

z.khaksari@ph.iut.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱/۲۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۵/۱)

مشابه با چهار قانون ترمودینامیک معمولی توسط باردین^۱، کارتر^۲ و هاوکینگ فرمول بندی شدند [۴]. با این حال هنوز سرچشمه آماری آنتروپی سیاهچاله یک موضوع جذاب و مورد بحث است.

بررسی ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها امری متداول است. کارهای زیادی روی پایایی و گذار فاز سیاهچاله‌ها انجام شده است. به طور کلی پایایی یک سیستم با ظرفیت گرمایی اش تعیین می‌شود. ظرفیت گرمایی منفی، یک سیستم ناپایای ترمودینامیکی و ظرفیت گرمایی مثبت یک سیستم پایای موضعی را نشان می‌دهد. همچنین در نقاطی که ظرفیت گرمایی واگرا می‌شود معمولاً گذار فاز مرتبه دوم اتفاق می‌افتد.

ویژگی‌های ترمودینامیکی سیستم‌های فیزیکی می‌تواند با

ترمودینامیک سیاهچاله به عنوان عرصه‌ای برای بررسی گرانش کوانتومی مورد توجه افراد بسیاری قرار گرفته است. هاوکینگ نشان داد که در فرآیندهای کلاسیکی مربوط به سیاهچاله، جمع مساحت افق سیاهچاله‌ها کاهش نمی‌یابد [۱]. پس از آن، بکنشتین [۲] بیان کرد که باید به سیاهچاله یک آنتروپی متناسب با مساحت افق رویدادش نسبت داده شود. اما این مطلب در آن زمان مورد تردید قرار گرفت. اگر سیاهچاله دارای آنتروپی و انرژی باشد یک دمای غیر صفر نیز می‌تواند به آن منصوب کرد. در ضمن سیاهچاله به عنوان یک جسم گرم می‌تواند تابش کند که به نظر در تناقض با این دیدگاه بود که چیزی نمی‌تواند از افق سیاهچاله فرار کند. بررسی‌های بیشتر توسط هاوکینگ نشان داد که باید یک دمای غیر صفر به افق سیاهچاله نسبت داده شود [۳]. چهار قانون فیزیک سیاهچاله

۱. Bardeen

۲. Carter

در حالی که در این دو نوع سیاهچاله نقاط گذار فاز وجود دارد. به علاوه این متریک نقاط مربوط به واگرایی گرمایی ویژه در بار و تکانه زاویه‌ای ثابت (C_{JQ}) رادر سیاهچاله کر-نیومن نمی‌تواند نشان دهد. کوودو^۴ بیان کرد که علت این تناقضات ناوردا نبودن متریک راپنیر و وینهلد تحت تبدیلات لژاندر است [۱۱، ۱۲]. سپس یک متریک ناوردا را توسط آنها معرفی شد که می‌توانست نقاط گذار فاز را برای سیاهچاله‌های بی-تی-زد^۵ و ریسنر-نوردستروم و دیگر سیاهچاله‌ها [۱۳-۱۷] باز تولید کند:

$$g_Q = \left(E^C \frac{\partial \phi}{\partial E^C} \right) \left(\eta_{ab} \delta^{bc} \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^C \partial E^D} dE^a dE^b \right), \quad (4)$$

$$\delta_{ab} = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad (5)$$

$$\eta_{cd} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1).$$

در رابطه بالا ϕ یک پتانسیل دلخواه و E^C پارامترهای فزونور سیاهچاله را نشان می‌دهند.

علاوه بر این در [۱۸] نشان داده شده که متریک‌های مبتنی بر هسیان (مشتق دوم) انرژی آزاد هلمهولتز همیشه مرتبط با منحنی دیویس است و بر خلاف متریک راپنیر و وینهلد می‌تواند واگرایی C_{JQ} را باز تولید کند. همچنین متریک‌های مبتنی بر هسیان پتانسیل‌های ترمودینامیکی تولید شده با تبدیل لژاندر، می‌توانند نقاط گذار فاز را آشکار کنند.

مطالعه ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها در زمینه با ثابت کیهان شناسی غیر صفر از چند سال گذشته مورد توجه افراد بسیاری قرار گرفته است. در بیشتر رهیافت‌ها ثابت کیهان شناسی به عنوان پارامتر ثابت در نظر گرفته شده است. اما در برخی مقالات [۱۹-۲۲] پیشنهاد شده که Λ به عنوان متغیر ترمودینامیکی در نظر گرفته شود. به علاوه تحت فرض ثابت بودن Λ معادله جرمی انتگرالی در مورد سیاهچاله‌های چرخان در زمینه دوسیتته و پاد دوسیتته برقرار نیست [۱۹]. به منظور رفع این مشکل ثابت کیهان شناسی $\Lambda = \pm \frac{(D-1)(D-2)}{r^2}$ را به عنوان متغیر ترمودینامیکی در نظر گرفتند و فرمول‌های جرمی

نمایش‌های کاملاً هندسی نیز مطالعه شود. مهمترین مسئله درنمایش هندسی ترمودینامیک، ساختن متریک مناسب است. وینهلد^۱ اولین کسی بود که مفهوم هندسه را وارد ترمودینامیک کرد [۵]. او یک متریک ریمانی به صورت مشتق دوم انرژی داخلی نسبت به آنتروپی و دیگر کمیت‌های فزونور سیستم تعریف کرد. البته در نمادگذاری سیاه چاله از جرم به عنوان انرژی داخلی سیستم استفاده می‌کنیم، بنابراین متریک وینهلد به صورت زیر داده می‌شود:

$$g_{ij}^W = \frac{\partial^2 M}{\partial X^i \partial X^j}, \quad (1)$$

$$X^i \equiv (S, N^a).$$

چند سال بعد راپنیر^۲ [۶] متریک دیگری مشابه با متریک وینهلد که پتانسیل ترمودینامیکی آن بجای جرم، آنتروپی بود، معرفی کرد:

$$g_{ij}^R = -\frac{\partial^2 S}{\partial X^i \partial X^j}, \quad (2)$$

$$X^i \equiv (M, N^a).$$

این دو متریک به کمک رابطه زیر به هم مربوط اند:

$$ds_R^2 = \frac{1}{T} ds_W^2, \quad (3)$$

که T دمای سیستم است. در مواردی که به دست آوردن آنتروپی از تابع جرمی مشکل باشد رابطه بالا می‌تواند مفید باشد. خمش راپنیر برای مطالعه سیستم‌های ترمودینامیکی فراوانی محاسبه شده از جمله سیاهچاله‌ها محاسبه شده است [۷-۱۰]. مشخص شده است که خمش راپنیر اطلاعات درستی از ساختار فازی سیستم می‌دهد. این خمش برای سیستم‌هایی از قبیل گاز ایده‌آل تک اتمی که هیچ برهم‌کنشی بین اتم‌های آن وجود ندارد صفر است. علاوه بر این در نقاط بحرانی همانند حجم همبستگی به بینهایت میل می‌کند که دلیلی برای تناسب بین خمش ترمودینامیکی و همبستگی حجمی است. این ویژگی‌ها نشان می‌دهد که خمش معیاری از برهم‌کنش مؤثر است. اما استثنائاتی هم وجود دارد. برای مثال متریک راپنیر یک خمش صفر در مورد سیاهچاله‌های بی-تی-زد و ریسنر-نوردستروم^۳ می‌دهد،

۱. Weinhold

۲. Ruppeiner

۳. Reissner- Nordström black hole

۴. Quevedo

۵. BTZ black hole

$$T = \left. \frac{\partial M}{\partial S} \right|_{J,l} = \frac{S}{8\pi^2 l^2} - \frac{8\pi^2 J^2}{S^3}, \quad (11)$$

$$S = 4\pi r_+^2, \quad (12)$$

$$\omega = \left. \frac{\partial M}{\partial S} \right|_{S,l} = \frac{8\pi^2 J}{S^2}, \quad (13)$$

$$\theta = \left. \frac{\partial M}{\partial l} \right|_{S,J} = -\frac{S^2}{8\pi^2 l^3}, \quad (14)$$

داده می شود. با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۲) می توان جرم سیاهچاله را محاسبه کرد:

$$M = \frac{S^2}{16\pi^2 l^2} + \frac{4\pi^2 J^2}{S^2}. \quad (15)$$

ترمودینامیک سیاهچاله ها به طور قابل توجهی از سیستم های ترمودینامیکی معمولی متفاوت است. معلوم شده است که ویژگی های ترمودینامیکی سیاهچاله ها به انتخاب آنسامبل آماری شان بستگی دارد. در واقع آنسامبل های مختلف به ظرفیت های گرمایی مختلف منجر می شود و به این طریق وابستگی ساختار گذار فاز به مدل آماری تحت بررسی را نشان می دهد. در ادامه به منظور تحلیل پایایی سیستم به محاسبه ظرفیت های گرمایی در آنسامبل های مختلف می پردازیم. در آنسامبل کانونیک بزرگ که در آن هر دو پارامتر فزونور یعنی J و l افت و خیز می کنند:

$$C_{\theta\omega} \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\theta\omega} = \frac{3S(S^2 - 64\pi^4 J^2 l^2)}{S^4 + 192\pi^4 J^2 l^2}. \quad (16)$$

در $C_{\theta\omega}$ در $S^2 = 64\pi^4 J^2 l^2$ تغییر پایایی می دهد و برای $S > \pi\sqrt{8Jl}$ ما یک سیستم ترمودینامیکی پایا داریم. در آنسامبل کانونیک که هر دو پارامتر فزونور ثابت نگه داشته شده اند ظرفیت گرمایی عبارت اند از:

$$C_{ll} \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{ll} = \frac{S(S^2 - 64\pi^4 J^2 l^2)}{S^4 + 192\pi^4 J^2 l^2}. \quad (17)$$

رفتار این ظرفیت گرمایی مشابه رفتار آن در آنسامبل کانونیک است. در آنسامبل آمیخته با l ثابت:

$$C_{l\omega} \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{l\omega} = S, \quad (18)$$

بنابراین سیستم در این آنسامبل پایاست. سرانجام در آنسامبل آمیخته، با J ثابت داریم:

دیفرانسیلی و انتگرالی را تصحیح کردند:

$$dM = TdS + \omega dJ + \theta dl, \quad (6)$$

$$\frac{D-3}{D-2} M = TS + \omega J + \frac{1}{D-2} \theta l, \quad (7)$$

اعتبار این قوانین در سه بعد برای بی - تی - زد چرخان و فضا زمان کر دوسیه و نیز در چهار بعد نشان داده شده است [۱۹] و [۲۲]. به طور کلی رابطه های (۶) و (۷) برای سیاهچاله های چرخان در زمینه پاد دوسیه در ۳ و ۴ و ۵ و ابعاد بالاتر برقرار است. بنابراین این نتیجه هم از فرض متغیر بودن Λ حمایت می کند. به همین دلیل در ادامه ما ترمودینامیک سیاهچاله بی - تی - زد و ساختار فازی آن را با فرض متغیر بودن Λ با متریک های معرفی شده به طور کامل بررسی می کنیم.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: ابتدا مروری بر حل گرانش (۱+۲) بعدی اینشتین می کنیم. سپس پایایی سیاهچاله بی - تی - زد را با محاسبه ظرفیت گرمایی بررسی می کنیم. در بخش دوم خمش ترمودینامیکی را برای این سیاهچاله با استفاده از متریک های راپنیر، متریک و رهیافت معرفی شده در [۱۸] محاسبه می کنیم.

وقتی ثابت کیهانشناسی صفر باشد هیچ حلی برای سیاهچاله در (۲+۱) بعد وجود دارد. اما باناداس، تیتلبوم و زانلی نشان دادند برای ثابت کیهانشناسی غیر صفر حلی مشابه سیاهچاله های (۳+۱) بعدی وجود دارد، با این تفاوت که به طور مجانبی پاد دوسیه است. این حل به سیاهچاله بی - تی - زد معروف است:

$$dS^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{r^2} dt \right)^2, \quad (8)$$

که در آن

$$\Delta = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}. \quad (19)$$

دو افق این سیاهچاله در

$$r_{\pm} = \frac{l\sqrt{M \pm \sqrt{M^2 - J^2/l^2}}}{2}, \quad (10)$$

قرار دارند. دمای هاوکینگ، آنتروپی، سرعت زاویه ای و نیروی تعمیم یافته طبق قانون دوم ترمودینامیک به ترتیب با:

جدول ۱. رفتار ظرفیت گرمایی در سیاهچاله بی-تی-زد

رفتار ظرفیت گرمایی	آنسامبل آماری
فاقد واگرایی	آنسامبل کانونیک
فاقد واگرایی	آنسامبل کانونیک بزرگ
فاقد واگرایی	آنسامبل آمیخته با l ثابت
در محل واگرایی $C_{\theta J}$ گذار فاز مرتبه دوم رخ می‌دهد.	آنسامبل آمیخته با J ثابت

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial T}\right)_S = \frac{rS}{l}, \quad (24)$$

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial T}\right)_l = \frac{rS^5}{l(S^4 + 192\pi^4 J^2 l^2)}, \quad (25)$$

$$\alpha = \frac{16\pi^2 S^2 l^2}{(576\pi^4 J^2 l^2 - S^4)}, \quad (26)$$

و

$$k_T = \frac{8\pi^2 l^2 (192\pi^4 J^2 l^2 + S^4)}{S^2 (-S^4 + 576\pi^4 J^2 l^2)}. \quad (27)$$

از معادله اول ارنفست شروع می‌کنیم. به ازای $l = 0.3$ و $J = 0.3$ ظرفیت گرمایی $C_{\theta J}$ در نقطه $S_{scri} = 4.61$ واگرا می‌شود. با جایگذاری این مقادیر در معادلات (۱۹)، (۲۴) و (۲۶) داریم:

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial T}\right)_S = 23.086, \quad (28)$$

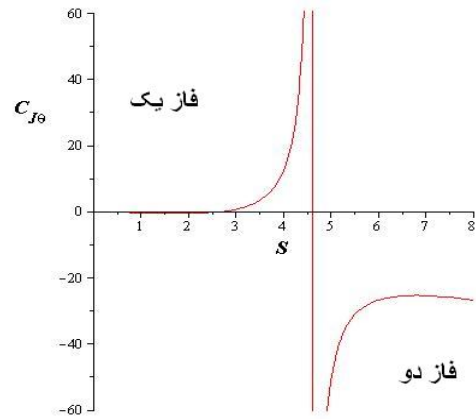
$$\frac{C_{\theta J_r} - C_{\theta J_l}}{Tl(\alpha_r - \alpha_l)} = \frac{-9.0583 - 53.733}{0.173(-20.079 - 15.192)} = 23.651. \quad (29)$$

بنابراین معادله اول ارنفست برقرار است. برای معادلات دوم با استفاده از روابط (۲۱)، (۲۶) و (۲۷) در همان نقطه داریم:

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial T}\right)_l = 23.087, \quad (30)$$

$$\frac{(\alpha_r - \alpha_l)}{k_{T_r} - k_{T_l}} = \frac{(-20.079 - 15.192)}{-0.27 - 0.727} = 23.003. \quad (31)$$

با برقراری معادله دوم به علاوه معادله اول از وقوع گذار فاز مرتبه دوم در این آنسامبل مطمئن می‌شویم. جدول ۱ نتایج کلی این بخش را نشان می‌دهد. در بخش‌های بعدی به محاسبه خمش‌های ترمودینامیکی با رهیافت‌های متفاوت می‌پردازیم.



شکل ۱. نمودار $C_{\theta J}$ در $J = 0.3$ و $l = 0.3$.

$$C_{\theta J} \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\theta J} = \frac{-rS(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)}{-S^4 + 576\pi^4 J^2 l^2}. \quad (19)$$

در $C_{\theta J}$ در $S^4 = 64\pi^4 J^2 l^2$ تغییر پایایی می‌دهد و برای $\pi\sqrt{576J^2 l^2} < S < \pi\sqrt{8Jl}$ ما یک سیستم ترمودینامیکی پایا داریم. علاوه بر این در $S^4 = 576\pi^4 J^2 l^2$ واگرا می‌شود و بنابراین احتمال یک گذار فاز مرتبه دوم در این نقطه وجود دارد؛ شکل ۱ را ببینید.

هر گذار فاز مرتبه دومی باید در نقطه بحرانی در دو معادله ارنفست صدق کند. به آسانی می‌توان نشان داد که معادلات ارنفست برای سیاهچاله بی-تی-زد در این آنسامبل به شکل زیر هستند:

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial T}\right)_S = \frac{C_{\theta J_r} - C_{\theta J_l}}{Tl(\alpha_r - \alpha_l)}, \quad (20)$$

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial T}\right)_l = \frac{(\alpha_r - \alpha_l)}{k_{T_r} - k_{T_l}}, \quad (21)$$

که در آنها

$$\alpha = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_{\theta J}, \quad (22)$$

$$k_T = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial \omega}\right)_{TJ}. \quad (23)$$

اندیس‌های یک و دو به مناطق قبل و بعد از نقطه بحرانی اشاره دارد. این معادلات حاکی از ناپیوستگی مشتقات مرتبه دوم تابع گیبس یعنی α و k_T است. با استفاده از قوانین دیفرانسیل جزئی و روابط (۱۱)، (۱۳) و (۱۴) می‌توانیم کمیت‌های بالا را محاسبه کنیم:

(S, J) . .

در این مورد فضای فاز دو بعدی است و (S, J) را به عنوان پارامترهای افت و خیز کننده در نظر می‌گیریم. عناصر متریک طبق رابطه (۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g_{11} = -\frac{(192\pi^4 J^2 l^2 + S^4)}{S(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)}, \quad (35)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{128\pi^4 J l^2}{(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)},$$

$$g_{22} = \frac{64\pi^4 S J^2}{(S^4 - 64\pi^4 J^2 l^2)}.$$

خمش در این مورد صفر است یعنی فضای فاز مسطح است، به عبارت دیگر گذار فازی وجود ندارد. این نتیجه در مقایسه با رفتار $C_{I\omega}$ در معادله (۱۸)، نتیجه معقولی است.

 (S, l) . .

در این مورد با در نظر گرفتن (S, l) به عنوان متغیر فضای حالت عناصر متریک با استفاده از رابطه (۳) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$g_{11} = \frac{-(192\pi^4 J^2 l^2 + S^4)}{S(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)}, \quad (36)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{2S^4}{l(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)},$$

$$g_{22} = -\frac{S^5}{-l^2(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)},$$

بنابراین

$$R = \frac{N_{SI}}{S(-S^4 + 576\pi^4 J^2 l^2)(64\pi^4 J^2 l^2 - S^4)}, \quad (37)$$

که در آن N_{SI} یک چند جمله‌ای بدون واگرایی است. مقایسه با رابطه (۱۹) نشان می‌دهد که R می‌تواند نقاطی را که $C_{\theta J}$ واگرا می‌شود یا تغییر پایایی می‌دهد، باز تولید کند.

 (S, θ, ω) . .

در این آنسامبل از پتانسیل ترمودینامیکی $\tilde{M} = M - J\omega - l\theta$

در این بخش خمش اسکالر را با در نظر گرفتن (S, J, l) ، (S, l) ، (S, J) ، (S, θ, ω) به عنوان متغیر فضای حالت محاسبه می‌کنیم. خواهیم دید خمش راپنیر به خوبی ساختار فضای فاز را پیش‌بینی می‌کند.

 (S, J, l) . .

بعد فضای ترمودینامیکی در این حالت سه است. از معادله (۳) داریم:

$$dS_R^2 = \frac{1}{T} \left\{ \frac{\partial^2 M}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial J^2} dJ^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial l^2} dl^2 + 2 \frac{\partial M}{\partial S} \frac{\partial M}{\partial J} dM dJ + 2 \frac{\partial M}{\partial S} \frac{\partial M}{\partial l} dM dl + 2 \frac{\partial M}{\partial J} \frac{\partial M}{\partial l} dJ dl \right\}. \quad (32)$$

با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۵) می‌توانیم مؤلفه‌های متریک را حساب کنیم:

$$g_{11} = \frac{-(192\pi^4 J^2 l^2 + S^4)}{S(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)}, \quad (33)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{128\pi^4 J l^2}{(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)},$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{2S^4}{l(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)},$$

$$g_{22} = \frac{64\pi^4 S J^2}{(S^4 - 64\pi^4 J^2 l^2)},$$

$$g_{33} = -\frac{3S^5}{l^2(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)}.$$

سایر مؤلفه‌ها صفرند. خمش ترمودینامیکی دقیقاً مشابه خمش ریمانی محاسبه می‌شود:

$$R = -\frac{1}{2} \frac{R_{\theta\omega}}{S(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)(192\pi^4 J^2 l^2 + S^4)} \quad (34)$$

$R_{\omega\theta}$ یک عبارت فاقد واگرایی است. این رابطه، به جز در نقاطی که ظرفیت‌های گرمایی در آنسامبل‌های کانونیک، کانونیک بزرگ و آمیخته با J ثابت تغییر پایایی می‌دهد، واگرایی دیگری ندارد.

جدول ۲. رفتار خمش ترمودینامیکی در رهیافت راپنیر در سیاهچاله BTZ.

متغیرهای فضای حالت ترمودینامیکی	واگرایی خمش ترمودینامیکی
(S, J, I)	در محلی که $C_{\omega\theta}$ ، C_{Jl} و $C_{\theta l}$ تغییر پایایی می دهد، خمش واگرا می شود.
(S, J)	$R = 0$
(S, I)	در نقاطی که $C_{J\theta}$ صفر یا واگرا می شود، خمش واگرا می شود.
(S, θ, ω)	در محلی که $C_{\omega\theta}$ ، C_{Jl} و $C_{\theta l}$ تغییر پایایی می دهد، خمش واگرا می شود.

نشان دهد. جدول ۲ نتایج این بخش را نشان می دهد.

در این بخش ساختار فازی سیاهچاله بی - تی - زد را با استفاده از متریک ناوردای لژاندر کودوو را بررسی می کنیم.

$$(S, J, I)$$

با در نظر گرفتن M به عنوان پتانسیل ترمودینامیکی، متریک کودوو می تواند از رابطه زیر محاسبه شود:

$$g_{ij}^O \equiv (SM_S + JM_J + IM_I) \begin{pmatrix} -M_{SS} & \circ & \circ \\ \circ & M_{JJ} & M_{JI} \\ \circ & M_{IJ} & M_{II} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

با جایگذاری عبارات مربوطه خواهیم دید که ضریب ماتریس بالا صفر می شود، که نتیجه نامعقولی است.

$$(S, \omega, I)$$

در اینجا به منظور مبادله J و ω تبدیل لژاندر $\tilde{M} = M - J\omega$ را به کار می بریم. بنابراین

$$g_{ij}^O \equiv (S\tilde{M}_S + \omega\tilde{M}_\omega + I\tilde{M}_I) \begin{pmatrix} -\tilde{M}_{SS} & \circ & \circ \\ \circ & \tilde{M}_{\omega\omega} & \tilde{M}_{\omega I} \\ \circ & \tilde{M}_{I\omega} & \tilde{M}_{II} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

بعد از جایگذاری رابطه (۱۳) در خمش محاسبه شده از متریک بالا داریم:

$$R = \frac{S^4 (-576\pi^4 J^2 I^2 S^4 + 2276\pi^4 J^4 I^2 + 3S^8)}{192\pi^4 J^4 (S^4 - 64\pi^4 J^2 I^2)^2}. \quad (44)$$

استفاده می کنیم. این تبدیل متغیرهای فضای ترمودینامیکی را از (S, J, I) به (S, θ, ω) تغییر می دهد:

$$d\tilde{M} = TdS - Jd\omega - Id\theta \quad (38)$$

بنابراین مولفه های غیر صفر متریک طبق رابطه (۳) برابر است با:

$$g_{11} = \frac{1}{3} \frac{4\pi^2 \theta + 2\omega^2 S^{2/3} \pi^{2/3} \theta^{2/3}}{SB(S, \omega, \theta)}, \quad (39)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{-2\omega S^{2/3} \pi^{2/3} \theta^{2/3}}{B(S, \omega, \theta)},$$

$$g_{22} = \frac{-S^{2/3} \pi^{2/3} \theta^{2/3}}{B(S, \omega, \theta)},$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{B(S, \omega, \theta)},$$

که در آن

$$B(S, \omega, \theta) = \left(4\pi^2 \theta - \omega^2 S^{2/3} \pi^{2/3} \theta^{2/3} \right). \quad (40)$$

بعد از محاسبه خمش در مختصات بالا با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) آن را بر حسب (S, J, I) بیان می کنیم:

$$R = -\frac{1}{6} \frac{R_{JJ}}{S(S^4 - 64\pi^4 J^2 I^2)(192\pi^4 J^2 I^2 + S^4)^2}. \quad (41)$$

در رابطه بالا R_{JJ} یک چند جمله ای فاقد واگرایی است. واگرایی R در $S^4 = 64\pi^4 J^2 I^2$ که متناظر با نقطه ای است که ظرفیت های گرمایی در معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) تغییر پایایی می دهند. پس به طور خلاصه خمش راپنیر در همه آنسامبل ها به خوبی می تواند ساختار ترمودینامیکی فضای فاز را

جدول ۳. رفتار خمش ترمودینامیکی در رهیافت کوودو در سیاهچاله BTZ

متغیرهای فضای حالت ترمودینامیکی	واگرایی خمش ترمودینامیکی
(S, J, I)	همه مؤلفه‌های متریک صفر می‌شوند.
(S, ω, I)	در محلی که $C_{\theta I}, C_{\omega I}, C_{\omega \theta}$ تغییر پایایی می‌دهد، خمش واگرا می‌شود.
(S, J, θ)	خمش ترمودینامیکی، در نقطه گذار فاز مرتبه دوم یعنی در محل واگرایی $C_{J\theta}$ واگرا می‌شود
(S, ω, θ)	در محلی که $C_{\omega \theta}, C_{\theta I}, C_{\omega I}$ تغییر پایایی می‌دهد، خمش واگرا می‌شود.

$$R = \frac{R_{\theta}}{\left(-S^{\natural} + 64\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural}\right)\left(192\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural} + S^{\natural}\right)^2} \quad (48)$$

در این مورد تکینگی R در نقطه $S^{\natural} = 64\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural}$ متناظر با نقطه‌ای است که ظرفیت‌های گرمایی در معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) تغییر پایایی می‌دهند. به طور خلاصه متریک کوودو در موردی که (S, J, I) به عنوان متغیر در نظر گرفته شوند نمی‌تواند اطلاعات درستی از برهم‌کنش‌های ترمودینامیکی سیستم بدهد. نتایج این بخش در جدول ۳ خلاصه شده است.

اگر متریکی به صورت مشتقات دوم یک پتانسیل دلخواه (u) نسبت به متغیرهای طبیعی‌اش X^i ، نوشته شود، می‌توان آن را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$ds(u)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial X^i \partial X^j} dX^i dX^j = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial X^j}\right) dX^i = dY^i dX^i, \quad (49)$$

که در آن بنابر تعریف مجموعه Y^i متغیرهای همیوگ مجموعه X^i هستند:

$$Y^i = \frac{\partial u}{\partial X^i}. \quad (50)$$

حسن رابطه (۴۹) این است که لازم نیست تابعیت پتانسیل u را حتماً برحسب متغیرهای طبیعی‌اش پیدا کنیم. این رهیافت در مرجع [۱۸] برای مطالعه ساختار فازی سیاهچاله‌ها در زمینه پاد دوسیت استفاده و مشخص شده که تکینگی خمش‌های به دست آمده از پتانسیل‌های ترمودینامیکی مختلف منطبق بر نقاط گذار فاز هستند. می‌توان دیفرانسیل‌های کامل dX^i و dY^i را

خمش بالا دارای یک واگرایی در نقطه $S^{\natural} = 64\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural}$ است که متناظر با نقطه‌ای است که ظرفیت‌های گرمایی در معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) تغییر پایایی می‌دهند.

$$(S, J, \theta)$$

پتانسیل مناسب در این آنسامبل $\tilde{M} = M - I\theta$ است. بنابراین مؤلفه‌های متریک از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$g_{ij}^Q \equiv (S\tilde{M}_S + J\tilde{M}_J + \theta\tilde{M}_\theta) \begin{pmatrix} -\tilde{M}_{SS} & \circ & \circ \\ \circ & \tilde{M}_{JJ} & \tilde{M}_{J\theta} \\ \circ & \tilde{M}_{\theta J} & \tilde{M}_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

محاسبه R از متریک بالا و جایگذاری رابطه (۱۴) در آن منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$R = \frac{512\pi^{\natural} I^{\natural} \left(13824\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural} - 72\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural} S^{\natural} - S^{\natural}\right)}{S^{\natural} \left(-S^{\natural} + 576\pi^{\natural} J^{\natural} I^{\natural}\right)^2} \quad (46)$$

مقایسه این رابطه با معادله (۱۹) نشان می‌دهد که تکینگی خمش بر نقطه وقوع گذار فاز مرتبه دو یعنی محل واگرایی $C_{\theta J}$ منطبق است.

$$(S, \omega, \theta)$$

در این آنسامبل از $\tilde{M} = M - J\omega - I\theta$ به عنوان پتانسیل استفاده می‌کنیم:

$$g_{ij}^Q \equiv (S\tilde{M}_S + \omega\tilde{M}_\omega + \theta\tilde{M}_\theta) \begin{pmatrix} -\tilde{M}_{SS} & \circ & \circ \\ \circ & \tilde{M}_{\omega\omega} & \tilde{M}_{\omega\theta} \\ \circ & \tilde{M}_{\theta\omega} & \tilde{M}_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

متریک بالا به خمش زیر منجر می‌شود:

$$g_{13} = g_{31} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial r_+} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \lambda} \right) \right\},$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \lambda} \right) \right\}.$$

در این مورد محاسبه خمش با استفاده از رابطه (۵۳) به خمش صفر منجر می‌شود. با توجه به اینکه ظرفیت گرمایی در رابطه (۱۸) فاقد واگرایی است، چنین نتیجه‌ای معقول است. به همین ترتیب محاسبه خمش برای پتانسیل‌های، $F = (T, J, l)$ ، $H = (S, J, \theta)$ و $L = (S, \omega, l)$ به نتایج زیر منجر می‌شود:

$$R_F = \frac{32\pi^2 S^2 l^2 (64\pi^2 J^2 l^2 - S^4)}{(S^4 + 192\pi^4 J^2 l^2)}, \quad (56)$$

$$R_H = \frac{96\pi^2 S^6 l^2}{(-S^4 + 576\pi^4 J^2 l^2)^2},$$

$$R_L = \frac{-2048\pi^6 S^2 J^2 l^4}{(-S^4 + 64\pi^4 J^2 l^2)^2}.$$

مقایسه خمش‌های محاسبه شده در رابطه بالا با ظرفیت‌های گرمایی محاسبه شده در بخش ۲ نشان می‌دهد که تکنیکی خمش به خوبی نقاط صفر و واگرایی ظرفیت‌های گرمایی را بازتولید می‌کند.

در این مقاله با در نظر گرفتن ثابت کیهان شناسی به عنوان متغیر فضای حالت، پایایی ترمودینامیکی موضعی سیاهچاله بی-تی-زد را بررسی کردیم. مشاهده کردیم یک گذار فاز مرتبه دوم در این سیاهچاله اتفاق می‌افتد که منطبق بر واگرایی $C_{\theta J}$ است. علاوه بر این تناظر بین نقاط تکین خمش و نقاطی که در آنها تغییر پایایی رخ می‌دهد را با متریک‌های متفاوتی بررسی کردیم.

برحسب هر مجموعه دلخواهی از مختصات بسط داد و خمش را محاسبه کرد. در این بخش می‌خواهیم خمش را توسط این رهیافت در مختصات (r_+, a, λ) برای سیاهچاله بی-تی-زد محاسبه کنیم. بدین منظور باید تابعیت کمیت‌های ترمودینامیکی این سیاهچاله را برحسب این پارامترها به دست آوریم. با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$T = \frac{M}{2\pi r_+} \left(\sqrt{1 - a^2 \lambda^2} \right), \quad S = 4\pi r_+, \quad l = \frac{1}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{aM}{2r_+}, \quad \theta = -2r_+^2 \lambda^2, \quad J = Ma$$

$$M = \frac{2r_+^2 \lambda^2}{1 + \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}. \quad (51)$$

ابتدا خمش را برای پتانسیل M محاسبه می‌کنیم. در مورد جرم M ، متغیرهای طبیعی آن با مجموعه $X^i = (S, J, l)$ داده می‌شود:

$$dM(S, J, l) = TdS + \omega dJ + \theta dl. \quad (52)$$

بنابر متغیرهای همیوگ که عبارت‌اند از $Y^i = (T, \omega, \theta)$ متریک این پتانسیل طبق رابطه (۴۹) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$ds(M)^2 = dTdS + dJd\omega + d\theta dl. \quad (53)$$

اکنون هر یک از دیفرانسیل‌های رابطه (۵۳) را بر حسب متغیرهای (r_+, a, λ) بسط می‌دهیم، برای مثال:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial r_+} dr_+ + \frac{\partial S}{\partial a} da + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda, \quad (54)$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial r_+} dr_+ + \frac{\partial T}{\partial a} da + \frac{\partial T}{\partial \lambda} d\lambda.$$

با ضرب بسط هر یک از دیفرانسیل‌های رابطه (۵۳) می‌توانیم عناصر متریک به دست آوریم:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial S}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial r_+} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial r_+} \right), \quad (55)$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial a} \right),$$

$$g_{33} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \lambda} \right),$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial r_+} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial J}{\partial a} \right) \right\},$$

13. H Quevedo, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 971.
14. J L Alvarez, H Quevedo, and A Sanchez, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 084004.
15. H Quevedo, and A Sanchez, *J. High Energy Phys.* **0809** (2008) 034.
16. H Quevedo, A Sanchez, and A Vazquez, arXiv:0811.0222.
17. H Quevedo, and A Sanchez, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 087504.
18. H Liu, H Lu, M Luo, and K Shao, 1008. 4482.
19. S Wang, S-Q Wu, F Xie, and L Dan, *Chin. Phys. Lett.* **23** (2006) 1096.
20. D Kastor, S Ray, and J Traschen, arXiv:0904.2765.
21. Y Sekiwa, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 084009.
22. M M Caldarelli, G Cognola, and D Klemm, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) 399.
1. S W Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1997) 1344.
2. J D Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
3. S W Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
4. J M Bardeen, B Carter, and S W Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161.
5. F Weinhold, *J. Chem. Phys.* **63** (1975) 2479.
6. G Ruppeiner, *Phys. Rev. A* **20** (1979) 1608.
7. G Ruppeiner, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 024016.
8. H Quevedo, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 013506.
9. B Mirza, and M Zamaninasab, *J. High Energy Phys.* **0706** (2007) 059.
10. J E Aman, I Bengtsson, and N Pidokrajt, *Gen. Rel. Grav.* **38** (2006) 1305.
11. H Quevedo, and A Vazquez, *AIP Conf. Proc.* **977** (2008) 165.
12. H Quevedo, and A Sanchez, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 024012.