‌های اسپینی ناکام غیر برآه در دو بعد است. منظور از غیر برآه بودن این شبکه این است که



شکل ۱. نمونه گراف‌هایی با دو راس درجه فرد؛ تقریب پد.

$$Z_N(K) = (\cosh K)^{Nq} (\cosh \beta h)^N \times \sum_{\{S\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + v S_i S_j) \prod_K (1 + \tau S_K), \quad (11)$$

که در آن $\tau = \tanh \beta h$ است.

محاسبه بسط دمای بالای پذیرفتاری مغناطیسی میدان صفر مدل آیزینگ به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\chi(v) = \beta^{-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^v}{\partial^v h} \left(\frac{1}{N} \ln Z_N \right) = \frac{\beta}{NZ} \sum_{i,j} \sum_{\{S\}} S_i S_j e^{-\beta H}. \quad (12)$$

بیان دیگر رابطه (۱۲) به صورت زیر است:

$$\beta^{-1} \chi(v) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \langle S_i S_j \rangle = 1 + 2 \sum_{i \neq j} \langle S_i S_j \rangle, \quad (13)$$

که در آن، $\langle S_i S_j \rangle$ تابع همبستگی است. بیان گرافی رابطه (۱۳) به صورت زیر است:

$$\beta^{-1} \chi(v) \equiv \bar{\chi}(v) = 1 + 2 \sum_{\{g_r\}} C(g) v^{I_g}, \quad (14)$$

در این رابطه g_r به گراف‌هایی اشاره می‌کند که دقیقاً دارای دو راس درجه فرد باشند. علت وجود این نوع گراف‌ها، وجود $\langle S_i S_j \rangle$ در رابطه (۱۳) است.

گراف‌هایی که در رابطه (۱۴) شرکت می‌کنند شامل دو مجموعه گراف‌های متصل و گراف‌های جدا هستند. در شکل ۱ چند نمونه از گراف‌هایی که در رابطه (۱۴) شرکت می‌کنند نشان داده شده است.

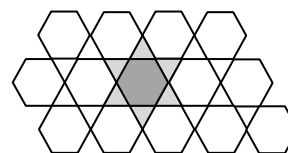
بر اساس اینکه چه اطلاعاتی از سری‌ها قرار است به دست آید، نحوه تحلیل آنها با یکدیگر متفاوت است. به همین منظور

جدول ۱. ثابت‌های گراف‌های متصل و جدا و ضرایب $C(g)$ بسط دمای بالای پذیرفتاری مغناطیسی مدل آیزینگ فرومغناطیس بر روی شبکه کاکومه ($\chi(v) = 1 + 2 \sum_{\{g\}} C(g)v^{|g|}$).

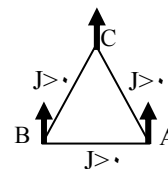
N	ثابت‌های گراف‌های متصل	ثابت‌های گراف‌های جدا	ضرایب $C(g)$
۱	۲	۰	۲
۲	۶	۰	۶
۳	۱۶	۰	۱۶
۴	۴۸	-۶	۴۲
۵	۱۳۴	-۱۲	۱۲۲
۶	۳۶۶	-۸۰	۲۸۶
۷	۱۰۰۶	-۲۸۷	۷۱۹
۸	۲۷۳۰	-۹۶۸	۱۷۶۲
۹	۷۳۸۰	-۲۸۰۸	۴۵۷۲
۱۰	۱۹۹۴۰	-۸۲۹۴/۲۲۵	۱۱۶۴۵/۷۷۵
۱۱	۵۳۶۰۶	-۲۴۰۶۳/۳۳۵	۲۹۵۴۲/۶۶۵
۱۲	۱۴۳۵۹۸	-۷۲۹۳۸	۷۰۶۶۰

با استفاده از تقریب پد نقطه بحرانی v_C و نمای بحرانی γ برای این سری قابل استخراج است. در جدول ۲ نقطه بحرانی v_C و نمای بحرانی γ برای M و N های مختلف نشان داده شده است.

با توجه به اطلاعات جدول ۲ می‌توان نتیجه‌گیری کرد که نقطه بحرانی v_C از مقدار 0.344 تا 0.397 دارای تغییرات است. همان‌طور که این جدول نشان می‌دهد با بالا بردن مرتبه بسط مقدار عددی نقطه بحرانی به 0.4 نزدیک می‌شود، به طوری که می‌توان نتیجه‌گیری کرد که نقطه گذار برای مدل آیزینگ فرومغناطیس در $v_C \cong 0.4$ رخ می‌دهد. از نتایج به دست آمده در جدول ۲ برای نمای بحرانی γ استنباط می‌شود که گستره تغییرات این نما از مقدار $1/52$ تا $1/76$ است. مقادیر عددی مربوط به ابتدای این بازه، متعلق به سری پذیرفتاری مغناطیسی با جملات کم‌تر است به طوری که با بالا بردن مرتبه سری پذیرفتاری مغناطیسی همان‌طور که در جدول ۲ نشان داده شده است گستره تغییرات نمای بحرانی γ تقریباً به صورت $1/71 < \gamma < 1/76$ است.



شکل ۲. شبکه کاکومه.



شکل ۳. برهم‌کنش فرومغناطیس بین جفت اسپین‌های B-A و C-A و C-B.

نمی‌توان تمامی نقاط این شبکه دویعدی را با دوبردار تصویر کرد. این مسئله در محاسبات باعث پیچیدگی زیادی خواهد شد. این شبکه از چیده شدن تعدادی شش ضلعی در کنار هم به وجود می‌آید. به طوری که بر روی هر ضلع شش ضلعی یک مثلث قرار می‌گیرد (شکل ۲). هر سایت این شبکه، ۴ همسایه اول دارد. این نوع شبکه دارای اهمیت آزمایشگاهی و تجربی فراوانی در موادی چون اسپینل‌ها ($Li_{1+x}Mn_xO_4$)، فریت QS، والبریت‌ها و پایروکلرها است [۲۲ و ۲۳].

در مدل آیزینگ فرومغناطیس برهم‌کنش بین جفت اسپین‌ها به صورت شکل ۳ است. در این مدل پذیرفتاری مغناطیسی با استفاده از برنامه نویسی کامپیوتری تا مرتبه ۱۲ محاسبه شد. ثابت‌های شبکه کاکومه برای گراف‌های متصل و جدا با دو راس درجه فرد، در جدول ۱ برای پذیرفتاری مغناطیسی این مدل نشان داده شده است.

با استفاده از اطلاعات جدول ۱ می‌توان بسط دمای بالای پذیرفتاری مغناطیسی مدل آیزینگ فرومغناطیس را بر روی شبکه کاکومه با استفاده از رابطه (۱۴) به صورت زیر نوشت.

$$\chi(v) = 1 + 4v + 12v^2 + 32v^3 + 84v^4 + 244v^5 + 572v^6 + 1438v^7 + 3524v^8 + 9144v^9 + 23291/55v^{10} + 59085/33v^{11} + 141320v^{12} \quad (19)$$

جدول ۳. ثابت‌های گراف‌های متصل و جدا و ضرایب $C(g)$ بسط دمای بالای پذیرفتاری مغناطیسی مدل آیزینگ با یک برهم‌کنش پادفرومغناطیس و دو برهم‌کنش فرومغناطیس بر روی شبکه کاگومه.

$$(\bar{\chi}(v) = 1 + 2 \sum_{\{g_i\}} C(g) v^{\frac{1}{g_i}})$$

N	ثابت‌های گراف‌های متصل	ثابت‌های گراف‌های جدا	ضرایب $C(g)$
۱	-۰/۶۶	۰	-۰/۶۶
۲	۰/۶۶	۰	۰/۶۶
۳	-۲/۶۶	۰	-۲/۶۶
۴	۲/۶۶	۲	۴/۶۶
۵	-۱۴	۱/۳۳	-۱۲/۶۷
۶	۴۳/۳۳	-۱۳/۳۳	۳۰
۷	-۹۴	۱۶/۳۳	-۷۷/۶۷
۸	۲۷۶/۶۶	-۸۵/۳۳	۱۹۱/۳۳
۹	-۸۰۹/۳۳	۲۶۹/۳۳	-۵۴۰
۱۰	۲۱۴۵/۳۳	-۷۸۴/۵۹	۱۳۶۰/۷۴
۱۱	-۵۷۸۷/۳۳	۲۵۲۷/۹۲۳	۳۲۵۹/۴۰۷
۱۲	۱۵۵۴۲	-۸۲۷۹/۳۳	-۷۲۶۲/۶۷

سیستم، چند حالت تبه‌گن است که هیچ کدام برتری نسبت به دیگری در انتخاب سیستم برای حالت پایه از خود نشان نمی‌دهند (شکل ۴).

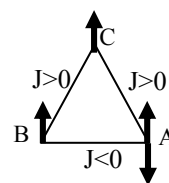
با استفاده از اطلاعات جدول ۳ می‌توان بسط دمای بالای پذیرفتاری مغناطیسی این مدل را با استفاده از رابطه (۱۴) به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \chi(v) = & 1 + 1/327 + 1/327 - 5/327 \quad (20) \\ & + 9/327 - 25/347 + 607 - 155/347 \\ & + 382/667 + 10807 + 2721/487 \\ & - 6518/817 + 14525/347. \end{aligned}$$

با استفاده از تقریب پد برای این مدل هیچ نقطه بحرانی حاصل نشد. این نتیجه به ناکامی تعدادی از اسپین‌ها در انتخاب جهت است که باعث می‌شود در این مدل گذار فازی مشاهده نشود.

جدول ۲. تقریب نقطه بحرانی v_c و نمای بحرانی γ با استفاده از روش تقریب پد برای پذیرفتاری مغناطیسی مدل آیزینگ فرومغناطیس بر روی شبکه کاگومه.

$[M, N]$	v_c	γ
[۳ و ۳]	۰/۳۶۹	۱/۷۱۳
[۴ و ۳]	۰/۳۷۳	۱/۷۳
[۳ و ۴]	۰/۳۷۸	۱/۵۲
[۴ و ۴]	۰/۳۴۴	۱/۷۲
[۵ و ۴]	۰/۳۹۷	۱/۷۴
[۶ و ۶]	۰/۳۹۴	۱/۷۶
[۷ و ۵]	۰/۳۹	۱/۷۶
[۵ و ۶]	۰/۳۹۵	۱/۷۴۳



شکل ۴. مدل آیزینگ با یک برهم‌کنش پادفرومغناطیس و دو برهم‌کنش فرومغناطیس.

از رابطه (۱۹) می‌توان نتیجه‌گیری کرد که نمای بحرانی γ مطابق اصل جهان شمولی در توافق خوبی با نمای به دست آمده برای پذیرفتاری مغناطیسی مدل آیزینگ دو بعدی در میدان صفر (۱/۷۵) است.

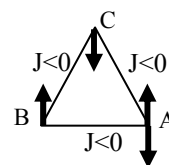
در این مدل بر خلاف مدل قبل، دو برهم‌کنش فرومغناطیس و یک برهم‌کنش پاد فرو مغناطیس وجود دارد و همین نوع برهم‌کنش باعث می‌شود که اسپین‌ها دچار گیجی یا ناکامی مغناطیسی شوند. ناکامی یا گیجی مغناطیسی به این صورت تعریف می‌شود که یک اسپین (یا تعدادی اسپین) در یک سیستم نمی‌تواند جهتی را انتخاب کند که تمام برهم‌کنش‌ها را به طور کاملاً مناسب راضی کند، به عبارت دیگر سیستم نمی‌تواند یک حالت پایه مشخص برای خود بیابد. در این شرایط حالت پایه

$$\chi(v) = 1 - 4v + 12v^2 - 32v^3 + 84v^4 \quad (21)$$

$$-244v^5 + 572v^6 - 1438v^7 + 3524v^8 - 9144v^9 \\ + 23291/55v^{10} - 59085/33v^{11} + 141320v^{12}.$$

با استفاده از تقریب پد، هیچ نقطه بحرانی برای مدل آیزینگ پادرومغناطیس حاصل نشد. این نتیجه بیان کننده این موضوع است که ناکامی مغناطیسی در این مدل باعث می شود که در این سیستم گذار فازی مشاهده نشود.

پذیرفتاری مغناطیسی مدل آیزینگ فرو مغناطیس و مدل آیزینگ با یک برهم کنش پادرومغناطیس و دو برهم کنش فرومغناطیس و مدل آیزینگ پادرومغناطیس با استفاده از بسط دمای بالا بر روی شبکه کاکومه تا مرتبه ۱۲ محاسبه شد. با اعمال تقریب پد برای مدل فرومغناطیس نمای $1/75 \approx \gamma$ به دست آمد. اما برای مدل آیزینگ پادرومغناطیس و مدل آیزینگ ترکیبی با یک برهم کنش پادرومغناطیس و دو برهم کنش فرومغناطیس نقطه گذاری مشاهده نشد. نتایج به دست آمده در توافق با فرضیه جهان شمولی است. به طوری که در این فرضیه، نمای بحرانی مدل آیزینگ فرومغناطیس دو بعدی $1/75 = \gamma$ و مدل های آیزینگ پادرومغناطیس دوبعدی فاقد گذار فاز هستند.



شکل ۵. مدل آیزینگ با برهم کنش پادرومغناطیس.

مدل آیزینگ پادرومغناطیس زمانی اتفاق می افتد که در هامیتونی مدل آیزینگ (رابطه ۱) $J < 0$ باشد. این مدل در شکل ۵ نشان داده شده است. همان طور که در این شکل مشاهده می شود، اتم B با اتم C برهم کنش پاد فرو مغناطیس دارد. اما اتم A در هر جهتی که قرار گیرد با یکی از اسپین های C و B برهم کنش فرو مغناطیس خواهد داشت. به این گنجی اتم A در انتخاب جهت، ناکامی مغناطیسی گفته می شود. از آن جایی که برای مدل پادرومغناطیس $J < 0$ ، می توان نتیجه گرفت که این مدل همان مدل فرومغناطیس است با این تفاوت که در آن J به $-J$ و v به $-v$ تبدیل شده است. بنابراین از بسط سری به دست آمده برای مدل آیزینگ فرومغناطیس (رابطه ۱۹) می توان برای مدل آیزینگ پادرومغناطیس استفاده کرد.

رابطه به دست آمده برای مدل آیزینگ پادرومغناطیس بر روی شبکه کاکومه به صورت زیر است:

11. M F Sykes, D S Gaunt, P D Roberts and J A Wyles, *Phys. American* **5** (1972) 624.
12. Y-C Hsiao and K-Y Lin, *Physica. A* **252** (1998) 211.
13. G Nandhini and M V Sangaranarayanan, Arxiv:0801.0662v1. [Cond-Mat.Stat-Mech].
14. C-T Tseng and K-Y Lin, *Chinese Physics* **34**, 5 (1996) 1254.
15. J M Yeomans, "Statistical mechanics of phase transitions", Oxford University Press, New York (1992).
16. M L Bellac, "Quantum and statistical field theory", Oxford University Press, New York (1991).
17. R A Farrell, *Phys. Rev.*, **180**, 2 (1969) 579.
18. B Liu, M, Gitterman, *Am. J. Phys.*, **71**, 8 (2003) 806.
19. J Oitmaa and C Hamer and W Zheng; "Series Expansion Methods for Strongly Interacting Lattice Models"; Cambridge University press (2006).
20. R Szymczak, M Baran, J F Finowicki, B Krzymanska, P Aleshkevych, H Szymczak, *Acta. Phys. Polonica. A*, **113**, 1 (2007) 413.

1. B Liu and M Gitterman, *American Physics* **71**, 8 (2003) 806.
2. N Goldenfeld, "Lecture on Phase Transitions and The Renormalization Group", Perseus (1992).
3. S G Brush, *Reviews of Modern Physics*, **39**, 4 (1967) 883.
4. V Beffara and H Duminil-Copin, Arxiv. 1010.0526v1. (2010).
5. J Cardy, "Scaling and Renormalization in Statistical Physics", Cambridge University Press, London (1996).
6. J-M Chen and K-Y Lin, *Chinese Physics* **34**, 4 (1996) 1156.
7. W P Orrick, B Nickel, A J Guttmann and J H H Perk, *Statistical Physics* **102**, 3/4 (2001) 795.
8. H J W Zandvliet, *Europhys. Lett.*, **73**, 5 (2006) 747.
9. A Codello, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 385002.
10. W P Orrick, B Nickel, A J Guttmann and J H H Perk, *Physical Review Letters* **86**, 18 (2001) 4120.

22. J Strecka, L Canova, M Jascur, *Phys. Rev. B* **78** (2008) 024427.
23. P Nikolić, *Phys. Rev. B* **72** (2005) 064423.
21. C Domb and M S Green, "*Phase transitions and critical phenomena*", **3**, Academic Press Inc, London (1974).