

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۶/۲۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۲/۳۰)

(۱)

()

()

پدیده‌های کوانتومی غیر نسبیتی ارائه می‌دهد و برخی پدیده‌ها که در تعبیر کپنهاگی راز آمیز جلوه می‌کنند- مانند گذارهای اتمی و فرآیند اندازه‌گیری - در فرمول‌بندی «دوبروی-بوهم» توضیح بسیار ساده و قابل فهمی پیدا می‌کنند [۳-۶]. در این مقاله قصد داریم یک نظریه قطعی جدید، شبیه نظریه بوهم، برای توصیف سیستم‌های کوانتومی معرفی نماییم. در این مدل نیز به ذرات نیرویی وابسته به تابع موج وارد می‌شود. اما شکل این نیرو با نیروی کوانتومی در مدل بوهم متفاوت می‌باشد. به دلیل شباهت ساختار این مدل با مکانیک بوهمی، مقایسه آن با مکانیک بوهمی می‌تواند ساختار اصلی آن را با وضوح بیشتری مشخص کند. برای این منظور ابتدا به یادآوری نظریه بوهم می‌پردازیم. با اینکار زمینه برای مقایسه مدل پیشنهادی در این مقاله، با مکانیک بوهمی، فراهم می‌شود.

در سال ۱۹۵۲ دیوید بوهم نظریه‌ای را ارائه نمود که به عنوان مکانیک بوهمی شناخته شده است [۱-۲]. مکانیک بوهمی یک نظریه علی برای توصیف سیستم‌های کوانتومی است که به عنوان یک فرمول‌بندی رقیب در کنار فرمول‌بندی کپنهاگی رواج یافته است. در این نظریه، سیستم کوانتومی نه تنها از موج، بلکه از ذره نیز تشکیل شده است. در مدل بوهم ذرات بر روی مسیرهایی خوش تعریف حرکت می‌کنند و آثار کوانتومی به کمک یک «نیروی کوانتومی» که تابع موج به ذرات وارد می‌کند توضیح داده می‌شود. در نظریه بوهم احتمال به صورت ذاتی در نظر گرفته نمی‌شود بلکه مشخصات تصادفی پدیده‌های کوانتومی به کمک شرایط اولیه تصادفی (جهل در مورد وضعیت اولیه ذره) توضیح داده می‌شود. مکانیک «دوبروی-بوهم» توصیف کاملی برای تمام

است که برای مکان اولیه ذرات یک توزیع آماری مناسب در نظر گرفته شود.

اصل سوم: توزیع آماری وضعیت ذرات به صورت زیر در نظر گرفته می شود (تبادل کوانتومی)

$$\rho = |\psi|^2, \quad (4)$$

البته باید دقت داشت که با فرض برقراری معادله $\rho = |\psi|^2$ در یک لحظه، برقراری آن در تمام لحظات از اصول اول و دوم نتیجه می شود. درحقیقت اصل اول ذرات را در مسیرهایی هدایت می کند که $|\psi|^2$ به عنوان چگالی احتمال در طول زمان حفظ شود [۵ و ۱۲]. همین موضوع باعث سازگاری نتایج آماری این نظریه با کوانتوم استاندارد می شود [۵، ۸ و ۹] این خاصیت تابع توزیع $|\psi|^2$ توسط Dürr همگون و ردایی نامیده شده است [۱۲]. البته تلاش شده است که اصل سوم (فرض تبادل کوانتومی) از مفروضات ساده تری نتیجه شود. به عنوان مثال تبدیل شدن یک توزیع دلخواه، ρ ، به توزیع تبادل کوانتومی، $\rho = |\psi|^2$ ، مورد مطالعه قرار گرفته است [۲ و ۱۳]. چنین بررسی هایی نام «تبادل کوانتومی» را تا حدی موجه ساخته است.

()

در فرمول بندی بوهم، دینامیک علی الاصول مرتبه دوم در نظر گرفته می شود به این معنی که معادله حرکت ذرات، مانند مکانیک کلاسیک، مرتبه دوم می باشد [۱-۴].

اصل اول: معادله حرکت ذرات (معادله بوهم)

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}(U+Q), \quad (5)$$

اصل دوم: معادله تحول زمانی تابع موج (معادله شرودینگر)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi \quad (6)$$

برای ایجاد نتایج آماری یکسان با کوانتوم استاندارد باید اصل زیر نیز به نظریه اضافه شود:

اصل سوم: تبادل کوانتومی مرتبه دوم توزیع سرعت و مکان اولیه ذرات به صورت زیر به تابع موج مربوط می باشد:

دو نوع رهیافت برای فرمول بندی مدل بوهم وجود دارد [۴]. در رهیافت اول که به تعبیر «دوبروی-بوهم» معروف است دینامیک ذرات مرتبه دوم در نظر گرفته می شود و اثرات کوانتومی به کمک پتانسیل کوانتومی توضیح داده می شوند. این روش بیشتر براساس کار دیوید بوهم بنا شده است [۱-۴]. در رهیافت دوم اعتقادی به پتانسیل کوانتومی وجود ندارد و دینامیک ذرات مرتبه اول در نظر گرفته می شود. این روش «رهیافت مینیمال» نامیده می شود که ریشه در کارهای دوبروی دارد و توسط Dürr, Goldstein, Zanghi توسعه داده شده است [۵-۱۱]. ما در این قسمت اصول هر دو رهیافت را بیان کرده و در نهایت آنها را با مدل ارائه شده در این مقاله مقایسه می نماییم. همه محاسبات برای سادگی در یک بعد انجام شده است.

()

در رهیافت مینیمال حالت سیستم کوانتومی با جفت (x, ψ) معین می شود. که در آن ψ تابع موج سیستم و x مکان ذره را مشخص می کند. در این فرمول بندی دو معادله (به عنوان اصل) برای تحول زمانی مکان ذره و تابع موج داده شده است. هر دو این معادلات نسبت به زمان مرتبه اول هستند [۵-۶]. با توجه به شکل قطبی تابع موج

$$\psi = R e^{i\frac{S}{\hbar}}, \quad (1)$$

معادلات تحول سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

اصل اول: معادله حرکت ذره (معادله هدایت)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (2)$$

اصل دوم: معادله تحول زمانی تابع موج (معادله شرودینگر)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi, \quad (3)$$

در معادلات فوق m معرف جرم ذره می باشد.

همان طور که از شکل معادله هدایت (۲)، واضح است فاز تابع موج، مسیر حرکت ذرات را مشخص می کند، به همین سبب نام موج راهنما برای تابع موج در این فرمول بندی مناسب می نماید. برای تطبیق با نتایج آماری کوانتوم استاندارد، لازم

اصل اول: معادله حرکت ذرات

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R) + S_{xx} (v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}), \quad (10)$$

که در معادله فوق Q همان پتانسیل کوانتومی در نظریه بوهم

یعنی $\frac{-\hbar^2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ می باشد. همچنین نمادهای S_x و S_{xx} به

ترتیب به معنی $\frac{\partial S}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ به کار رفته اند. معادله (۱۰) را به

صورت معادل زیر نیز می توان نوشت:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -\frac{\partial}{\partial x} (U) + F_Q(x, v) \quad (11)$$

که در عبارت بالا، نیروی کوانتومی F_Q ، به صورت زیر

برحسب تابع موج معرفی می شود:

$$F_Q = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-\hbar^2}{2m|\psi|^2} \frac{\partial^2 |\psi|^2}{\partial x^2} - m\mu \ln(|\psi|) \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2}{2m|\psi|^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hbar}{2i|\psi|^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right]. v. \quad (12)$$

در اینجا نیز مانند نظریه بوهم، در معادله حرکت ذرات یک نیروی کوانتومی وابسته به تابع موج وجود دارد، در نتیجه برای بسته شدن دستگاه معادلات، برای بررسی تحول زمانی سیستم، لازم است که معادله ای نیز برای تحول زمانی تابع موج داده شود.

اصل دوم: معادله تحول تابع موج (معادله شرودینگر)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi. \quad (13)$$

در اینجا نیز برای ایجاد نتایج آماری یکسان با کوانتوم استاندارد به فرضی در مورد توزیع آماری وضعیت اولیه ذرات نیاز می باشد.

اصل سوم: توزیع آماری مکان-سرعت ذرات با تابع توزیع زیر داده می شود:

$$f(x, v) = R^2 (\mu\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right). \quad (14)$$

دقت کنید که این تابع توزیع، مانند تابع توزیع بوهمی (۶)، نتایج آماری یکسانی با مکانیک کوانتومی استاندارد ایجاد می کند، زیرا

$$f_B(x, v) = R^2 \delta\left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right), \quad (7)$$

این تابع توزیع، که آن را تابع توزیع بوهمی می نامیم، با تعبیر احتمالاتی تابع موج سازگار می باشد، زیرا:

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} f_B(x, v) dv \quad (8)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R^2 \delta\left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right) dv = R^2 = |\psi|^2,$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (v f_B(x, v)) dv = R^2 \left(\frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right) \quad (9)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right),$$

البته باید دقت داشت که این اصول به طور کامل از هم مستقل نیستند. درحقیقت با فرض اصل سوم برای یک لحظه، درستی این اصل برای تمام لحظات از دو اصل دیگر نتیجه می شود همگون وردایی (باید توجه داشت که در فرمول بندی مرتبه دوم مکانیک بوهمی، وضعیت آماری اولیه ذرات با یک توزیع مکان-سرعت مشخص می شود. در نتیجه اصل سوم در این رهیافت مشابه اصل تعادل کوانتومی (اصل سوم) در رهیافت کمینه است. همچنین دقت کنید که در رهیافت مرتبه دوم، معادله هدایت به عنوان شرایط اولیه آماری در تابع توزیع بوهمی (تعادل کوانتومی مرتبه دوم) لحاظ شده است. در حالی که در رهیافت مرتبه اول معادله هدایت به عنوان قانون حرکت در نظر گرفته شده است). همچنین از فرض برقراری اصل سوم و با استفاده از معادله شرودینگر (اصل دوم) می توان شکل نیروی کوانتومی (اصل اول) را به دست آورد [۴].

در این قسمت قصد داریم یک نظریه جدید برای توصیف ذرات زیر اتمی معرفی نماییم. در این مدل نیز مانند مدل بوهم سیستم کوانتومی هم از ذره و هم از میدان ψ تشکیل شده است و ذرات بر روی مسیرهایی خوش تعریف حرکت می کنند. همچنین یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای تحول مکان ذرات داده شده است. در نتیجه حالت سیستم با (x, v, ψ) مشخص می شود که در آن ψ تابع موج سیستم و v, x به ترتیب مکان و سرعت ذره را مشخص می کنند. ابتدا اصول نظریه را بیان می کنیم:

لذا تغییرات زمانی تابع توزیع برای بازه زمانی بینهایت کوچک dt به صورت زیر می‌باشد

$$f(x, v; t_0 + dt) = f(x, v; t_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t_0} dt, \quad (18)$$

$$f(x, v; t_0 + dt) = f(x, v; t_0) - \left(v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial (Ff)}{\partial v} \right) \Big|_{t_0} dt. \quad (19)$$

حال با در نظر گرفتن اصل سوم برای لحظه t_0 داریم:

$$f(x, v; t_0) = \frac{R^\nu(x, t_0)}{(\mu\pi)^{\nu/2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t_0)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (20)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۱۰) و (۲۰)، خواهیم داشت:

$$\left(v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial (Ff)}{\partial v} \right) \Big|_{t_0} = \frac{1}{(\mu\pi)^{\nu/2}} \left((A) + \frac{\nu R^\nu}{m\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \right) \exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) \Big|_{t_0} \quad (21)$$

که در عبارت فوق A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A := -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R^\nu}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (22)$$

$$B := -\frac{1}{\nu m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^\nu - U(x) + \frac{\hbar^\nu}{\nu m R} \frac{\partial^\nu R}{\partial x^\nu}. \quad (23)$$

همان‌طور که می‌دانیم جایگذاری شکل قطبی تابع موج (۱) در معادله شرودینگر (اصل دوم) به معادلات زیر برای تحول زمانی R و S منجر می‌شود

$$\frac{\partial R^\nu}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R^\nu}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{\nu m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^\nu - U(x) + \frac{\hbar^\nu}{\nu m R} \frac{\partial^\nu R}{\partial x^\nu}. \quad (25)$$

از مقایسه معادلات (۲۴) و (۲۵) با معادلات (۲۲) و (۲۳)، واضح است که:

$$A = \frac{\partial R^\nu}{\partial t}, \quad (26)$$

$$A = \frac{\partial R^\nu}{\partial t}. \quad (27)$$

با جایگذاری عبارت‌های (۲۶) و (۲۷) در معادله (۲۱) خواهیم داشت:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^\nu}{(\mu\pi)^{\nu/2}} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) dv \quad (15)$$

$$= |\psi|^\nu, \quad J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f(x, v) dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu R^\nu (\mu\pi)^{-\nu/2} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) dv \quad (16)$$

$$= \frac{R^\nu}{m} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{i\hbar}{\nu m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

واضح است که تابع توزیع این مدل، از جایگزین کردن یک تابع گوسی با پهنای μ ، به جای تابع دلتای موجود در تابع توزیع بوهمی به دست آمده است.

اصل سوم در مدل ما، مشابه اصل تعادل کوانتومی (در رهیافت کمینه مکانیک بوهمی) می‌باشد. با این تفاوت که چون در رهیافت کمینه، دینامیک مرتبه اول فرض شده است پس شرایط اولیه آماری، با یک تابع توزیع مکان مشخص می‌شود ولی در اینجا به خاطر مرتبه دوم بودن دینامیک، شرایط اولیه با یک تابع توزیع توأم مکان - سرعت مشخص می‌شود. در اینجا نیز باید دقت داشت که با فرض درستی اصل سوم برای یک لحظه، درستی این اصل برای تمام لحظات از دو اصل اول نتیجه می‌شود (همگون وردایی). دقت کنید که با توجه به این که تابع توزیع (۱۴) با تعبیر احتمالاتی تابع موج سازگار است لذا برقراری این تابع توزیع در تمام زمان‌ها، سازگاری مدل جدید با تعبیر احتمالاتی تابع موج را تضمین خواهد کرد.

ابتدا همگون وردایی را برای بازه‌های زمانی بینهایت کوچک اثبات می‌کنیم. برای این منظور یادآوری می‌کنیم که قانون دوم نیوتن با در نظر گرفتن نیروی وابسته به سرعت، به معادله زیر برای تحول زمانی تابع توزیع منجر می‌شود: (معادله لیوویل)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial (Ff)}{\partial v} = 0. \quad (17)$$

حقیقت با معلوم گرفتن تابع توزیع و در نظر گرفتن نیرو به عنوان مجهول در معادله لیوویل، به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی برای نیرو می‌رسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial (Ff)}{\partial v} = 0. \quad (31)$$

حل عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$F(x, v) = -\frac{m}{f} \left[\int \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} dv + C(x, t) \right], \quad (32)$$

که در آن $C(x, t)$ یک تابع دلخواه می‌باشد. با جایگذاری فرم تابع توزیع بر حسب تابع موج خواهیم داشت:

$$F = -\frac{m}{f} \int \frac{\exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right)}{\sqrt{\pi \mu}} \left[\left(\frac{\partial R^x}{\partial x} + \frac{\partial R^x}{\partial t} - \frac{v R^x}{m \mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}\right) \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] dv + C(x, t). \quad (33)$$

حال از آنجا که قصد داریم تحول زمانی تابع توزیع با معادله شرودینگر، هماهنگ باشد قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial R^x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R^x}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - U(x) + \frac{\hbar^2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}. \quad (35)$$

حال اگر با جایگذاری معادلات (۳۴) و (۳۵) در معادله (۳۳)، انتگرال موجود در معادله (۳۳) را محاسبه کنیم، با ساده سازی فراوان خواهیم داشت:

$$F(x, v) = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right) - \frac{m}{f} C(x, t). \quad (36)$$

با توجه به دلخواه بودن تابع $C(x, t)$ ، برای سادگی آن را برابر با صفر می‌گیریم و در نتیجه به شکل نیروی داده شده در نظریه خودمان می‌رسیم:

$$F(x, v) = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right) \quad (37)$$

در حقیقت ما در این قسمت نیرویی متناظر با تابع توزیع $f(x, v)$ یافتیم به طوری که تحول زمانی تابع توزیع با تعبیر

$$\left. \left(v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial (Ff)}{\partial v} \right) \right|_{t_0} = \frac{1}{(\mu\pi)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial R^x}{\partial t} \right) + \frac{v R^x}{m\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \bigg|_{t_0} \quad (28)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R^x(x, t)}{(\mu\pi)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \right) \bigg|_{t_0},$$

با جایگذاری معادلات (۲۸) و (۲۰) در معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$f(x, v; t_0 + dt) = \frac{R^x(x, t_0)}{(\mu\pi)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t_0)}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R^x(x, t)}{(\mu\pi)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \right) \bigg|_{t_0} dt, \quad (29)$$

در نتیجه

$$f(x, v; t_0 + dt) = \frac{R^x(x, t_0 + dt)}{(\mu\pi)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S(x, t_0 + dt)}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (30)$$

که همگون وردایی را برای یک بازه زمانی بینهایت کوچک اثبات می‌کند. برای اثبات همگون وردایی برای یک بازه زمانی محدود Δt ، کافی است که بازه زمانی Δt را به بازه‌های زمانی کوچک تقسیم کنیم و استدلال فوق را در مورد هر کدام از آن بازه‌ها به کار ببریم. با به سمت صفر میل دادن زیر بازه‌ها، استدلال دقیق خواهد شد و همگون وردایی در حالت عمومی اثبات می‌شود. در بخش بعد با فرض اصل سوم برای تمام لحظات با استفاده از معادله شرودینگر شکل نیروی مدل جدید، رابطه (۹) را استخراج می‌کنیم با این کار در حقیقت همگون وردایی مدل با روشی دیگر نیز ثابت شده است.

در این بخش می‌خواهیم نیرویی را بیابیم که معادله لیوویل براساس آن، به همگون وردایی تابع توزیع (۱۳) منجر شود. در

می‌باشد. در مدل ما، سرعت ذره در هر نقطه با یک توزیع گوسی (با پهنای μ) داده شده است و $\frac{S_x}{m}$ تنها سرعت متوسط را در هر نقطه مشخص می‌کند. باید توجه داشت که با به سمت صفر میل دادن μ ، به مفروضات نظریه بوهوم می‌رسیم (این موضوع را در بخش بعد با جزئیات بیشتری بررسی می‌نماییم).

برای به دست آوردن یک تصویر شهودی از تمایز مدل ما با نظریه بوهوم، تمثیل زیر می‌تواند بسیار سودمند باشد. هر چند که نباید این تمثیل را بیش از اندازه اعتبار آن، به کار برد.

نسبت مدل ما با نظریه بوهوم مانند نسبت نظریه جنبشی با نظریه سیالی در توصیف پلازما می‌باشد. در نظریه جنبشی در هر نقطه از فضا ذرات می‌توانند سرعت‌های گوناگونی داشته باشند. در حالی که در توصیف سیالی برای هر نقطه از سیال یک سرعت در نظر گرفته می‌شود و آن سرعت همان سرعت متوسطی است که از نظریه جنبشی برای آن نقطه به دست می‌آید.

تفاوت نظریه ما با مکانیک دوبروی-بوهوم این است که با توجه به معین بودن سرعت در هر نقطه از فضا در نظریه بوهوم، مکانیک بوهومی (رهیافت کمینه)، یک نظریه مرتبه اول می‌باشد و مسیر حرکت ذرات با توجه به مکان اولیه آنها به کمک خطوط میدان سرعت مشخص می‌شود، در حالی که مدل ما از ابتدا یک نظریه مرتبه دوم می‌باشد و مسیرهای ذرات با توجه به مکان و سرعت اولیه آنها معین می‌شود.

مسیرهای ذرات در مدل ما با مکانیک بوهومی متفاوت می‌باشند، همچنین نیروی کوانتومی در این نظریه با مکانیک بوهومی متفاوت است، مخصوصاً که در این مدل نیرو به صورت تابعی از مکان و سرعت ذرات داده شده است در حالی که در مکانیک بوهومی نیرو تنها به صورت تابعی از مکان مشخص شده است.

با همه این تفاوت‌ها، مدل ما و نظریه بوهوم نتایج آماری یکسانی را با کوانتوم استاندارد ایجاد می‌کنند. مثلاً در محاسبه سطح مقطع پراکندگی، از آنجا که تنها چگالی جریان احتمال به کار می‌رود و با توجه به اینکه چگالی جریان احتمال و تحول زمانی آن در نظریه ما به‌طور یکسان با مکانیک کوانتومی استاندارد داده می‌شود، در نتیجه در محاسبه سطح مقطع پراکندگی تمایزی بین نظریه ما و مکانیک بوهومی و کوانتوم استاندارد وجود ندارد البته

احتمالاتی معادله شرودینگر هماهنگ باشد و با این روش یک نظریه معادل با کوانتوم استاندارد و مبتنی بر مسیر ایجاد کرده‌ایم.

$$C(x,t)$$

در فرآیند به دست آوردن فرم نیرو، روشن است که نیرو به هیچ وجه به طور یکتا از مفروضات ذکر شده، به دست نمی‌آید. بلکه به اندازه یک تابع دلخواه جمعی $C(x,t)$ آزادی در تعریف نیرو وجود دارد به طوری که همه این نیروها به همگون وردایی تابع توزیع (۱۴) منجر می‌شوند:

$$F(x,v) = -\frac{\partial}{\partial x}(U+Q-m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right) - \frac{\sqrt{\mu\pi} m}{R^2 \exp\left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2\right)} C(x,t). \quad (38)$$

واضح است که ساده‌ترین شکل نیرو همان شکلی است که در این مقاله به عنوان نیرو معرفی شده است (معادله (۹)). هرچند همه نیروهایی که به شکل معادله (۳۸) می‌باشند، همگون‌وردایی تابع توزیع (۱۴) را حفظ می‌کنند، این خود با توجه به نظریه علی اندازه‌گیری [۱، ۴ و ۷] سازگاری کامل با نتایج آماری کوانتوم استاندارد را تضمین می‌کند. ولی این موضوع به این معنی نیست که تمام انتخاب‌های ممکن برای $C(x,t)$ به توصیف واقعگرایانه مناسبی برای توصیف جهان میکروسکوپی منجر می‌شود. لذا در تعیین یک نیروی منحصر به فرد لازم است که شرایط فیزیکی مانند تقارن‌ها و آزمایش را نیز دخیل نمود (بخش‌های ۳-۴ و ۴-۱ و ۴-۲ از همین مقاله را ببینید). اما فعلاً هدف ما در این مقاله این است که نشان دهیم مدلی که با انتخاب $C(x,t) = 0$ به دست می‌آید از بسیاری جهات نظریه موجهی می‌باشد. با این حال باید توجه داشت که به کمک این آزادی در تعریف نیرو، احتمالاً می‌توان نظریه‌هایی با مشخصات نظری مناسب تری ایجاد کرد و برخی از مشکلات ایجاد یک نظریه علی کاملاً مناسب را از میان برداشت.

در نظریه بوهوم سرعت ذرات در هر نقطه از فضا برابر $\frac{S_x}{m}$

نیروی کوانتومی در مکانیک بوهمی برابر خواهد شد. همچنین باید دقت داشت که در حد $\mu \rightarrow 0$ ، دیگر متوسط گیری چندان پر معنی نیست زیرا که در این حد، به ازای هر نقطه از فضا فقط یک سرعت وجود دارد و متوسط نیرو، به ازای سرعت‌های مختلف در یک نقطه، با همان نیرو در آن نقطه یکسان می‌باشد. تحلیل اخیر نیز به زبانی دیگر تبدیل شدن نظریه ما به مکانیک بوهمی در حد $\mu \rightarrow 0$ را نتیجه می‌دهد.

()

هر چند که بررسی حد کلاسیک مدل ما (مانند مکانیک بوهمی) نیاز به بحثی طولانی دارد ولی فعلاً به عنوان یک مقدمه قصد داریم درستی قضیه اهرنفتست را در این قسمت بررسی نماییم. برای این منظور با متوسط گیری از معادله حرکت شروع می‌کنیم:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle + \langle F_Q \rangle, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \langle F_Q \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) F_Q(x, v) dx dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^\nu (\mu \pi)^{-\frac{1}{\nu}} \exp \left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^\nu \right) \\ &\quad \left[-\frac{\partial}{\partial x} (Q - m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right) \right] dx dv \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle F_Q \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} R^\nu \left[-\frac{d}{dx} (Q - m\mu \ln R) \right] dx \\ &= R^\nu (Q - m\mu \ln R) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \nu R R_x \left(-\frac{\hbar^\nu R_{xx}}{\nu m R} - m\mu \ln R \right) dx, \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F_Q \rangle &= \frac{-\hbar^\nu}{\nu m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (R_x)^\nu dx \\ &\quad - \nu m \mu \left[-\frac{R^\nu}{\nu} \ln R \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} (R^\nu) dx \right] = 0. \quad (45) \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت (قضیه اهرنفتست):

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle. \quad (46)$$

مواردی وجود دارد که احتمالاً به کمک آنها می‌توان بین نظریه ما و کوانتوم بوهمی در آزمایشگاه تمایز گذاشت. برخی از چنین مواردی را در بخش ۳.۴ بررسی می‌کنیم.

همان طور که قبلاً هم تذکر دادیم مدل ما در حد $\mu \rightarrow 0$ به نظریه بوهم تبدیل می‌شود. برای اثبات این موضوع کافی است دقت کنیم که در حد $\mu \rightarrow 0$ ، تابع توزیع نظریه ما به تابع توزیع بوهمی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x, v) &= R^\nu (\mu \pi)^{-\frac{1}{\nu}} \exp \left(-\frac{1}{\mu} \left(v - \frac{S_x}{m} \right)^\nu \right) \\ &\rightarrow R^\nu \delta \left(v - \frac{S_x}{m} \right). \quad (39) \end{aligned}$$

این تابع توزیع به طور ضمنی معادله هدایت و فرض تعادل کوانتومی را در بردارد. همچنین با جایگذاری $v = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x}$ و به سمت صفر میل دادن μ ، نیروی داده شده در نظریه ما به نیروی کوانتومی در مکانیک بوهمی میل می‌کند:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right) \right] \Big|_{v = \frac{S_x}{m}} \\ = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q). \quad (40) \end{aligned}$$

توضیحات اخیر نشان می‌دهد که در حد $\mu \rightarrow 0$ نظریه ما با نظریه بوهم یکسان خواهد شد.

قبلاً توضیح دادیم که سرعت بوهمی ذره در هر نقطه از فضا، برابر سرعت متوسط در مدل ما برای آن نقطه می‌باشد. اکنون متوسط نیرو در یک نقطه از فضا در این مدل را با نیروی داده شده در نظریه بوهم مقایسه می‌کنیم.

متوسط نیرو در هر نقطه را با نماد $\bar{F}(x)$ نمایش می‌دهیم:

$$\bar{F}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x, v) f(x, v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv} = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R). \quad (41)$$

همان طور که از محاسبه بالا نتیجه می‌شود متوسط نیرو در مدل ما با نیرو در نظریه بوهم به اندازه $\frac{\partial}{\partial x} (m\mu \ln R)$ تفاوت دارد.

اما دقت کنید که در حد $\mu \rightarrow 0$ متوسط نیرو در نظریه ما با

می‌کنند بستگی دارد، در نتیجه به دلیل تفاوت مسیرها در نظریه ما با نظریه بوهوم، محاسبه زمان تونل زنی در این نظریه به نتایج متفاوتی با مکانیک بوهومی منجر می‌شود. این موضوع می‌تواند به عنوان ابزاری برای آزمون تجربی نظریه ما در نظر گرفته شود. به بیان دیگر از آنجا که مسیرهای موجود در مدل ما به مقدار پارامتر، μ ، بستگی دارد پس زمان تونل زنی نیز به این پارامتر وابسته خواهد شد و با توجه به حد بوهومی نظریه ما، در حد $\mu \rightarrow 0$ به نتایج بوهومی برای زمان تونل زنی می‌رسیم. پس با مقایسه نتایج تجربی با محاسبات نظری می‌توان تخمینی برای مقدار پارامتر μ به دست آورد. در این دیدگاه می‌توان نظریه ارائه شده در این مقاله را به عنوان یک نظریه آزمون برای مکانیک بوهومی تلقی کرد که معادله هدایت را می‌آزماید به این معنا که هرچقدر پارامتر μ نزدیکتر به صفر به دست آید برقراری معادله هدایت با دقت بیشتری آزموده شده است. البته باید دقت داشت که به علت در نظر نگرفتن برهم‌کنش ساعت با سیستم، زمان محاسبه شده زمان ذاتی خواهد بود که در صورتی قابل مقایسه با نتایج آزمایشگاهی می‌باشد که بتوان از برهم‌کنش ساعت با سیستم صرف نظر نمود.

در این قسمت قصد داریم تقارن‌های فضا-زمانی مدل ارائه شده در این مقاله را مورد بررسی قرار دهیم. چنین بررسی‌هایی از لحاظ بنیادی اهمیت ویژه‌ای دارند و به استحکام ساختار نظری ارائه شده می‌افزاید.

دو چارچوب لخت با سرعت نسبی μ را در یک بعد نظر بگیرید. تبدیلات گالیله‌ای مختصات این دو چارچوب را به هم مربوط می‌نماید:

$$\begin{aligned}x &= x' + \mu t', \\ t &= t'.\end{aligned}\quad (47)$$

برای بررسی ناوردایی گالیله‌ای این مدل جدید ابتدا تبدیل تابع توزیع را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که $f(x, \nu)$ توزیع در دستگاه مختصات اول است و $f'(x', \nu')$ توزیع در دستگاه دوم باشد. با توجه به اینکه اگر ذره در چارچوب بدون پریم

کمیت زمان در بین سایر کمیت‌ها در کوانتوم استاندارد وضعیت متفاوتی دارد. هرچند که برای کمیت‌های مختلف در کوانتوم استاندارد یک عملگر در نظر گرفته می‌شود و محاسبات مربوط به آن کمیت بر اساس آن عملگر انجام می‌شود، ولی زمان در این نظریه همچنان یک پارامتر باقی مانده است. در حقیقت پائولی در قضیه‌ای ثابت کرده است که برای ساختن عملگر مناسبی برای زمان محدودیت‌های زیادی وجود دارد.

با این حال کمیت‌های زمانی مختلفی در مکانیک کوانتومی تعریف، فرمول‌بندی و اندازه‌گیری شده‌اند [۱۳]، از جمله: زمان پارامتری، زمان تونل زنی، زمان تأخیر، زمان اقامت (اسکان) و زمان ورود. با همه این اوصاف، تحلیل نظری این کمیت‌ها مورد توافق عمومی نیست و اختلاف نظرهای فراوانی وجود دارد.

در این قسمت ما بر روی زمان تونل زنی تمرکز می‌کنیم. روش‌های متعددی برای محاسبه زمان تونل زنی در چارچوب مکانیک کوانتومی استاندارد پیشنهاد و گسترش داده شده‌اند ولی این روش‌ها غالباً مورد اعتراض واقع شده‌اند. دلیل برخی از این اعتراض‌ها در نظر گرفتن نوعی مسیر، به طور ضمنی، برای حرکت ذرات در طول محاسبه می‌باشد، چیزی که در قالب مفاهیم کوانتوم کپنهاگی قابل دفاع نیست. در مورد روش‌های دیگر نیز ابهامات فراوان دیگری وجود دارد.

اما در مکانیک بوهومی وضعیت کاملاً رضایت بخش است. دلیل این امر این است که به سبب در نظر گرفتن مسیرهای خوش تعریف برای ذرات در مکانیک بوهومی، هیچ گونه ابهامی در محاسبه زمان تونل زنی به وجود نمی‌آید. در حقیقت روش‌های کارایی نیز برای محاسبه زمان تونل زنی در مکانیک بوهومی به وجود آمده است. همچنین روش‌های عددی نیز در این مورد تا حدی توسعه یافته‌اند و شبیه سازی‌های فراوانی نیز انجام شده است [۱۳].

در نظریه‌ای که در این مقاله معرفی شد نیز، محاسبه زمان تونل بدون ابهام می‌باشد، زیرا که در اینجا نیز مسیرهایی خوش تعریف برای ذرات در نظر گرفته شده است. واضح است که زمان تونل زنی به نوع مسیرهایی که ذرات در طول آنها حرکت

$$\frac{d^x x'}{d t'^x} = -\frac{\partial}{\partial x} (U' + Q' - m\mu \ln R') + S'_{xx} \left(v' - \frac{S'_{xx}}{m} \right). \quad (58)$$

تبدیلاتی که برای S و R به دست آوردیم معادله شرویدینگر را نیز ناوردا نگه می‌دارد. البته باید توجه داشت که می‌توانستیم فرآیند معکوسی را نیز (برای اثبات ناوردایی گالیه‌ای) به کار ببریم. به این معنی که از فرض ناوردایی گالیه‌ای معادله شرویدینگر شروع کنیم و تبدیلات S و R را به دست بیاوریم سپس ناوردایی معادله حرکت ذرات و ناوردایی تابع توزیع تحت این تبدیلات را نتیجه‌گیری بنماییم.

تبدیلات زیر را در نظر بگیرید

$$x' = x \quad (59)$$

$$t' = -t$$

همان طور که می‌دانیم شرط ناوردایی معادله شرویدینگر تحت این تبدیل، به تساوی‌های زیر منجر می‌شود [۴]

$$R'(x') = R(x), \quad (60)$$

$$S'(x') = -S(x). \quad (61)$$

حال ناوردایی معادله حرکت ذرات را تحت این تبدیلات بررسی می‌کنیم. از معادله حرکت در دستگاه بدون پریم شروع می‌کنیم و همه کمیت‌ها را برحسب کمیت‌های دستگاه پریم دار جایگزین می‌نماییم

$$\frac{d^x x}{d t^x} = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right), \quad (62)$$

$$\frac{d^x x'}{d t'^x} = -\frac{\partial}{\partial x'} (U' + Q' - m\mu \ln R') + (-S'_{x'x'}) \left(v - \frac{(-S'_{x'})}{m} \right), \quad (63)$$

$$\Rightarrow \frac{d^x x'}{d t'^x} = -\frac{\partial}{\partial x'} (U' + Q' - m\mu \ln R') + S'_{x'x'} \left(-v - \frac{(S'_{x'})}{m} \right). \quad (64)$$

اما در تبدیل معکوس زمانی، سرعت به منفی خود تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^x x'}{d t'^x} = -\frac{\partial}{\partial x'} (U' + Q' - m\mu \ln R') + S'_{x'x'} \left(v' - \frac{(S'_{x'})}{m} \right). \quad (65)$$

در محدوده x تا $x+dx$ و v تا $v+dv$ باشد، آنگاه در چارچوب پریم دار در محدوده x' تا $x'+dx'$ و v' تا $v'+dv'$ خواهد بود. نتیجه می‌گیریم که احتمال حضور ذره در محدوده x تا $x+dx$ و v تا $v+dv$ در چارچوب اول برابرا احتمال حضور ذره در محدوده x' تا $x'+dx'$ و v' تا $v'+dv'$ در چارچوب پریم دار می‌باشد. در نتیجه:

$$f'(x', v') dx' dv' = f(x, v) dx dv, \quad (48)$$

$$f'(x', v') = f(x, v) |J|, \quad (49)$$

که در آن J ژاکوبی تبدیل است. که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= x' + ut', \\ v &= v' + u, \end{aligned} \quad (50)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial x'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (51)$$

در نتیجه با جایگذاری تعاریف در معادله (۴۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{R'^x(x')}{\sqrt{\pi\mu}} \exp \left(-\frac{\left(v' - \frac{S'_{x'}}{m} \right)^2}{\mu} \right) &= \frac{R^x(x)}{\sqrt{\pi\mu}} \exp \left(-\frac{\left(v - \frac{S_x}{m} \right)^2}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

در نتیجه داریم:

$$R'(x') = R(x), \quad (53)$$

$$S'_{x'}(x') = S_x(x) - mu, \quad (54)$$

$$\Rightarrow S'_{x'x'}(x') = S_{xx}(x). \quad (55)$$

اکنون نشان می‌دهیم که معادله حرکت ذرات تحت تبدیلات گالیه ناوردا می‌باشد:

$$\frac{d^x x}{d t^x} = -\frac{\partial}{\partial x} (U + Q - m\mu \ln R) + S_{xx} \left(v - \frac{S_x}{m} \right), \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^x x'}{d t'^x} &= -\frac{\partial}{\partial x'} (U' + Q' - m\mu \ln R') \\ &+ S'_{x'x'} \left((v' + u) - \frac{S'_{x'} + mu}{m} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int_{\text{all over}} f \vec{v} d^3\vec{v} = R^2 \frac{\vec{\nabla} S}{m} \quad (71)$$

در حالت سه بعدی طبیعتاً برای تحول زمانی تابع موج معادله شرودینگر سه بعدی در نظر گرفته می‌شود

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi \quad (72)$$

در اینجا نیز با به کار بردن شکل قطبی تابع موج به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2}{m} \vec{\nabla} S \right) = 0, \quad (73)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + U + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 = 0. \quad (74)$$

با استفاده از معادلات (۷۳) و (۷۴) و معادله لیویل سه بعدی

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \vec{\nabla}_{\vec{v}} \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m} f \right) = 0. \quad (75)$$

به روشی مشابه با حالت تک بعدی، می‌توان همگون‌وردایی تابع توزیع (۶۹) را اثبات نمود.

در این قسمت مقاله به تعمیم نظری برای ذره در یک میدان الکترومغناطیس خارجی می‌پردازیم و ناوردایی پیمانه‌ای نظریه خود را می‌آزماییم. فرض کنید حالت میدان خارجی با پتانسیل‌های φ ، \vec{A} داده شده است که بنا بر تعریف به صورت زیر به میدان‌ها مربوط می‌باشند:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (76)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

در کوانتوم استاندارد برای توصیف ذره در میدان الکترومغناطیس خارجی از معادله شرودینگر زیر استفاده می‌شود:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \vec{A} \right]^2 + e\varphi \right\} \psi, \quad (77)$$

که با در نظر گرفتن شکل قطبی تابع موج و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2}{m} [\vec{\nabla} S - e\vec{A}] \right) = 0, \quad (78)$$

در نتیجه معادله حرکت ذرات تحت تبدیل معکوس زمانی ناوردا می‌ماند. همچنین اگر تبدیل تابع توزیع بررسی شود خواهیم دید که تابع توزیع نیز به درستی تبدیل می‌شود:

$$f'(x', v') = f(x, v). \quad (66)$$

تا این قسمت، تمام محاسبات برای ساده‌ترین سیستم، یعنی تک ذره در یک بعد، انجام شده است. در ادامه مقاله امکان تعمیم مدل جدید به حالت‌های سه بعدی و چند ذره و ... را بررسی می‌نماییم.

برای بررسی جنبه‌های دیگر، مانند برهم کنش با میدان الکترومغناطیس و یا تداخل دو شکاف، به تعمیم سه بعدی این مدل نیاز داریم. لذا در این قسمت مقاله فرمول‌بندی این نظریه را در سه بعد بیان می‌کنیم.

در حالت سه بعدی معادله نیروی کوانتومی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} (U + Q + m\mu \ln R) + T \cdot \left(\vec{v} - \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right), \quad (67)$$

که در آن ماتریس T به صورت زیر تعریف شده است.

$$T = \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{zz} \end{bmatrix}. \quad (68)$$

ماتریس T را می‌توان به شکل (SI) ، $(\vec{\nabla} \vec{\nabla})$ نیز در نظر گرفت که در آن I ماتریس واحد یا یکه می‌باشد.

همچنین برای توزیع آماری ذرات، تعمیم سه بعدی معادله (۱۳) را در نظر می‌گیریم:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{R^2}{(\pi\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{\mu} \left(\vec{v} - \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right)^2 \right]. \quad (69)$$

این تابع توزیع نیز با تعبیر احتمالاتی تابع موج سازگار می‌باشد یعنی:

$$\rho(\vec{r}) = \int_{\text{all over}} f d^3\vec{v} = R^2, \quad (70)$$

تابع موج وابسته می‌باشد بلکه به شکل پتانسیل برداری نیز بستگی دارد.

برای یک میدان معین داده شده می‌توان پتانسیل‌های مختلفی را به کار برد. همان‌طور که می‌دانیم اگر پتانسیل‌های \vec{A} , φ توصیف کننده یک میدان الکترومغناطیس باشند، پتانسیل‌های \vec{A}' , φ' که به صورت زیر تعریف شده‌اند، نیز همان میدان را توصیف می‌کنند:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi, \quad (۸۷)$$

$$\varphi' = \varphi - \left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (۸۸)$$

که در آن $\chi(\vec{r}, t)$ یک تابع دلخواه می‌باشد. اکنون می‌خواهیم ناوردایی مدل جدید را تحت این تبدیل پیمانه‌ای بررسی کنیم.

بانوشتن معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل‌های \vec{A}' , φ' و مقایسه آن با معادله‌ای که برحسب پتانسیل‌های \vec{A} , φ نوشته شده است (معادله (۷۷))، ارتباط بین ψ و ψ' مشخص می‌شود:

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) \vec{A}' \right]^2 + e\varphi' \right\} \psi', \quad (۸۹)$$

$$\psi' = \exp\left(\frac{ie\chi}{c\hbar}\right) \psi, \quad (۹۰)$$

$$S'(x, t) = S(x, t) + \left(\frac{e}{c}\right) \chi(x, t).$$

در نتیجه با توجه به تبدیل پیمانه‌ای پتانسیل برداری، واضح است که

$$\nabla S' - \left(\frac{e}{c}\right) \vec{A}' = \nabla S - \left(\frac{e}{c}\right) \vec{A}. \quad (۹۱)$$

$$f'(\vec{r}, \vec{v}) = f(\vec{r}, \vec{v}), \quad (۹۲)$$

که این خود نشان می‌دهد که تغییر پیمانه در توصیف آماری سیستم نقشی ندارد، ازجمله اینکه محاسبه چگالی احتمال و چگالی جریان احتمال در هر دو پیمانه به نتایجی یکسان منجر می‌شود.

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + e\varphi + \frac{1}{2m} [\vec{\nabla} S - e\vec{A}]^2 = 0. \quad (۷۹)$$

همچنین چگالی احتمال مکان و چگالی جریان احتمال به صورت زیر داده می‌شود:

$$\rho = |\psi|^2 = R^2, \quad (۸۰)$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right] - \left(\frac{eR^2}{mc}\right) \vec{A} \quad (۸۱)$$

$$= \frac{R^2}{m} \left[\vec{\nabla} S - \left(\frac{e}{c}\right) \vec{A} \right].$$

ملاحظات اخیر نشان می‌دهد که برای بازنویسی مدل ما، در حضور میدان الکترومغناطیس تنها لازم است که ∇S را با $\vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A}$ در معادلات (۶۷) و (۶۸) و (۶۹) جایگزین نماییم. در نتیجه شکل تابع توزیع به صورت زیر در می‌آید:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{R^2}{(\pi\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{-1}{\mu} \left(\vec{v} - \left(\frac{\vec{\nabla} S}{m} - \frac{e}{c} \vec{A}\right)\right)^2\right). \quad (۸۲)$$

دقت کنید که این تابع توزیع، مانند موارد قبل به نتایج آماری یکسانی با تعبیر استاندارد منجر می‌شود، یعنی:

$$\int_{all\ over} f d^3\vec{v} = R^2 \quad (۸۳)$$

$$\int_{all\ over} f \vec{v} d^3\vec{v} = \frac{R^2}{m} \left[\nabla S - \left(\frac{e}{c}\right) \vec{A} \right] \quad (۸۴)$$

همچنین برای هماهنگی با تعبیر احتمالاتی معادله شرودینگر، لازم است معادله زیر را برای حرکت ذرات در نظر بگیریم:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} (Q + \mu \ln R) + e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + T' \cdot \left(\vec{v} - \frac{\vec{\nabla} S}{m} + \frac{e}{c} \vec{A}\right), \quad (۸۵)$$

که در آن T' به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T' = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_y}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (۸۶)$$

در عبارت فوق A_x, A_y, A_z مولفه‌های دکارتی پتانسیل برداری می‌باشند. دقت کنید که تابع توزیع برای یک حالت، نه تنها به

همچنین مانند حالت تک ذره، اگر تابع توزیع فوق برای یک لحظه برقرار باشد، معادلات (۹۳) و (۹۴)، برقراری آن را برای تمام لحظات تضمین می‌کنند. لذا سازگاری با تعبیر احتمالاتی تابع موج تضمین می‌شود.

ناموضعیّت: در شکل چند ذره نظریه ما نیز مانند نظریه بوهم، نوعی ناموضعیّت وجود دارد. این نکته از شکل نیروی داده شده در بالا روشن است. زیرا نیروی وارد بر یکی از ذرات در یک لحظه به مکان سایر ذرات در همان لحظه وابسته می‌باشد.

جدایی پذیری: حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن تابع موج به صورت حاصل ضربی به شکل زیر باشد

$$\psi = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i, y_i, z_i) \quad (۹۶)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$R = \prod_{i=1}^n R_i(x_i, y_i, z_i), \quad (۹۷)$$

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(x_i, y_i, z_i).$$

همچنین فرض کنید پتانسیل کلاسیک به صورت زیر قابل تجزیه باشد

$$U = \sum_{i=1}^n U_i(x_i, y_i, z_i). \quad (۹۸)$$

در این حالت، ذرات مختلف را می‌توان به صورت سیستم‌هایی مستقل و جدا از هم بررسی نمود زیرا که:

اولاً: معادله شرودینگر چند ذره، به معادله شرودینگر تک ذره در مورد هر یک از ψ_i ها تبدیل می‌شود

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_i = \sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 \psi_i + U_i \psi_i \quad (۹۹)$$

ثانیاً: نیروی کوانتومی وارد به هر ذره، تنها به تابع موج همان ذره وابسته می‌باشد، و به مکان سایر ذرات وابسته نمی‌باشد:

$$F_i = -\bar{\nabla}_i (U_i + Q_i - \mu_i \ln R_i) + \left[(\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_i) \cdot (S_i I) \right] \cdot \left(\bar{v}_i - \frac{\bar{\nabla}_i S_i}{m_i} \right). \quad (۱۰۰)$$

ثالثاً: تابع توزیع توام مکان-سرعت ذرات به صورت حاصل ضرب تابع توزیع هر یک ذرات در می‌آید، که مشخصه متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشد:

همچنین از تعریف نیرو با جاگذاری به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که نیرو نیز تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا می‌باشد. در نتیجه تغییر پیمانه در دینامیک ذرات نیز تأثیری نمی‌گذارد. و اثبات ناوردایی پیمانه‌ای نظری کامل می‌شود.

واضح است که بررسی یک تک ذره در یک میدان خارجی تنها یک تقریب است و یک نظریه بنیادی باید بتواند سیستمی بسته از ذرات را با در نظر گرفتن برهم کنش‌های آنها به درستی توصیف نماید. به همین منظور در این قسمت مقاله شکل چند ذره‌ای را فرمول‌بندی می‌کنیم.

سیستمی N ذره‌ای را در نظر بگیرید، برای توصیف کامل این سیستم تابع موجی در فضای پیکربندی در نظر می‌گیریم که در معادله شرودینگر صدق می‌کند:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N; t) = \sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 \psi + U \psi. \quad (۹۳)$$

در عبارت فوق ∇_i^2 به معنی $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$ به کار رفته است.

همچنین تحول زمانی مکان ذرات با قانون دوم نیوتن با نیرویی به شکل زیر داده می‌شود:

$$F_i = -\bar{\nabla}_i (U + Q - \mu_i \ln R) + \left[(\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_i) \cdot (S I) \right] \cdot \left(\bar{v}_i - \frac{\bar{\nabla}_i S}{m_i} \right) \quad (۹۴)$$

که در آن Q همان پتانسیل کوانتومی در نظریه چند ذره‌ای بوهم می‌باشد و μ_i ثابت‌های حقیقی مثبتی می‌باشند، که پهنای توزیع سرعت ذرات مختلف را مشخص می‌کنند. البته برای ایجاد نتایج آماری یکسان با کوانتوم استاندارد لازم است تابع توزیع زیر نیز برای وضعیت اولیه ذرات در نظر گرفته شود:

$$f = \frac{1}{\sqrt{\pi^3 N \prod_{i=1}^N \mu_i}} \exp \sum \frac{\left(\bar{v}_i - \frac{1}{m_i} \bar{\nabla}_i S \right)^2}{-\mu_i}. \quad (۹۵)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} v f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{v}{1 + \frac{v^2}{\mu}} dv \quad (104)$$

$$= \frac{\hbar}{\gamma mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right).$$

حال باید یک شکل نیرو مناسب بیابیم که به تحول زمانی یکسانی با معادله شرودینگر، برای این تابع توزیع منجر شود. با به کار بردن معادله (۳۲) می توان فرم نیروی مناسب را به دست آورد

$$F(x, v) = -\frac{m}{f} \left[\int \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} dv + C(x, t) \right]. \quad (105)$$

این تابع توزیع اخیر و همچنین نیروی کوانتومی مربوط به آن نیز، در حد $\mu \rightarrow 0$ به تابع توزیع بوهمی، و همچنین نیروی بوهمی، منجر می شوند.

ما در اینجا برای ساخت تابع توزیع مناسب، بجای استفاده از فرم گوسی تابع دلتا، یکی دیگر از شکل های تابع دلتای دیراک، یعنی شکل لورنتسی، را مورد استفاده قرار داده ایم. در حالی که می توانستیم از شکل های دیگری نیز استفاده کنیم که البته به مدل های متفاوت دیگری منجر می شد. ما در اینجا از بیان جزییات مربوط به شرایط عمومی برای ساخت چنین مدل هایی، صرف نظر کرده تنها متذکر می شویم که امکانات فراوانی برای توصیف فرآیندهای کوانتومی بر اساس مدل های مبتنی بر مسیر وجود دارد و بررسی جامع این موضوع را به یک مقاله مجزا موقوف می نمایم.

مدل ارائه شده در این مقاله را می توان توصیفی آماری از مکانیک بوهمی دانست. در حقیقت به کمک این مدل نشان داده شد که امکانات فراوانی برای توصیف سازگار از جهان کوانتومی به کمک نظریه های حقیقت گرایانه و مبتنی بر مسیر وجود دارد و برای این منظور شکل خاص نیروی کوانتومی بوهم به هیچ وجه الزامی نیست.

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = f_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1) f_2(\vec{r}_2, \vec{v}_2) \dots f_n(\vec{r}_n, \vec{v}_n). \quad (101)$$

باید دقت داشت که در حالت عمومی که تابع موج به صورت حاصل ضربی نیست، چنین جداسازی ممکن نیست و نمی توان هر ذره را به صورتی مستقل از سایر ذرات بررسی نمود. باید دقت داشت که وجود چنین همبستگی هایی در حالت های درهم تنیده برای توضیح مسئله EPR و فرآیند اندازه گیری، ضروری می باشد. همچنین سازوکار چند ذره ارائه شده در این بخش را به سادگی می توان اصلاح کرد تا برای بررسی ذرات یکسان مناسب شود. این فرآیند کاملاً مشابه مکانیک بوهمی می باشد و از ذکر آن صرف نظر می کنیم [۴].

برای خواننده حتماً این سوال پیش آمده است که آیا شکل خاص تابع توزیع (برحسب تابع موج) نقش یا اهمیت خاصی در تولید چنین نظریه هایی دارد؟

البته با کمی دقت روشن می شود که بجز چند شرط معقول و ساده که باید تابع توزیع دارا باشد آزادی زیادی در معرفی تابع توزیع و ایجاد نظریه های علی مشابهی بر مبنای آنها وجود دارد. در این قسمت بدون آنکه این شرایط محدود کننده را به طور صریح و کلی ذکر کنیم یک نمونه دیگر از این نظریه ها را به طور خلاصه معرفی می کنیم تا برای یک بررسی جامع شهود مناسب ایجاد شود.

فرض کنید که متناظر با هر تابع موج تابع توزیع زیر را معرفی کنیم

$$f(x, v) = \frac{R^2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{1}{1 + \frac{v^2}{\mu}}. \quad (102)$$

دقت کنید که این تابع توزیع نیز به نتایج آماری یکسانی با تعبیر احتمالاتی تابع موج منجر می شود

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{1}{1 + \frac{v^2}{\mu}} dv = |\psi|^2, \quad (103)$$

8. M Daumer, D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, *Erkenntnis* **45** (1996) 379.
9. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, *J. Stat. Phys.* **116** (2004) 959.
10. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, arxiv:quant-ph/9512031.
11. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, arxiv:quant-ph/9511016.
12. D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, *Stat J. phys.* **67** (1992) 843.
13. C R Leavens, The “*tunneling-time problem for electron, Bohmian Mechanics and Quantum theory*”, An Appraisal, Dordrecht: Kluwer (1996).
1. D Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 2 (1952) 166.
2. D Bohm, *Phys. Rev.* **89**, 2 (1953) 458.
3. D Bohm, and B J Hiley, “*The Undivided Universe*”, London, Routledge (1993).
4. P R Holland, “*The Quantum Theory of Motion*”, Cambridge University Press (1993).
5. D Dürr, S Goldstein, R Tumulka, and N Zanghi, “*Bohmian Mechanics*”, in the Encyclopedia of Philosophy, Second Edition, edited by D M Borchert, Macmillian Reference (2006).
6. K Berndl, M Daumer, D Dürr, S Goldstein, and N Zanghi, arxiv:quant-ph/9504010.
7. J Wheeler, “*Quantum Theory and Measurement*”, Princeton University Press (1983).