

## درهم تنیدگی کوانتومی و گذار فاز کوانتومی تحت اتلاف در مدل ناهمسانگرد هایزنبرگ XXZ با برهم کنش ژیاوسینکی - مورییا

رضا افضل، محسن صالح کوتاهی و جلال سبحانی

دانشکده علوم، گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
پست الکترونیکی: afzali@kntu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۲/۱۰؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۱/۵/۱۸)

### چکیده

از آنجا که درهم تنیدگی یک مقوله کلیدی در اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی محسوب می شود، بررسی اثرات محیط به عنوان یک منبع اتلاف کوانتومی بر میزان درهم تنیدگی و نقشی که جفت شدگی بین سیستم و محیط در تغییرات درهم تنیدگی کوانتومی و در نتیجه گذار فاز کوانتومی دارد، بسیار مهم خواهد بود. در این مقاله، یک سیستم دو کوبیتی در مدل ناهمسانگرد هایزنبرگ XXZ را که دارای برهم کنش ژیاوسینکی - مورییا است، با در نظر گرفتن اتلاف کوانتومی با استفاده از دینامیک لیندبلد در نظر می گیریم. لازم به ذکر است این مدل به صورت گسترده ای در کارهای اپتیکی و ماده چگال مورد استفاده قرار می گیرد. اثر جفت شدگی بین سیستم و محیط و نیز اثر دما را بر تابع توافق سیستم، که در اینجا به عنوان شاخصی برای اندازه گیری درهم تنیدگی سیستم استفاده می شود، به دست می آوریم و نقشی را که پارامترهای برهم کنشی DM در تحول درهم تنیدگی بازی می کنند مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین با استفاده از مشتق تابع توافق، تأثیر اتلاف و پارامترهای برهم کنش DM را در گذار فاز کوانتومی به دست می آوریم. لازم به ذکر است بر هم کنش اسپین - مدار که نقش خود را از طریق پارامتر DM نشان می دهد تأثیر بسزایی بر روند اثر اتلاف بر میزان درهم تنیدگی و گذار فاز کوانتومی سیستم دارد. این نتایج در مباحث سیستم های کوانتومی در ابعاد نانو دارای اهمیت زیادی می باشد.

واژه های کلیدی: نظریه کوانتومی اتلاف، درهم تنیدگی کوانتومی، گذار فاز کوانتومی

### ۱. مقدمه

کوانتومی<sup>۴</sup> می باشد را فراهم می کند. تحقیقات گسترده ای بر روی حالت های درهم تنیده، این ویژگی نادر مکانیک کوانتومی، انجام شده است. یکی از نتایج قابل توجه این تحقیقات شناخت درهم تنیدگی به عنوان یک منبع است [۷ و ۱۰]، مانند انرژی که می تواند برای اجرای کارهای دلخواه فیزیکی مورد استفاده قرار بگیرد.

شباهت های بین درهم تنیدگی و انرژی خیلی بیشتر از یک تشابه ساده ظاهری است. درهم تنیدگی موجود بین حالت های کوانتومی می تواند به صورت کمی کوانتیده ظاهر شود. این

درهم تنیدگی یک خصیصه بنیادی مکانیک کوانتومی است که تفاوت اساسی بین فیزیک کلاسیکی و کوانتومی را تعیین و مشخص می کند. حالت های درهم تنیده بیانگر نوعی همبستگی کوانتومی غیر موضعی بین زیر سیستم ها بوده [۱] و شالوده اساسی برای بسیاری از کاربردهای علوم اطلاعات کوانتومی که شامل دورحضور کوانتومی<sup>۱</sup> [۲ و ۵]، کد نویسی متراکم کوانتومی<sup>۲</sup> [۶]، رمزنگاری کوانتومی<sup>۳</sup> [۷]، و محاسبات

۱. Quantum teleportation

۲. Quantum dense coding

۳. Quantum cryptography

۴. Quantum computing

در نزدیکی نقاط بحرانی، است [۱۵].

مدل هایزنبرگ یک نامزد ایده‌ال برای تولید و دستکاری حالت‌های درهم‌تنیده می‌باشد و مدل برهم‌کنشی هایزنبرگ می‌تواند در محاسبات کوانتومی جهت کدنویسی مورد استفاده قرار گیرد [۱۷]. از این رو بسیاری از سیستم‌های فیزیکی همچون اسپین‌های هسته [۱۸]، نقاط کوانتومی [۱۹]، ابرساناها [۲۰]، و شبکه‌ی اپتیکی یا نوری [۲۱]، توسط این مدل شبیه‌سازی شده‌اند.

در این مقاله ما به مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی گرمایی در مدل هایزنبرگ می‌پردازیم. این درهم‌تنیدگی قاعداً به دما بستگی دارد اما حالت سیستم تعادل آماری نیست. این وضعیت زمانی اتفاق می‌افتد که سیستم کوانتومی با یک حمام بوزونی در دماهای مختلف برهم‌کنش می‌کند. درهم‌تنیدگی یک دو کیوبیتی در زنجیره‌ی XXZ را به ازای پارامترهای مختلف برهم‌کنش ژیالوسینکی - موری<sup>۲</sup> (DM) و اثر اتلاف را بروی آن بررسی می‌کنیم. از تابع توافق به عنوان اندازه‌ی درهم‌تنیدگی استفاده می‌کنیم [۲۲]. تابع توافق C عددی بین صفر و یک می‌باشد به طوری که C=۰، بر درهم‌تنیدگی صفر و C=۱ بر بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی سیستم دلالت می‌کند. برای یک حالت مخلوط q، تابع توافق حالت برابر است با:

$$C(\rho) = \max \{ \lambda_{\max} - \sum_i \lambda_i \}$$

مثبت ویژه مقادیر ماتریس  $(\sigma^Y \otimes \sigma^Y) \rho^* (\sigma^Y \otimes \sigma^Y) R = \rho(\sigma^Y \otimes \sigma^Y)$  که  $\lambda_i$ ها ریشه مربع هستند و علامت ستاره بر الحاقی مختلط ماتریس چگالی اشاره می‌کند. همچنین در مورد تابع آنتروپی گرمایی سیستم در حالت‌های مختلف صحبت می‌کنیم و تحولات آنتروپی را بر حسب پارامترهای مختلف بررسی خواهیم کرد. نهایتاً تحولات مشتق تابع توافقی سیستم را بر حسب پارامترهای برهم‌کنش DM رسم کرده و گذار فاز کوانتومی سیستم را در شرایط عدم حضور و حضور اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط بررسی می‌کنیم.

## ۲. دینامیک لیندبلاد<sup>۳</sup>

ابعاد دینامیک کوانتومی اتلاف در

مسئله ما را قادر به ارتقا و توسعه‌ی قوانین تراز اول کوانتومی حاکم بر رفتار حالت‌های درهم‌تنیده می‌سازد. این قوانین مشابه با قوانین ترمودینامیک حاکم بر رفتار انرژی، مستقل از شکل ویژه‌ای که با آن توصیف می‌شوند، رفتار می‌کنند. امیدواریم که نظریه‌ی کوانتیدگی درهم‌تنیدگی این امکان را فراهم کند که یک چهارچوب یگانه ساز قدرتمند برای فهم سیستم‌های کوانتومی پیچیده به دست بیاوریم. چرا که وقتی سیستم‌ها را برحسب درهم‌تنیدگی بینشان بررسی کنیم، خواهیم دید که تعداد بسیاری از حالت‌های مختلف، معادل هم خواهند بود.

درهم‌تنیدگی سیستم‌های برهم‌کنش کننده با محیط اطراف که سبب ایجاد اثرات ناهمدوسی بر سیستم می‌شود یکی از بزرگترین موانع بر سر راه فرآیندهای اطلاعات کوانتومی می‌باشد. درهم‌تنیدگی می‌تواند هم از طریق برهم‌کنش مستقیم بین دو کیوبیت [۱۱] و یا از طریق برهم‌کنش با کیوبیت‌ها با یک قسمت سوم تولید شده باشد [۱۲]. به هر حال در هر دو فرآیند سیستم بسته فرض شده و از اثرات محیط صرف نظر شده است. در وضعیت واقعی، یک سیستم کوانتومی می‌تواند هرگز منزوی نباشد و به طور اجتناب ناپذیری با محیط اطراف خود برهم‌کنش داشته باشد. یک اثر این برهم‌کنش ناخواسته، ناهمدوسی است که به طور عمده‌ای باعث کاهش درهم‌تنیدگی و همدوسی کوانتومی می‌شود. نشان داده شده است که دو کیوبیت جفت شده با محیط اطراف و بدون جفت شدگی مستقیم باهم می‌توانند درهم‌تنیده باشند [۱۳]، علاوه بر آن می‌تواند یک حالت پایدار نیز تشکیل دهد [۱۴].

گذار فاز کوانتومی<sup>۱</sup> (QPT) یک تغییر کیفی در حالت پایه‌ی یک سیستم بس ذره‌ای کوانتومی است [۱۵ و ۱۶]. بر خلاف گذار فاز معمولی که در دماهای غیر صفر رخ خواهد داد، افت و خیزهای موجود در QPT به طور کامل کوانتومی هستند. به طوری که در نقاط بحرانی در فضای پارامترها، همبستگی‌های بلند برد حالت پایه سیستم، در جایی که گذار فاز صورت می‌گیرد افزایش شدیدی دارند. علاوه بر آن وجود یک QPT در یک سیستم بس ذره‌ای کوانتومی به شدت متأثر از رفتار سیستم

۲. Dzyaloshinskii-Moriya

۳. Lindblad

۱. Quantum Phase Transitions

$H$  عملگر هامیلتونی سیستم،  $\hat{L}_\mu$  ها عملگرهای دارای رد مساوی یک بوده و  $\hat{L}_\mu^\dagger$  همیوگ الحاقی آن است. از طریق این معادله، تحولات زمانی سیستم را بررسی می‌کنیم. جمله اول معادله (۱)، یک تحول یکانی هم‌دوس از ماتریس چگالی را نشان می‌دهد، در حالی که جمله دوم اثرات ناهمدوسی محیط را روی سیستم نشان داده و یک دینامیک غیر هم‌دوسی را برای سیستم ایجاد می‌کند. در این مقاله تنها به بررسی اثرات ناهمدوسی ناشی از محیط بر روی انواع حالات سیستم می‌پردازیم و از تحول یکانی سیستم صرف نظر می‌کنیم

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \sum_{\mu} (\nu \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{\rho} \hat{L}_{\mu} - \hat{L}_{\mu} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \rho - \rho \hat{L}_{\mu} \hat{L}_{\mu}^{\dagger}). \quad (3)$$

منبعی را که سیستم با آن برهم‌کنش دارد را به صورت یک سیستم بوزونی در نظر گرفته که به صورت مجموعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ عمل می‌کند، که هامیلتونی آن به این شکل است:

$$H_E = \sum_k \hbar \omega_k b_k^{\dagger} b_k, \quad (4)$$

که در آن  $b, b^{\dagger}$  به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی در سیستم‌های بوزونی می‌باشند و  $\omega_k$  بسامدهای مختلف این سیستم است. عملگرهای لیندبلد، که بیانگر تأثیرات اتلافی و ناهمدوسی منبع روی سیستم می‌باشند، با توجه به هامیلتونی سیستم به این صورت در نظر گرفته می‌شود؛ از آنجایی که سیستم شامل دو کیوبیت است و لذا برای هر دوتای آنها می‌نویسیم

$$L_{\pm, Z} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sigma_{\pm, Z}, \quad (5)$$

$$L_{\pm Z}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sigma_{\pm, Z},$$

که در آن  $L, L^{\dagger}$  عملگرهای لیندبلد کیوبیت اول و دوم است و  $\sigma_{\pm, Z}$  مؤلفه‌های مثبت، منفی و  $Z$  ماتریس پائولی می‌باشند. ضریب جفت شدگی سیستم با منبع می‌باشد که در اینجا برای هر دو کیوبیت آن را یکسان در نظر می‌گیریم. با انجام محاسبات با استفاده از معادله لیندبلد برای مؤلفه‌های اتلافی ماتریس چگالی نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

ناهمدوسی<sup>۱</sup> [۲۳ و ۲۴]، آشفتگی کوانتومی<sup>۲</sup> [۲۵]، دینامیک فمتو ثانیه<sup>۳</sup> [۲۶]، و در دینامیک کوتاه زمانی سیستم‌های دستگاه نانو متریک [۲۷]، در سال‌های اخیر به شکل وسیعی مورد بررسی و استفاده قرار گرفته است. ساختار رسمی نظریه بر پایه نیمه گروه‌های دینامیکی کوانتومی، که تقریباً به طور هم‌زمان توسط لیندبلد [۲۸] و کوساکوسکی<sup>۴</sup> [۲۹] ارائه شده است، بنا گردیده است. این نظریه به شکل رسمی معادله دینامیکی کوانتومی دقیقی را در اختیار قرار داده است، به ویژه اینکه این معادله خصوصیت مثبت بودن ماتریس چگالی را در تحولات تضمین می‌کند.

معادله لیندبلد تعمیمی از معادلات وان نیومن-لیوویل<sup>۵</sup> می‌باشد. همان طور که معادله شرودینگر توصیفی از تحول زمانی حالت خالص یک سیستم ارائه می‌دهد، معادلات لیندبلد شرحی از تحول زمانی ماتریس چگالی برای سیستم‌های باز کوانتومی را در اختیار قرار می‌دهد. معادله شرودینگر تحول یکانی یک سیستم برگشت پذیر را توصیف می‌کند حال آنکه برای تحولات غیر یکانی در سیستم های برگشت ناپذیر همانند سیستم‌های اتلافی (سیستم باز) به معادلات تعمیم یافته‌ای همچون معادله لیندبلد نیاز است [۲۸]. معادلات وان نیومن برای ماتریس چگالی یک توصیف یکانی از سیستم، که شامل اتلاف نیست، را فراهم می‌کند.

معادله لیندبلد برای تحول زمانی ماتریس چگالی یک سیستم که تحت اتلاف است به این صورت تعریف می‌شود [۲۸ و ۲۹]:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \hat{L}(t)\rho(t), \quad (1)$$

$$\hat{L}(t)\rho \equiv -i[H(t), \rho] + \hat{D}(t)\rho,$$

که برای بخش اتلاف گر یا میرا کننده  $\hat{D}(t)$  داریم:

$$\hat{D}\rho = \sum_{\mu} (\nu \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{\rho} \hat{L}_{\mu} - \hat{L}_{\mu} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \rho - \rho \hat{L}_{\mu} \hat{L}_{\mu}^{\dagger}). \quad (2)$$

۱. Decoherence

۲. Quantum chaos

۳. Dynamics femtosecond

۴. A Kossakowski

۵. Liouville-von Neumann equation

تحلیل می‌کنیم. در این مطالعه، ما زنجیره اسپینی نوع هایزنبرگ را با یک جفت شدگی تبدلی نوسانی در نظر گرفتیم. طبیعتاً این نوسانات نواری، نمی‌تواند فاز پاد فرومغناطیس مربوط به موقعیت نواری یکنواخت را نابود کند، بلکه تنها به طور جزئی ویژگی حالت پایه را که ناشی از دوپاراش<sup>۱</sup> شبکه اسپینی است تغییر می‌دهد. پس یک برهم‌کنش با تقارن کم می‌تواند نقش قابل توجهی در القای فاز کوانتومی بازی کند. برای بررسی گذار فاز کوانتومی، ما از برهم‌کنش موریلا-ژیلوشینسکی (DM) [۴۳] که نتیجه جفت شدگی اسپین مدار است، استفاده می‌کنیم. از طریق مشتق تابع توافقی سیستم، نقاط بحرانی کوانتومی سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا محاسبات درهم‌تنیدگی میان اسپین‌های شبکه در دمای دلخواه را انجام داده و سپس اثرات اتلاف روی درهم‌تنیدگی سیستم را، با وجود برهم‌کنش سیستم با محیط و به طبع آن بیشینه درهم‌تنیدگی، بررسی می‌کنیم. ایده اصلی این است که با بررسی درهم‌تنیدگی میان اسپین‌های شبکه، با در نظر گرفتن سیستم کل به صورت یک سیستم دو قسمتی و تعمیم آن، درک مناسبی از درهم‌تنیدگی کل سیستم و گذار فاز کوانتومی به دست بیاوریم. از این رو قادر خواهیم بود صحت وجود ویژگی‌های کوانتومی را در همبستگی بین ذرات سیستم تعیین کنیم.

#### ۴. محاسبه درهم‌تنیدگی کوانتومی

##### ۴.۱. پارامتر راستای z جفت شدگی DM

هامیلتونی  $H$  برای یک دو کیوبیتی ناهمسانگرد مدل هایزنبرگ  $XXZ$  با پارامتر  $z$  جفت شدگی DM عبارتست از:

$$H = J_X \sigma_1^X \sigma_2^X + J_Y \sigma_1^Y \sigma_2^Y + J_Z \sigma_1^Z \sigma_2^Z + D_Z (\sigma_1^X \sigma_2^Y - \sigma_1^Y \sigma_2^X) \quad (7)$$

که  $J_i (i = X, Y, Z)$  ضرایب جفت شدگی حقیقی می‌باشند.  $D_Z$  مؤلفه  $z$  پارامتر جفت شدگی DM است و  $\sigma^i (i = X, Y, Z)$  ماتریس‌های پائولی می‌باشند. در اینجا به اصطلاح برهم‌کنش DM یک عبارت مغناطیسی الحاقی برآمده از جفت شدگی اسپین مدار می‌باشد [۴۳].  $J_i > 0$  مربوط به حالت پادفرومغناطیس و  $J_i < 0$  مربوط به حالت فرومغناطیس

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11}(t) &= (\gamma/2)[p_{23} + p_{22}], \\ \dot{p}_{12}(t) &= -(5\gamma/4)p_{12} + (\gamma/2)p_{24}, \\ \dot{p}_{13}(t) &= -(5\gamma/4)p_{13} + (\gamma/2)p_{24}, \\ \dot{p}_{14}(t) &= -(10\gamma/4)p_{14}, \\ \dot{p}_{22}(t) &= -(\gamma/2)[p_{22} + p_{24}], \\ \dot{p}_{23}(t) &= -(10\gamma/4)p_{23}, \\ \dot{p}_{24}(t) &= -(7\gamma/4)p_{24}, \\ \dot{p}_{33}(t) &= -(\gamma/2)[p_{23} + p_{24}], \\ \dot{p}_{34}(t) &= -(7\gamma/4)p_{24}, \\ \dot{p}_{44}(t) &= -\gamma p_{44}, \\ p_{12}^* &= p_{21}, p_{13}^* = p_{31}, p_{14}^* = p_{41}, p_{23}^* = p_{32}, \\ p_{24}^* &= p_{42}, p_{34}^* = p_{43}, \end{aligned} \quad (6)$$

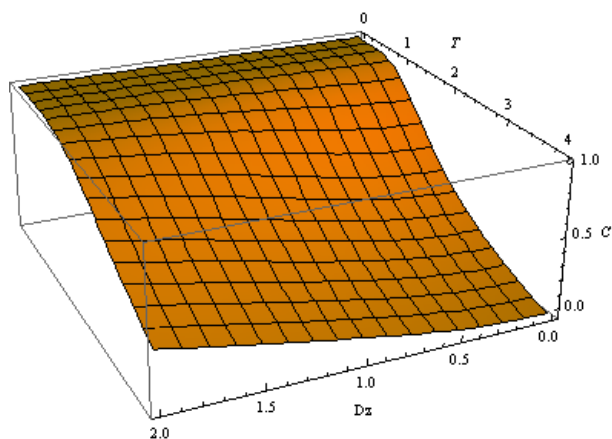
که اثر اتلاف روی سیستم را در حالت‌های مختلف با استفاده از نتیجه بالا، در قسمت بعد بررسی می‌کنیم.

#### ۳. گذار فاز کوانتومی

افت و خیزهای کوانتومی در سیستم‌های اسپینی با ابعاد کمتر نسبت به سیستم‌های اسپینی با ابعاد بزرگتر قویتر هستند [۱۵]. گذار فاز کوانتومی توسط افت و خیزهای کوانتومی شدیدتر تحریک شده و سپس پدیده‌های کوانتومی بدیع و جالبی را در سیستم‌های اسپینی ابعاد کم به نمایش می‌گذارد. این اثرات اثرات برهم‌کنش‌های نوار نوسانی، به طور گسترده‌ای در سیستم‌های اسپینی مانند زنجیره هایزنبرگ پادفرومغناطیس [۳۰-۳۵]، زنجیره هایزنبرگ با دوره‌های نواری [۳۶ و ۳۷]، زنجیره پادفرومغناطیس هایزنبرگ چهارمتریک [۳۸]، و نردبان اسپینی دو پایه‌ای [۳۹-۴۰]، مطالعه شده‌اند. این گذارهای فاز کوانتومی (QPT) به طور موثق کوانتومی بوده به این معنی که عامل اصلی همبستگی‌های بلند برد همچون درهم‌تنیدگی هستند. نکته قابل توجه این است که حالت سیستم در نقاط بحرانی به شدت درهم‌تنیده است [۴۲]. به این ترتیب سیستم در پیرامون نقاط بحرانی می‌تواند برحسب درهم‌تنیدگی خود، که تابعی از پارامترهای مختلف سیستم است، توصیف شود. ابتدا درهم‌تنیدگی و تغییرات اندازه آن را بر حسب پارامترهای مختلف سیستم بررسی کرده و سپس تغییر در بیشینه اندازه درهم‌تنیدگی، که تفسیری از انتقال فاز کوانتومی است، را در شرایط مختلف

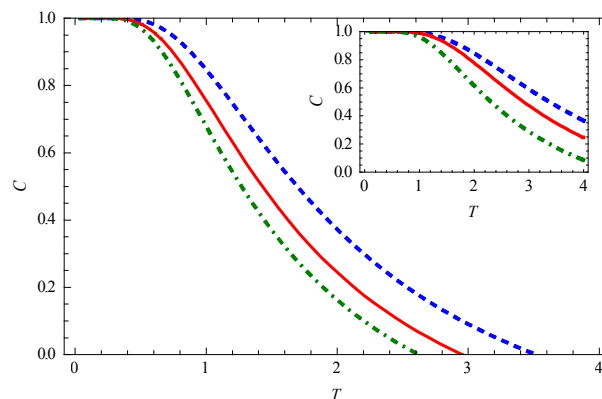
۱. Dimerization





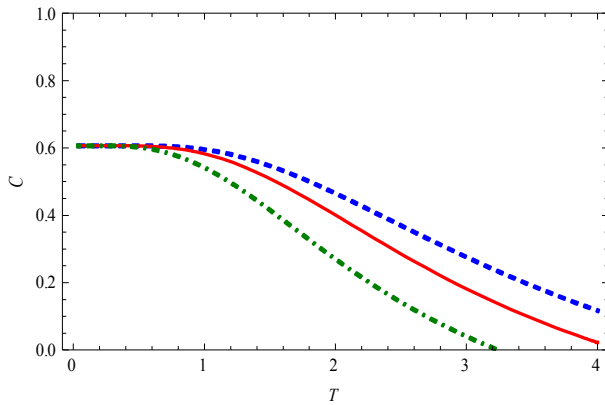
شکل ۲. تغییرات تابع توافقی سیستم بر حسب دما  $T$  و  $D_Z$  به ازای  $J_Z = 1$  و  $J = 1$ .

حال به شکل‌ها نگاه کنید، وقتی دما  $T$  افزایش می‌یابد، افت و خیزهای دمایی کنترل سیستم را در آن ناحیه به دست می‌گیرد و نقش ثابت‌های جفت شدگی  $D_Z$ ،  $J_Z$  و  $J$  کاهش می‌یابد. پس می‌بینیم که این خطوط در شکل ۱ به هم نزدیکتر می‌شوند. ما حال پارامتر  $J_Z$  را برابر با یک قرار می‌دهیم. همان‌طور که در شکل ۱ (نمودار کوچک سمت راست) می‌بینیم، در دماهای یکسان خطوط نسبت به شکل اصلی ۱ بیشتر از هم جدا شده‌اند. این اثر به دلیل تأثیر قابل توجه ضریب جفت شدگی  $J_Z$  در اندازه کوانتیدگی و درهم‌تنیدگی سیستم است. حال به ما اجازه دهید که با توجه به شکل‌های ۱ و ۲ به تأثیر پارامتر  $D_Z$  در میزان درهم‌تنیدگی گرمایی بپردازیم. در نتیجه تقارن پارامترهای درهم‌کنش DM، ما می‌توانیم تنها تأثیر قدرت پارامتر  $D_Z$  را در محاسبات وارد کنیم. پس تنها حالت‌های  $D_Z > 0$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در نواحی معین زمانی که پارامتر  $D_Z$  افزایش می‌یابد درهم‌تنیدگی کوانتومی نیز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر با افزایش پارامتر  $D_Z$  می‌توان سیستم درهم‌تنیده‌تری ایجاد کرد و نواحی دمایی که سیستم همچنان درهم‌تنیده است را نیز می‌توان افزایش داد، یعنی نقاطی را که سیستم در آنها درهم‌تنیدگی خود را از دست می‌دهد به تاخیر انداخت. همان‌طور که از نمودارهای بالا مشخص است وجود اتلاف باعث تضعیف و در مواردی باعث نابودی درهم‌تنیدگی سیستم می‌شود. هرچقدر میزان جفت شدگی بین سیستم و محیط



شکل ۱. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $Z$  به ازای  $J_Z = 0.2$  و  $J = 1$ . و خط تیره آبی  $D_X = 1$ ، خط ضخیم  $D_X = 0.6$ ، نقطه چین  $D_X = 0.2$  و نمودار کوچک سمت راست را به ازای  $D_Z = 1$  و  $J = 1$ . و خط تیره آبی  $J_Z = 2$ ، خط ضخیم  $J_Z = 1$ ، نقطه چین  $J_Z = 1$  رسم کردیم.

درهم‌تنیدگی کوانتومی را از طریق تابع توافق  $C$  و میزان تأثیر از پارامترهای مختلف را بررسی کنیم. به شکل ۱ نگاه کنید جایی که  $J = 1$  است. می‌بینیم که میزان درهم‌تنیدگی با افزایش دما کاهش می‌یابد. این وضعیت مشابه رفتار حالتی است که در شکل ۱ (نمودار کوچک سمت راست) نشان داده شده است. برخلاف آن، در شکل ۲ می‌بینیم که در یک نقطه مشخص مقدار  $C$  دیرتر صفر می‌شود در حالی که در شکل ۱ این نقطه بالاتر است. به عبارتی پارامترهای بزرگتر  $D_Z$  دارای نقاط بزرگتری هستند. این نقاط به اصطلاح به نقاط بحرانی سیستم دلالت می‌کنند. این حالت‌ها در نتیجه ترکیب حالت‌های درهم‌تنیده بیشینه با دیگر حالت‌ها می‌باشد. این موضوع بیانگر این است که درهم‌تنیدگی گرمایی با افزایش دمای  $T$  در نقاط بحرانی پنهان می‌شود و در نتیجه هیچ منبع درهم‌تنیدگی برای استفاده کردن وجود ندارد. همان‌طور که می‌دانیم درهم‌تنیدگی کوانتومی تنها همبستگی کوانتومی موجود نیست. بر پایه بحث اولیور و زوریک [۵۱]، فقدان درهم‌تنیدگی به معنای کلاسیک بودن سیستم نیست. برای از بین بردن کوانتیدگی سیستم باید از فرآیندهای ناهمدوس استفاده کرد. ناهمدوسی نهایتاً باعث صفر شدن کوانتیدگی سیستم شده و آنگاه سیستم در مجموع حالت کلاسیکی خواهد داشت.



شکل ۵. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $D_Z$  به ازای  $\gamma = 0.2$ ،  $t = 1$  و  $D_Z = 1$  و  $J = 1$ . خط تیره آبی  $J_Z = 3$ ، خط قرمز ضخیم  $J_Z = 2$  و خط سبز  $J_Z = 1$  را نشان می‌دهند.

پارامتر  $D_Z$  در مقابل اتلاف ناشی از محیط تأثیرپذیرتر است و کاهش بیشتری از درهم‌تندگی کوانتومی با این پارامتر شاهد هستیم. در شکل ۶ همان‌طور که مشاهده می‌کنیم با افزایش ثابت جفت‌شدگی که بیانگر یک برهم‌کنش قوی بین سیستم و محیط است، تأثیر پارامترهای دیگر در اندازه درهم‌تندگی به شدت کاهش می‌یابد و خط‌های حالت مختلف به همدیگر نزدیکتر می‌شوند. البته با وجود برهم‌کنش قوی بین سیستم و محیط عملاً سیستم حتی در دماهای پایین نیز درهم‌تنیده نخواهد بود.

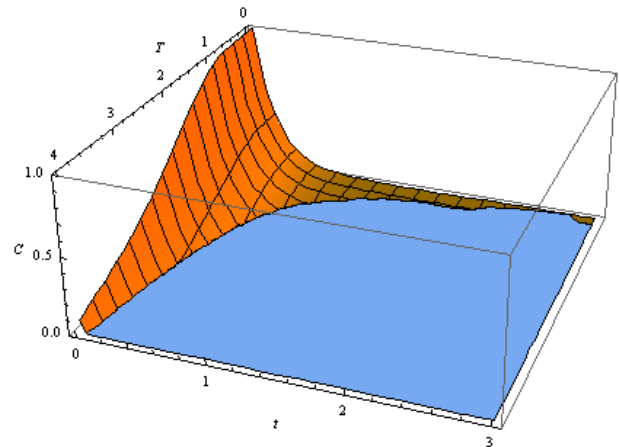
#### ۳.۴. پارامتر راستای x جفت‌شدگی DM

همیلتونی  $H$  برای یک دو کیوبیتی ناهمسانگرد مدل هاینبرگ XXZ با پارامتر  $x$  جفت‌شدگی DM عبارت است از:

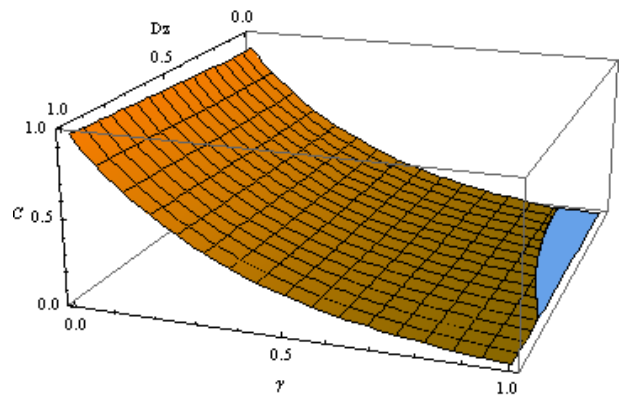
$$H = J\sigma_1^X \sigma_2^X + J\sigma_1^Y \sigma_2^Y + J_Z \sigma_1^Z \sigma_2^Z + D_x (\sigma_1^X \sigma_2^Y - \sigma_1^Y \sigma_2^X), \quad (14)$$

که در آن  $J_i$  ( $i = X, Y, Z$ ) ضرایب جفت‌شدگی حقیقی می‌باشند.  $D_x$  مؤلفه  $x$  پارامتر جفت‌شدگی DM است و ماتریسی این همیلتونی بر حسب پایه‌های استاندارد  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  به صورت زیر خواهد بود

$$H' = \begin{pmatrix} J_Z & iD_X & -iD_X & 0 \\ -iD_X & -J_Z & 2J & iD_X \\ iD_X & 2J & -J_Z & -iD_X \\ 0 & -iD_X & iD_X & J_Z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

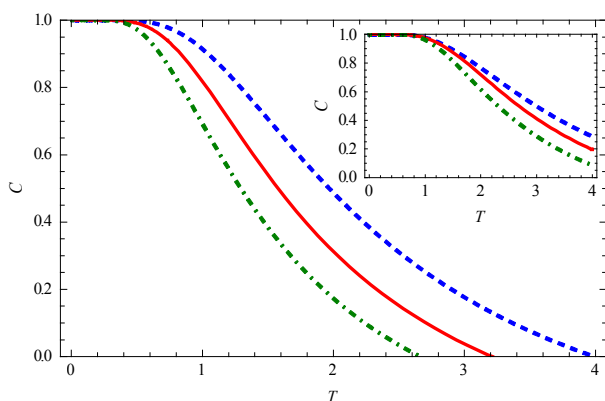


شکل ۳. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $D_Z$  به ازای  $\gamma = 0.2$ ،  $D_Z = 1$ ،  $J_Z = 1$  و  $J = 1$ .



شکل ۴. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $D_Z$  به ازای  $T = 1$ ،  $t = 1$  و  $J_Z = 1$  و  $J = 1$ .

اطراف آن بیشتر باشد، طبعاً اثر اتلاف مشخص‌تر و کاهش درهم‌تندگی سیستم بیشتر خواهد بود. همان‌طور که از شکل ۴ مشخص است ثابت جفت‌شدگی  $\gamma$  نقش تعیین‌کننده‌ای در میزان کاهش درهم‌تندگی سیستم دارد، که اگر مقدار کمتری داشته باشد بیانگر برهم‌کنش ضعیف‌تر بین سیستم و محیط بوده و در نتیجه تضعیف کمتر درهم‌تندگی سیستم را در پی خواهد داشت، و بالعکس. نکته جالب توجهی که از مقایسه شکل ۵ و ۶ می‌توان دریافت این است که مقاومت بیشتر سیستم با  $J_Z$  بیشتر، در مقایسه با همان مقدار برای  $D_Z$ ، در برابر نقش تضعیف‌کنندگی که محیط ایجاد می‌کند، حاصل می‌شود. به عبارت دیگر



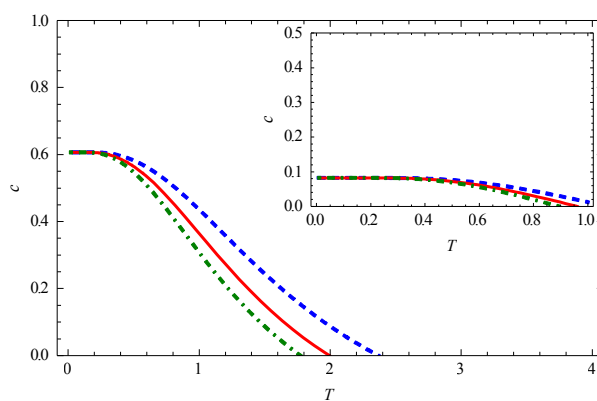
شکل ۷. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم کنش DM با مؤلفه X به ازای  $J_Z = 0.2$  و  $J = 1$ . خط فاصله در  $D_X = 1$ ، خط ضخیم  $D_X = 0.6$ ، نقطه چین  $D_X = 0.2$  را نشان می‌دهند. و نمودار کوچک سمت راست به ازای  $D_X = 1$  و  $J = 1$ . رسم شده است، و خط تیره آبی  $J_Z = 3$ ، خط ضخیم  $J_Z = 2$ ، نقطه چین  $J_Z = 1$  است.

تغییرات آن را به ازای مقادیر مختلف پارامتر برهم کنش DM رسم می‌کنیم.

تأثیر اتلاف بروی درهم‌تنیدگی کوانتومی سیستم را از طریق رسم نمودارهای تغییرات تابع توافقی اتلافی بر حسب متغیرهای مختلف نشان می‌دهیم.

#### ۴.۴. نتیجه و بحث

مشابه با مدل هایزنبرگ ابتدایی که با پارامتر برهم‌کنش  $D_Z$  بررسی کردیم در مدل هایزنبرگ دومی با پارامتر برهم‌کنشی  $D_X$  اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط اطراف، باعث کاهش و از بین رفتن درهم‌تنیدگی در سیستم می‌شود. با این وجود تفاوت‌هایی هم در اندازه درهم‌تنیدگی و هم نقاط بحرانی که سیستم در آنها ویژگی درهم‌تنیده بودنش را از دست می‌دهد، با عدم حضور اتلاف و حتی در حضور اتلاف در دو حالت سیستم وجود دارد. در ادامه به شکل ۱ و ۷ برمی‌گردیم، که رفتار مشابه درهم‌تنیدگی کوانتومی را در مدل هایزنبرگ ناهمسانگرد بین پارامترهای  $D_X$  و  $D_Z$  می‌بینیم. این شباهت در رفتار را در حضور اتلاف ناشی از محیط نیز در شکل ۶ و ۱۰ مشاهده می‌کنیم. در حقیقت هرچقدر مقدار ثابت‌های برهم‌کنش DM بیشتر باشد مدت بیشتری سیستم در حالت درهم‌تنیده باقی



شکل ۸. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $D_Z$  به ازای  $\gamma = 0.2$ ،  $t = 1$ ،  $J_Z = 0$  و  $J = 1$ . خط تیره آبی  $D_Z = 1$ ، خط قرمز ضخیم  $D_Z = 0.6$ ، و خط سبز  $D_Z = 0.2$  است نمودار کوچک سمت راست همان تغییرات را به ازای  $\gamma = 1$ ،  $t = 1$ ،  $J_Z = 1$  و  $J = 1$  نشان می‌دهد.

به این ترتیب با انجام محاسبات جبری مناسب و دقیق، همچنین با در نظر گرفتن حالت سیستم در تعادل گرمایی برای ماتریس چگالی خواهیم داشت

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{Z'}} \begin{pmatrix} \mu_+ & -\xi & \xi & \mu_- \\ \xi & \nu_+ & \nu_- & -\xi \\ -\xi & \nu_- & \nu_+ & \xi \\ \mu_- & \xi & -\xi & \mu_+ \end{pmatrix}, \quad (16)$$

به طوری که داریم

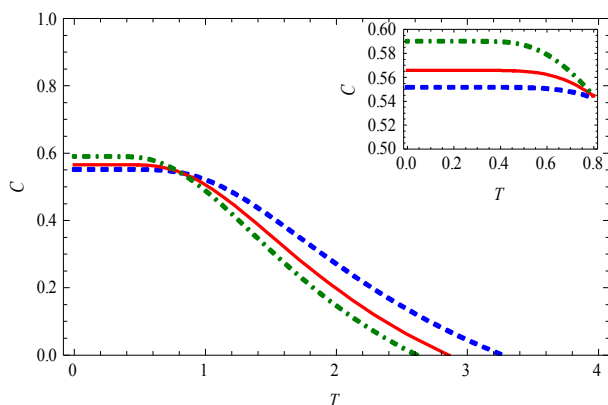
$$\begin{aligned} \mu_{\pm} &= e^{-\beta J_z} \pm (e^{\beta(J-\omega')} \sin^2 \phi + e^{\beta(J+\omega')} \sin^2 \varphi), \\ \xi &= ie^{\beta(J-\omega')} \sin \phi \cos \phi + ie^{\beta(J+\omega')} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{2D_X}{J+J_Z-\omega'}\right), \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{2D_X}{J+J_Z+\omega'}\right), \\ \omega' &= \sqrt{(J+J_Z)^2 + 4D_X^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

ویژه مقادیر ماتریس چگالی سیستم عبارت‌اند از

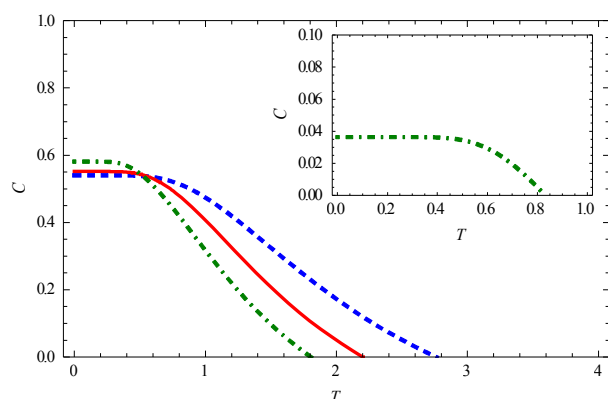
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2e^{-\beta J_z}, \\ \lambda_2 &= 2e^{\beta(J_Z-2J)}, \\ \lambda_{3,4} &= 2e^{\beta J} \sqrt{\frac{[1+2\cosh(2\beta\omega') + 2\cos[2(\phi-\psi)]]}{\mp \cosh(2\beta\omega') \sqrt{\cosh(2\beta\omega') + 2\cos[2(\phi-\psi)]]}}. \end{aligned} \quad (18)$$

به این ترتیب از رابطه تابع توافقی استفاده کرده و نمودار



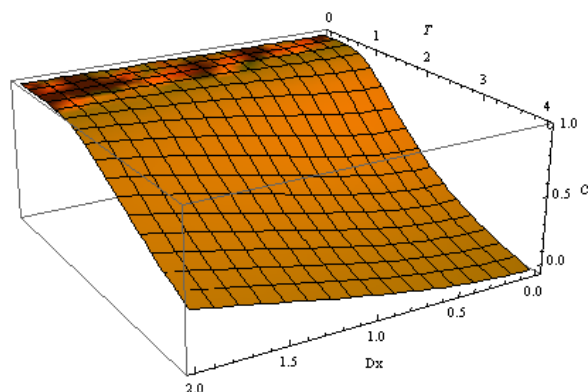


شکل ۱۰. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $X$  به ازای  $t=1$ ،  $\gamma=0.2$ ،  $J_Z=1$  و  $J=1$ . و خط فاصله در  $D_X=1$ ، خط ضخیم  $D_X=0.6$ ، نقطه چین  $D_X=0.2$ .

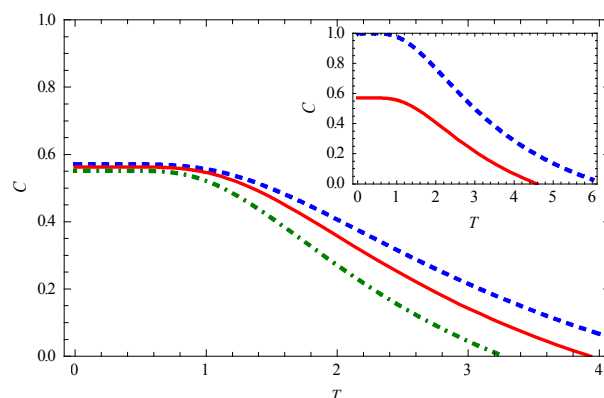


شکل ۱۱. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $X$  به ازای  $t=1$ ،  $\gamma=0.2$ ،  $J_Z=0.2$  و  $J=1$ . و خط فاصله در  $D_X=1$ ، خط ضخیم  $D_X=0.6$ ، نقطه چین  $D_X=0.2$ ، نمودار گوشه سمت راست به ازای  $t=1$ ،  $\gamma=1$ ،  $J_Z=0.2$  و  $J=1$  رسم شده است.

تغییر دادن پارامتری مانند  $J_Z$ ، بیشتر حساس است. پس ما می‌توانیم به این نتیجه برسیم که مؤثرتر است که از پارامتر  $D_X$  برای کنترل درهم‌تندگی استفاده کنیم. همچنین ما درمی‌یابیم که وقتی پارامتر  $J_Z$  برابر یک تنظیم می‌شود، هر دو نمودار شکل ۱ و شکل ۷ مشابه هستند، چراکه در این حالت برهم‌کنش DM دارای پارامترهای غالب کنترل‌کننده رفتار سیستم نیست. این رفتار سیستم را از لحاظ حساس بودن پارامتر  $D_X$  نسبت به پارامتر  $D_Z$  با وجود اتلاف می‌توان آشکارتر مشاهده کرد. در مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ که بیانگر نقش اتلاف در سیستم با پارامتر  $D_Z$  با شکل‌های ۱۰ و ۱۱ که بیانگر نقش اتلاف در



شکل ۸. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $X$  به ازای  $J_Z=1$  و  $J=1$  بر حسب  $D_X$  و  $T$ .



شکل ۹. تغییرات  $C$  بر حسب  $T$  به ازای  $t=1$ ،  $\gamma=0.2$  و  $D_X=1$  و  $J=1$ . خط آبی  $J_Z=3$ ، و خط قرمز  $J=2$  و خط سبز  $J=1$  را نمایش می‌دهد. و نمودار کوچک سمت راست تغییرات تابع توافقی سیستم را نشان می‌دهد، خط چین آبی  $\gamma=0$ ، خط قرمز  $\gamma=0.2$  را نشان می‌دهند.

می‌ماند. آشکار است که تفاوت‌هایی بین دو حالت مختلف وجود دارد. ابتدا اجازه دهید که به شکل‌های ۷ و ۱ و نمودارهای کوچکی که در هر دو شکل قرار دارد، نگاه کنیم. ما درمی‌یابیم که در وضعیتی که تمام پارامترهای دیگر دقیقاً برابر هستند، وقتی دما افزایش می‌یابد  $D_X$  نسبت به  $D_Z$  بیشتر به واقعیت نزدیکتر است. این نمایان می‌سازد که  $D_X$  با افزایش دمای  $T$  با سهولت بیشتری تأثیر می‌پذیرد. و از شکل ۱ و ۷ ما در می‌یابیم که اگر پارامتر  $J_Z$  را بزرگتر انتخاب کنیم، درهم‌تندگی کوانتومی بر حسب  $D_X$  های مختلف به طور آشکارتر نسبت به حالت‌های با پارامتر  $D_Z$  تغییر می‌کند. این به آن معنی است که پارامتر  $D_X$  در طول موقعیت معین با

حالت‌های مختلف بالا می‌پردازیم

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \quad (19)$$

به این ترتیب با داشتن ویژه مقادیر ماتریس چگالی می‌توان به سادگی آنتروپی سیستم دوکیوبیتی در شرایط عدم وجود اتلاف و با وجود اتلاف محاسبه کرد.

#### ۵.۱. پارامتر راستای z جفت شدگی DM

ویژه مقادیر ماتریس چگالی حالت اولیه که با پارامتر  $D_Z$  برهم‌کنش DM همراه است به قرار زیر است.

$$\lambda_1 = e^{-\beta J_Z} / Z, \lambda_2 = e^{-\beta J_Z} / Z, \quad (20)$$

$$\lambda_3 = e^{\beta(\omega - J_Z)} / Z, \lambda_4 = e^{\beta(\omega + J_Z)} / Z.$$

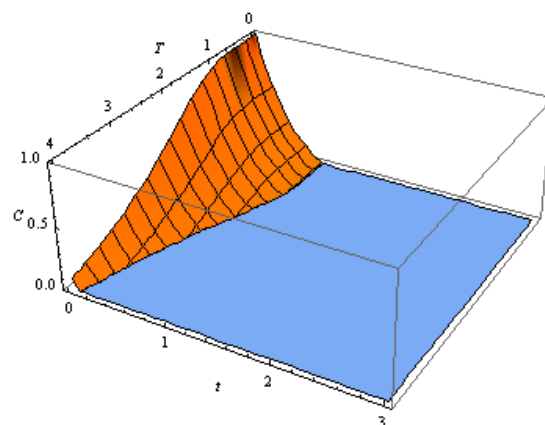
پس با استفاده از رابطه وان نیومن برای آنتروپی به دست می‌آوریم

$$S(\rho) = -\left( -\gamma \text{Log} \left( \frac{e^{\beta J_Z}}{Z} \right) - \text{Log} \left( \frac{e^{\beta(\omega - J_Z)}}{Z} \right) - \text{Log} \left( \frac{e^{\beta(\omega + J_Z)}}{Z} \right) \right), \quad (21)$$

که تغییرات تابع آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی بر حسب دما  $T$  و کمیت‌های برهم‌کنشی از این قرار است.

آنتروپی گرمایی درهم‌تنیدگی در حضور اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط اطراف از این قرار است:

$$S(\rho) = \frac{re^{-\gamma t \gamma}}{\gamma(r+u)} \text{Log} \gamma \left( \frac{re^{-\gamma t \gamma}}{\gamma(r+u)} \right) - \frac{(\gamma - \gamma e^{-\gamma t \gamma})(r+u) + re^{-\gamma t \gamma}}{\gamma(r+u)} \text{Log} \gamma \left( \frac{(\gamma - \gamma e^{-\gamma t \gamma})(r+u) + re^{-\gamma t \gamma}}{\gamma(r+u)} \right) - \frac{e^{-\gamma t \gamma} (-re^{\gamma t \gamma} + re^{\gamma t \gamma} + ue^{\gamma t \gamma} - v)}{\gamma(r+u)} \text{Log} \gamma \left( \frac{e^{-\gamma t \gamma} (-re^{\gamma t \gamma} + re^{\gamma t \gamma} + ue^{\gamma t \gamma} - v)}{\gamma(r+u)} \right) - \frac{e^{-\gamma t \gamma} (-re^{\gamma t \gamma} + re^{\gamma t \gamma} + ue^{\gamma t \gamma} - v)}{\gamma(r+u)} \text{Log} \gamma \left( \frac{e^{-\gamma t \gamma} (-re^{\gamma t \gamma} + re^{\gamma t \gamma} + ue^{\gamma t \gamma} + v)}{\gamma(r+u)} \right). \quad (22)$$

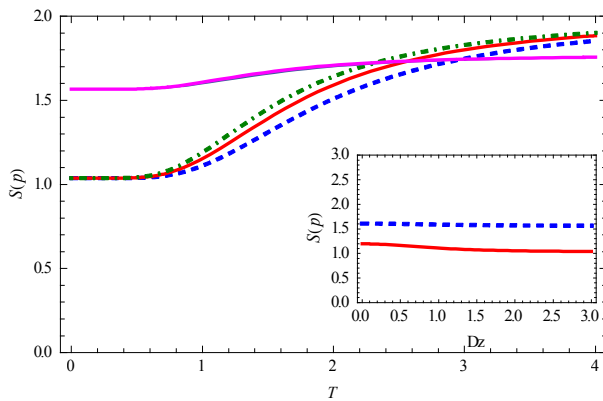


شکل ۱۲. شکل تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفه  $X$  به ازای  $\gamma = 1$ ،  $D_X = 1$ ،  $J_Z = 1$  و  $J = 1$ .

حالت سیستم با پارامتر  $D_X$  است، می‌توان مشاهده کرد به ازای ثابت بودن تمام پارامترهای دیگر، درهم‌تنیدگی کوانتومی نسبت به پارامتر  $D_X$  سریع‌تر تغییر کرده و نسبت به آن حساس‌تر است. نکته دیگری که می‌توان به آن اشاره کرد در تأثیر اتلاف بر هر دو حالت سیستم است که مشاهده می‌کنیم که درهم‌تنیدگی سیستم با پارامتر  $D_X$  سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند. به عبارتی سیستم در این حالت نسبت به اتلاف تأثیرپذیرتر می‌باشد. با مشاهده شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به یک نکته جالب توجه پی می‌بریم و آن هم این است که در حالت سیستم با پارامتر  $D_X$  و به ازای مقادیر کمتر آن، سیستم در نواحی دمایی کمتر از یک درجه مقاومت بیشتری از خود در مقابله با اتلاف نشان می‌دهد و دارای اندازه درهم‌تنیدگی بیشتری نیز می‌باشد، برخلاف این تصور که با  $D_X$  بزرگتر سیستم دارای درهم‌تنیدگی بیشتری خواهد بود. از این رو می‌بینیم که در دماهای کمتر از یک درجه خلاف آن رخ خواهد داشت. همچنین در شکل ۱۱ این حالت را برای یک جفت شدگی قوی بین سیستم و منبع مشاهده می‌کنیم که حالت‌های با  $D_X$  بزرگتر درهم‌تنیدگی‌شان سریعتر مساوی صفر شده حال آنکه برای مقادیر پارامتر  $D_X$  کوچکتر این دیرتر اتفاق می‌افتد.

#### ۵. محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی

با استفاده از رابطه آنتروپی وان نیومن به محاسبه آنتروپی



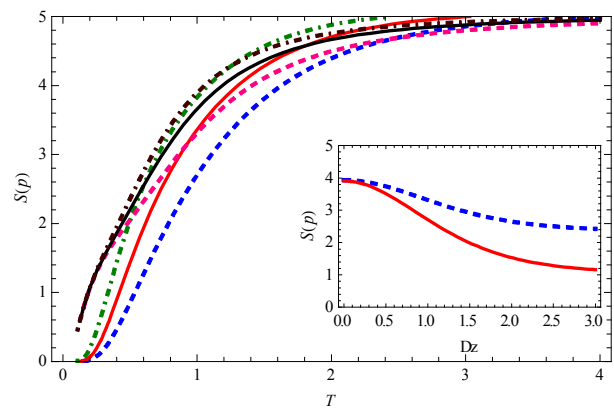
**شکل ۱۴.** تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت  $J_Z = 1$  و  $J = 1$ ،  $\gamma = 0.2$ ، خط چین آبی  $D_Z = 1$ ، خط ضخیم قرمز و سیاه  $D_Z = 0.6$ ، نقطه چین سبز  $D_Z = 0.2$  و گروه بالایی به ازای  $\gamma = 1$  به دست آمده است. نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه را برحسب  $D_Z$  با ضرایب برهم‌کنش متفاوت  $J_Z = 1$  و  $T = 1$ ،  $J = 1$ ، نشان می‌دهد. برای خط چین آبی  $\gamma = 1$  و برای خط ضخیم قرمز  $\gamma = 0.2$  است.

می‌کند. با جفت شدگی ضعیف یعنی به ازای  $\gamma = 0.2$  تفاوت در تغییرات آنتروپی درهم‌تندگی گرمایی به ازای تغییر در پارامترهای مختلف (هرچند کوچک) مختلف دیده می‌شود، اما زمانی که با یک جفت شدگی قوی سروکار داریم، یعنی به ازای  $\gamma = 1$ ، هیچ تفاوتی در تغییرات آنتروپی درهم‌تندگی گرمایی برای پارامترهای مختلف برهم‌کنشی DM یعنی  $D_Z$  و  $J_Z$  دیده نمی‌شود، که بیانگر غالب شدن افت و خیزهای گرمایی بر سیستم کوانتومی است. عملاً سیستم در این حالت ویژگی درهم‌تندگی خود را ازدست داده و شبیه به یک سیستم کلاسیکی رفتار می‌کند.

### ۳.۵. پارامتر راستای X جفت شدگی DM

با استفاده از ویژه مقادیر ماتریس چگالی سیستم با پارامتر  $X$  برهم‌کنش DM می‌توان آنتروپی درهم‌تندگی گرمایی را به شکل زیر به دست آورد:

$$S(p) = -\left(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+ + \nu_+}\right) \text{Log}_\gamma\left(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+ + \nu_+}\right) - \left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\mu_+ + \nu_+}\right) \text{Log}_\gamma\left(\frac{\nu_+ + \nu_-}{\mu_+ + \nu_+}\right)$$



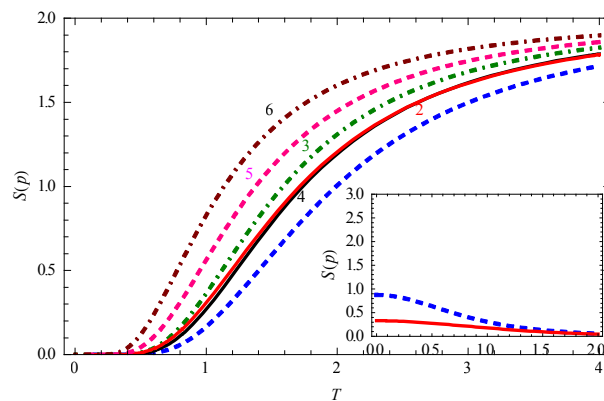
**شکل ۱۳.** تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت  $J_Z = 1$  و  $J = 0.2$ ، خط چین آبی و صورتی  $D_Z = 1$ ، خط ضخیم قرمز و سیاه  $D_Z = 0.6$ ، نقطه چین سبز و قهوه‌ای  $D_Z = 0.2$  (خط‌های پایین متعلق به  $J_Z = 1$  است). نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب  $D_Z$  را با ضرایب برهم‌کنش متفاوت  $T = 1$  و  $J = 1$ ، نشان می‌دهد. برای خط چین آبی  $J_Z = 0.2$  و برای خط ضخیم قرمز  $J_Z = 1$  است.

### ۲.۵. نتیجه و بحث

همان‌طور که از نمودار ۱۳ مشخص می‌شود هرچقدر مقدار پارامتر  $Z$  برهم‌کنش DM یعنی  $D_Z$  بیشتر باشد مقدار آنتروپی درهم‌تندگی گرمایی مقدار کمتری خواهد داشت. در نمودار ۱۳ (نمودار کوچک سمت راست) تحول آنتروپی گرمایی برحسب پارامتر  $D_Z$  نمایش داده شده است، که گفته بالا را به طور آشکار ثابت می‌کند. در این نمودار همچنین تأثیر پارامتر  $J_Z$  در تغییر آنتروپی و درهم‌تندگی کوانتومی به شکل آشکاری مشخص است. در حقیقت می‌بینیم که با افزایش  $J_Z$  در اندازه آنتروپی درهم‌تندگی گرمایی به شکل محسوسی تغییر دیده می‌شود. خطوط تغییرات آنتروپی با افزایش  $D_Z$  در به ازای  $J_Z$ ‌های مختلف جدایی زیادی از هم خواهند داشت. اما در حالتی که سیستم تحت اتلاف قرار دارد این جدایی کاهش یافته و تأثیر پارامتر در تغییر آنتروپی گرمایی به طور محسوسی کاهش یافته که این مطلب در نمودار ۱۴ (نمودار کوچک سمت راست) آشکارا دیده می‌شود. همچنین در شکل ۱۴ مشاهده می‌کنیم که بسته به نوع جفت شدگی که بین سیستم و محیط اطرافش وجود خواهد داشت تأثیر این پارامترهای مختلف تغییر

۴.۵. نتیجه و بحث

از نمودار ۱۵ مشخص است که با افزایش دما مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی نیز افزایش می‌یابد. می‌توان مشاهده کرد هرچقدر مقدار پارامتر برهم‌کنش DM یعنی  $J_Z$ ،  $D_X$  بیشتر باشد مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی مقدار کمتری خواهد داشت. در نمودار ۱۵ (نمودار کوچک سمت راست) تحول آنتروپی گرمایی بر حسب پارامتر  $D_Z$  نمایش داده شده است که گفته بالا را به طور آشکار ثابت می‌کند و نکته قابل توجه که از این نمودار برداشت می‌شود این است که زمانی که  $D_X$  افزایش می‌یابد تفاوت تأثیر مقادیر مختلف  $J_Z$  بروی آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی از بین رفته و مقادیر متفاوت  $J_Z$  یک نتیجه یکسان برای آنتروپی گرمایی سیستم به همراه دارند. این بیانگر آن است که در مقادیر بزرگتر پارامترها نقش  $D_X$  به مراتب مهم‌تر از پارامترهای دیگر است. از این رو همان‌طور که در بخش قبل در مورد تابع توافق دیدیم، پارامتر  $D_X$  به واقعیت نزدیکتر بوده و حساسیت بیشتری دارد و لذا برای تغییر در میزان درهم‌تنیدگی سیستم پارامتر مناسب‌تری است. همانند قبل در این نمودار نیز تأثیر پارامتر  $J_Z$  در تغییر آنتروپی و درهم‌تنیدگی کوانتومی به شکل آشکاری مشخص است. در حقیقت می‌بینیم که با افزایش  $J_Z$  در اندازه آنتروپی و درهم‌تنیدگی گرمایی به شکل محسوسی تغییر دیده می‌شود. خطوط تغییرات آنتروپی با افزایش  $D_Z$  به ازای  $J_Z$ ‌های مختلف جدایی زیادی از هم خواهند داشت. اما در حالتی که سیستم تحت اتلاف قرار دارد این جدایی کاهش یافته و تأثیر پارامتر در تغییر آنتروپی گرمایی به طور محسوسی کاهش می‌یابد؛ این مطلب در نمودار ۱۶ آشکارا دیده می‌شود. همچنین در شکل ۱۴ مشاهده می‌کنیم که بسته به نوع جفت شدگی که بین سیستم و محیط اطرافش وجود خواهد داشت، تأثیر این پارامترهای مختلف تغییر می‌کند. با جفت شدگی ضعیف، یعنی به ازای  $\gamma = 0.2$ ، تفاوت در تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی به ازای تغییر در پارامترهای مختلف (هرچند کوچک) مختلف دیده می‌شود. اما زمانی که با یک جفت شدگی قوی سر و کار داریم، یعنی به ازای  $\gamma = 1$ ، هیچ تفاوتی در تغییرات



شکل ۱۵. تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما  $T$  با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت  $J=1$ ، خط ۱:  $J_Z=1$  و  $D_X=1$ ، خط ۲:  $J_Z=1$  و  $D_X=0.6$ ، خط ۳:  $J_Z=1$  و  $D_X=0.2$ ، خط ۴:  $J_Z=0.2$  و  $D_X=1$ ، خط ۵:  $J_Z=0.2$  و  $D_X=0.6$ ، خط ۶:  $J_Z=0.2$  و  $D_X=0.2$ . نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه را برحسب  $D_X$  با ضرایب برهم‌کنش متفاوت  $T=1$  و  $J=1$ ، نشان می‌دهد. برای خط چین آبی  $J_Z=0.2$  و خط ضخیم قرمز  $J_Z=1$  است.

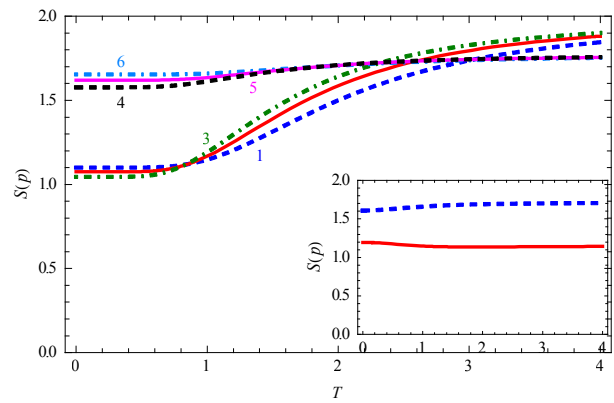
$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{2}(\mu_+ - \mu_- + \nu_+ - \nu_-)}{2(\mu_+ + \nu_+)} \\
 & -\frac{\sqrt{(\mu_- - \mu_+ + \nu_+ - \nu_-)^2 - 4(-4\xi^2 - \nu_- \mu_+ + \nu_- \mu_- - \mu_- \nu_+ + \nu_+ \mu_+)}}{2(\mu_+ + \nu_+)} \\
 & \times \text{Log}_2 \left( \frac{\sqrt{2}(\mu_+ - \mu_- + \nu_+ - \nu_-)}{2(\mu_+ + \nu_+)} \right. \\
 & \left. -\frac{\sqrt{(\mu_- - \mu_+ + \nu_+ - \nu_-)^2 - 4(-4\xi^2 - \nu_- \mu_+ + \nu_- \mu_- - \mu_- \nu_+ + \nu_+ \mu_+)}}{2(\mu_+ + \nu_+)} \right) \\
 & -\frac{\sqrt{2}(\mu_+ - \mu_- + \nu_+ - \nu_-)}{2(\mu_+ + \nu_+)} \\
 & +\frac{\sqrt{(\mu_- - \mu_+ + \nu_+ - \nu_-)^2 - 4(-4\xi^2 - \nu_- \mu_+ + \nu_- \mu_- - \mu_- \nu_+ + \nu_+ \mu_+)}}{2(\mu_+ + \nu_+)} \\
 & \times \text{Log}_2 \left( \frac{\sqrt{2}(\mu_+ - \mu_- + \nu_+ - \nu_-)}{2(\mu_+ + \nu_+)} \right. \\
 & \left. +\frac{\sqrt{(\mu_- - \mu_+ + \nu_+ - \nu_-)^2 - 4(-4\xi^2 - \nu_- \mu_+ + \nu_- \mu_- - \mu_- \nu_+ + \nu_+ \mu_+)}}{2(\mu_+ + \nu_+)} \right). \tag{22}
 \end{aligned}$$

در صورتی که سیستم تحت اتلاف ناشی از برهم‌کنش بین سیستم و محیط اطراف آن باشد آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی شکل پیچیده‌ای خواهد گرفت و لذا آن را در اینجا درج نخواهیم کرد و تنها به رسم نمودارها و مقایسه آنها با حالت بدون اتلاف بسنده می‌کنیم.

نقاط مقدار محدودی داشته باشد، چرا که همبستگی‌ها در چنین شبکه‌های اسپینی به طور نمایی افت می‌کنند. در نقاط بحرانی، همبستگی‌ها روی تمام پارامترهای طولی سیستم افزایش می‌یابند، و عامل فیزیکی این همبستگی‌ها، که درهم‌تندگی کوانتومی می‌باشد، بایستی تحول مشابهی در این نقاط داشته باشد. یک گذار بنیادی در درهم‌تندگی سیستم در این نقاط اتفاق می‌افتد؛ به این معنی که در نقاط بحرانی حالت سیستم غیرموضعی خواهد بود. اگر این تصویر فیزیکی درست باشد، بایستی در نقاط بحرانی به دلیل وجود درهم‌تندگی در سیستم، شواهدی از افزایش درهم‌تندگی در تمام پارامترهای سیستم دیده شود.

نشان داده شده است که ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و مشتقاتش، که غیر تحلیل بودن آن یک گذار فاز کوانتومی را مشخص می‌کند، به طور مستقیم با اندازه درهم‌تندگی دو قسمتی سیستم ارتباط دارند. همان‌طور که قبلاً گفته شد گذار فاز کوانتومی در دمای  $T=0$  اتفاق می‌افتد، به این دلیل گذارهای فاز کوانتومی فقط از افت و خیزهای کوانتومی ناشی می‌شوند. در اکثر موارد این گذار فازها به وجود نقاط غیر تحلیلی در طیف انرژی سیستم مربوط می‌شوند. به طوری که گذارهای فاز کوانتومی با رفتار غیر تحلیلی در مشتق‌های انرژی حالت پایه سیستم مشخص می‌شوند. از این رو مشاهده شده است که یک گذار فاز کوانتومی مرتبه اول توسط یک ناپیوستگی محدود در مشتق مرتبه اول انرژی حالت پایه سیستم تشخیص داده می‌شود. به همین ترتیب یک گذار فاز کوانتومی مرتبه دوم با ناپیوستگی محدود و یا یگ و اگرایبی در مشتق مرتبه دوم انرژی حالت پایه سیستم، و با فرض اینکه مشتق مرتبه اول پیوسته باشد، مشخص می‌شود [۵۲ و ۵۳].

تعیین موقعیت‌های که سیستم ماده چگال رفتار مکانیک کوانتومی خواهد داشت از اهمیت بالایی برخوردار است. وقتی یک سیستم در حالت پایه‌اش قرار دارد اثرات کوانتومی مانند گذار فاز کوانتومی به طور معینی اهمیت پیدا می‌کند، در فضای پارامترها، خواص سیستم کوانتومی برای دماهای نزدیک دمای صفر، متاثر از نزدیکی به نقاط کوانتومی بحرانی



شکل ۱۶. تغییرات انرژی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما  $T$  با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت  $t=1$ ،  $\gamma=0.2$  و  $J=1$ ، خط ۱:  $J_Z=1$  و  $D_X=1$ ، خط ۲:  $J_Z=1$  و  $D_X=0.6$ ، خط ۳:  $J_Z=1.3$  و  $D_X=0.2$ ، خط ۴ و خط ۵ به  $\gamma=1$  ازای به دست آمده است. نمودار کوچک سمت راست تغییرات انرژی گرمایی سیستم اولیه را برحسب  $D_X$  با ضرایب برهم‌کنش متفاوت  $T=1$  و  $J=1$ ، و نشان می‌دهد. برای خط چین آبی  $J_Z=0.2$  و برای خط ضخیم قرمز  $J_Z=1$  است.

آنتروپی درهم‌تندگی گرمایی برای پارامترهای مختلف برهم‌کنشی DM یعنی  $D_Z$  و  $J_Z$  دیده نمی‌شود، که این بیانگر غالب شدن افت و خیزهای گرمایی بر سیستم کوانتومی است و عملاً سیستم در این حالت ویژگی درهم‌تندگی خود را از دست داده و شبیه به یک سیستم کلاسیک خواهد شد.

### ۶. گذار فاز کوانتومی و درهم‌تندگی

یکی از نکات کلیدی به دست آمده، نقشی است که درهم‌تندگی در گذار فاز کوانتومی ایفا می‌کند [۵۲]، به طوری که حالت سیستم در نقاط بحرانی به شدت درهم‌تندگی است. سیستم فیزیکی را می‌توان در نزدیکی نقاط بحرانی، در جملاتی برحسب درهم‌تندگی، که خود تابعی از پارامترهای مختلف آن سیستم است، نمایش داد. وقتی سیستم به نقاط بحرانی نزدیک می‌شود، ساختار درهم‌تندگی سیستم کوانتومی در حالت پایه دستخوش یک گذار قرار می‌گیرد. تغییر در اندازه درهم‌تندگی سیستم چگونگی این گذار را تعیین می‌کند. درهم‌تندگی بین اسپین‌ها در یک شبکه، به غیر از نقاط بحرانی بایستی در سایر

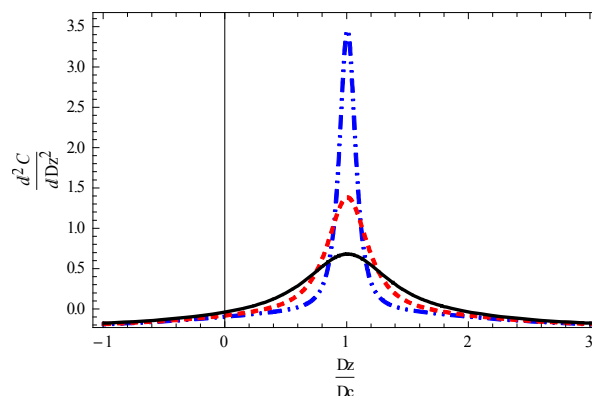
### ۶.۱. پارامتر راستای $z$ جفت شدگی DM

نمودار تغییرات مشتق تابع توافق از این قرار است. نمودارها برای حالتی که سیستم دارای اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط است به دست آمده، ضریب ثابت جفت شدگی سیستم با محیط را برابر با  $\gamma = 0.2$  گرفتیم، که بیانگر یک جفت شدگی ضعیف بین سیستم و محیط است.

### ۶.۲. نتیجه و بحث

با استفاده از نمودارها به بررسی تأثیر پارامترهای برهم‌کنش DM روی گذار فاز کوانتومی، با عدم وجود اتلاف و وجود آن می‌پردازیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شود در نقاط بحرانی که گذار فاز کوانتومی انجام می‌شود، مقدار درهم‌تنیدگی بیشینه خود را دارا می‌باشد. همچنین توضیح داده شد که مشتق تابع توافق سیستم در نقاط بحرانی دارای ناپوستگی و یا به عبارتی دیگر دارای یک واگرایی می‌باشد. شکل ۱۷ مشتق دوم تابع توافق سیستم، که رابطه تنگاتنگی با انرژی حالت پایه سیستم دارد، را نشان می‌دهد. با مشاهده شکل ۱۷ پی می‌بریم که مشتق مرتبه دوم تابع توافق یک ناپوستگی، و یا واگرایی، را در فضای پارامتری که بر حسب  $Dz$  رسم شد، نشان می‌دهد که همان‌طور که گفته شد یک گذار فاز کوانتومی مرتبه دوم را به نمایش می‌گذارد. وجود تکینگی در مشتق‌های تابع توافق شرط کافی برای وجود نقطه بحرانی و یا گذار فاز کوانتومی در سیستم فیزیکی محسوب می‌شود [۵۲]. بنابراین در این نمودار به خوبی این تکینگی را در نقطه صفر شاهد هستیم؛ این بیانگر یک گذار فاز کوانتومی مرتبه دوم در سیستم است. که همان‌طور که گفته شد، بیانگر یک گذار فاز کوانتومی از نل گاف‌دار یا فاز پادفرومغناطیس (AFM) به فاز مایع لوتینگر گاف‌دار (LL) در نقطه بحرانی می‌باشد. نکته جالب توجه دیگری که از این نمودار قابل برداشت است، تأثیر قابل توجه پارامتر  $Jz$  در اندازه مقدار بیشینه این تکینگی می‌باشد به طوری که با بزرگتر شدن آن، مقدار بیشینه این تکینگی در مشتق دوم تابع توافق کاهش می‌یابد.

اما در نمودار ۱۸ می‌توان یکی از اکستریم‌های نسبی مشتق



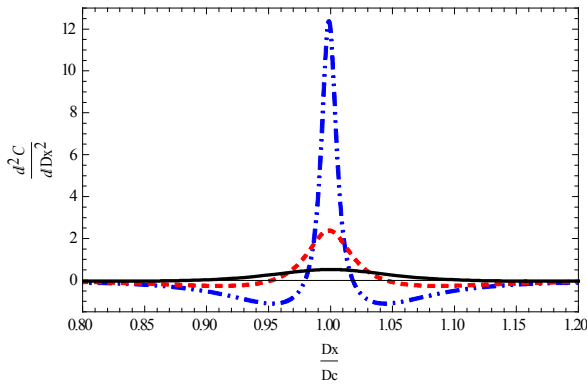
شکل ۱۷. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق برحسب  $Dz$  به ازای  $Jz = 0.1$ ، خط نقطه چین آبی  $Jz = 0.1$ ، خط چین قرمز  $Jz = 0.25$ ، و خط پررنگ سیاه  $Jz = 0.5$ .  $Dc = 1$  بیانگر نقطه بحرانی می‌باشد.

می‌باشد [۱۵ و ۱۶]. از نظر عملی بسیار جالب خواهد بود که اثرات نزدیک شدن به نقاط بحرانی را به درهم‌تنیدگی حالت آمیخته در حالت گرمایی ارتباط دهیم. در نتیجه ما برای بررسی کردن این موضوع، مشتق درهم‌تنیدگی حالت پایه را که با تابع توافق نمایش داده می‌شود، در حضور دماهای غیر صفر محاسبه و تحولات آن را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از نمودار تغییرات اندازه درهم‌تنیدگی و مشتق‌های آنها، که بیانگر طیف انرژی حالت پایه است، و با استفاده از تفسیری که در بالا از رابطه نقاط غیر تحلیلی سیستم در حالت پایه با گذار فاز کوانتومی ارائه دادیم، وجود گذار فاز کوانتومی را در سیستم، در غیاب و وجود اتلاف کوانتومی، برای پارامتر مختلف برهم‌کنشی بررسی می‌کنیم. لازم به ذکر است که سیستم دارای یک گذار فاز کوانتومی از نل گاف دار<sup>۱</sup> یا فاز پادفرومغناطیس (AFM) به فاز مایع لوتینگر گاف دار<sup>۲</sup> (LL) در نقطه بحرانی  $Dc = 1$  می‌باشد [۵۴].

نمودار مشتق تابع توافق سیستم بر حسب پارامترهای برهم‌کنش DM یعنی  $Dz$  و  $Dx$  در حالت‌های مختلف برحسب مقادیر متفاوت این کمیت‌ها و همچنین تأثیر اتلاف بر روی این تحولات را بررسی خواهیم کرد.

۱. Gapped Neel

۲. Gapless Luttinger Liquid

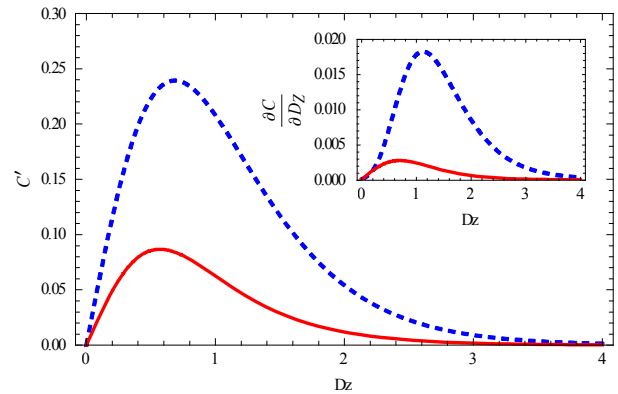


شکل ۲۰. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق برحسب  $D_X$  به ازای  $J_Z = 0.1$ ، خط نقطه چین آبی  $J_Z = 0.1$ ، خط چین قرمز  $J_Z = 0.25$ ، و خط پررنگ سیاه  $J_Z = 0.5$  است.  $D_c = 1$  بیانگر نقطه بحرانی می‌باشد.

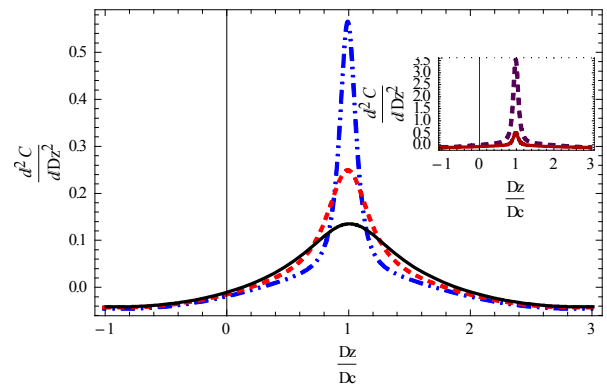
نمودار کوچک گوشه بالا سمت راست شکل ۱۷ نیز مشاهده کرد، که در آن اتلاف به طور آشکاری باعث کاهش اندازه بیشینه اکستریم‌های نسبی تابع توافق سیستم می‌شود، ولی با این وجود یک بیشینه نسبی با اندازه کمتر برای تابع توافق سیستم وجود خواهد داشت. همچنین تأثیر اتلاف را روی تکنیکی‌های مشتق دوم تابع توافق برای حالت‌های مختلف در شکل ۱۹ مشاهده می‌کنیم، همان‌طور که انتظار داریم در نتیجه برهم‌کنش سیستم با محیط اطراف مقدار بیشینه این تکنیکی‌های سیستم کاهش می‌یابد، اما نکته قابل توجه این است که با وجود اتلاف در سیستم، این تکنیکی‌های مشتق مرتبه دوم همچنان باقی می‌مانند، که بیانگر این است که اگرچه در نتیجه اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط در سیستم، مقدار بیشینه این تکنیکی‌ها، واگرایی‌ها، کاهش می‌یابد، اما با این حال سیستم همچنان دارای نقطه بحرانی بوده و گذار فاز کوانتومی در سیستم رخ خواهد داد. در تصویر الحاقی شکل ۱۹ مقایسه بین این تکنیکی‌ها را در حالت بودن اتلاف و وجود اتلاف مشاهده می‌کنیم.

### ۳.۶. پارامتر راستای x جفت شدگی DM

نمودار تغییرات مشتق تابع توافق به شکل زیر خواهد بود (شکل ۲۰، ۲۱ و ۲۲). نمودارهای حالت اتلافی به ازای  $\gamma = 0.2$  رسم شده‌اند.



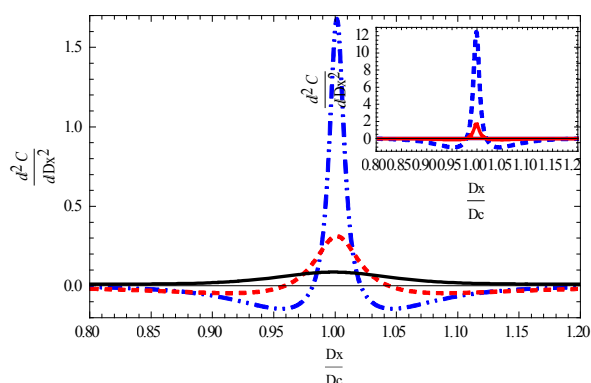
شکل ۱۸. تغییرات مشتق اول تابع توافق برحسب پارامتر  $D_Z$ ، نمودار با در نظر گرفتن  $t=1$ ،  $\gamma=0.2$ ،  $T=1$  و  $J=1$  برای خط چین بالای  $J_Z=0.2$  و برای خط ضخیم پایینی  $J_Z=1$  به دست آمده است. نمودار اصلی تغییرات را در غیاب اتلاف و نمودار دوم (گوشه سمت راست) با وجود اتلاف نشان می‌دهد.



شکل ۱۹. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق با وجود اتلاف برحسب  $D_Z$  به ازای  $J=0.1$ ، خط نقطه چین آبی  $J_Z=0.1$ ، خط چین قرمز  $J_Z=0.25$ ، و خط پررنگ سیاه  $J_Z=0.5$ . شکل الحاقی گوشه سمت راست حالت اتلافی (خط پررنگ) و غیر اتلافی (خط چین) را با هم مقایسه می‌کند.  $D_c = 1$  بیانگر نقطه بحرانی می‌باشد.

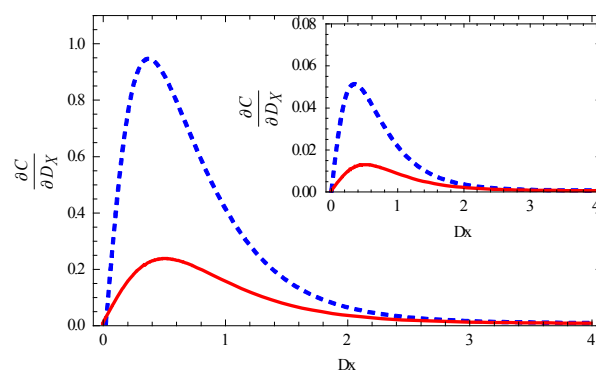
مرتبه اول تابع توافق را مشاهده کرد، با رسم نمودار برای مشتق مرتبه اول تابع توافق می‌بینیم که در آن نقطه تکنیکی وجود ندارد. به عبارت دیگر هیچ گذار فاز کوانتومی مرتبه اولی برای سیستم وجود ندارد، اما در اینجا نیز تأثیر معکوس پارامتر  $J_Z$  در اندازه مقدار بیشینه اکستریم‌های نسبی تابع توافق را شاهد هستیم، به طوری که سیستم با  $J_Z$  بزرگتر دارای مقدار بیشینه نسبی کوچکتری می‌باشد. از طرف دیگر می‌توان تأثیر اتلاف بر روی اکستریم‌های نسبی تابع توافق را در تصویر الحاقی





**شکل ۲۲.** نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق برحسب  $D_X$  به ازای  $J_z = 0.1$ ، خط نقطه چین آبی  $J_z = 0.1$ ، خط چین قرمز  $J_z = 0.5$ ، و خط پرنرنگ سیاه  $J_z = 0.5$ . شکل الحاقی گوشه سمت راست حالت اتلافی (خط پرنرنگ) و غیر اتلافی (خط چین) را با هم مقایسه می‌کند.  $D_c = 1$  بیانگر نقطه بحرانی می‌باشد.

هستیم که پارامتر  $D_X$  نسبت به  $D_Z$  تأثیرگذارتر بوده و مقدار قله بیشتری را برای واگرایی در مشتق مرتبه دوم تابع توافق به همراه دارد. اندازه این تکینگی‌ها برای پارامترهای  $D_X$  نسبت به  $D_Z$  بیشتر می‌باشد. اکستریم‌های نسبی مشتق اول تابع توافق نیز برای این حالت از پارامتر برهم‌کنشی در شکل ۲۱ رسم شده است، که هیچ‌گونه گذار فاز کوانتومی مرتبه اولی را نشان نمی‌دهد. تأثیر اتلاف بروی اکستریم‌ها نیز در تصویر الحاقی، نمودار کوچک گوشه بالا سمت راست شکل ۱۹ مشاهده می‌شود که مانند حالت قبلی اتلاف باعث کاهش اندازه این اکستریم‌ها می‌شود. همانند حالت قبلی نکته دیگری که از شکل ۲۰ و ۲۲ می‌توان به دست آورد، تأثیر معکوس پارامتر  $J_z$  در اندازه قله تکینگی مشتق دوم تابع توافق سیستم می‌باشد. به طوری که سیستم با  $J_z$  بزرگتر دارای مقدار قله کوچکتری برای این واگرایی‌ها می‌باشد. و البته تأثیر آن در این تغییر (اندازه قله) برای پارامتر برهم‌کنشی  $D_X$  بسیار بیشتر می‌باشد. از طرفی دیگر می‌توان تأثیر اتلاف بر روی این نقاط بحرانی را در شکل ۲۲ مشاهده کرد، که به طور آشکاری اتلاف باعث کاهش پیک واگرایی مشتق دوم تابع توافق سیستم می‌شود، ولی با این وجود این واگرایی همچنان در سیستم باقی می‌ماند. تصویر الحاقی شکل ۲۲ تکینگی‌ها را در غیاب اتلاف و وجود اتلاف با هم مقایسه می‌کند.



**شکل ۲۱.** خط چین آبی  $J_z = 0.2$  و خط قرمز  $J_z = 1$ . نمودار به ازای مقادیر  $T = 1$  و  $t = 1$  به دست آمده است. نمودار گوشه سمت راست حالت اتلافی را به ازای  $\gamma = 0.2$  نشان می‌دهد.

#### ۴. نتیجه و بحث

نمودارهای ۲۰، ۲۱ و ۲۲ تأثیر پارامتر  $D_X$  برهم‌کنش DM را روی گذار فاز کوانتومی، با عدم وجود اتلاف و وجود آن، آشکارا نشان می‌دهد. با توجه به اینکه در نقاط بحرانی که گذار فاز کوانتومی انجام می‌شود یک ناپیوستگی در مشتق تابع توافق وجود دارد، شکل ۲۰ این تکینگی‌ها، واگرایی‌ها را در مشتق مرتبه دوم تابع توافق سیستم به وضوح نشان می‌دهد، همان‌طور که قبلاً اشاره شد وجود ناپیوستگی (تکینگی) و یا واگرایی در مشتق‌های طیف انرژی حالت پایه، دلیلی بر وجود گذار فاز کوانتومی می‌باشد [۵۲]. وجود درهم‌تنیدگی در سیستم در بیشتر موارد از طریق طیف انرژی حالت پایه سیستم مشخص می‌شود و این دو به شدت به هم وابسته هستند از این رو اندازه درهم‌تنیدگی که در این مقاله با تابع توافق تفسیر می‌شود، معرف انرژی حالت پایه سیستم نیز می‌باشد پس هرگونه تکینگی و ناپیوستگی در تابع توافق سیستم مبین ناپیوستگی و واگرایی در انرژی حالت پایه سیستم می‌باشد. شکل ۲۰ وجود واگرایی در انرژی حالت پایه را به خوبی نشان می‌دهد، از این رو یک گذار فاز کوانتومی مرتبه دوم را در سیستم‌های با این نوع برهم‌کنش و با این پارامتر برهم‌کنشی خاص شاهد هستیم که یک گذار فاز کوانتومی از نل گاف‌دار یا فاز پادفرومغناطیس (AFM) به فاز مایع لوتینگر گاف‌دار (LL) در نقطه بحرانی می‌باشد. اما تفاوتی که در این حالت با حالت قبلی وجود دارد این است که اگر قله تکینگی را معرف تأثیرگذاری پارامتر در گذار فاز کوانتومی در نظر بگیریم، از نمودار ۲۰ شاهد



## مراجع

23. M R Gallis, *Phys. Rev. A* **53** (1996) 655.
24. S Habib *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4660.
25. W V Liu and W C Schieve, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 3278.
26. S Gao, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 3101.
27. A K Rajagopal, *Physica A* **253** (1998) 271.
28. G Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **48** (1976) 119.
29. V Gorini *et al.*, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 821.
30. A K Kolezhuk, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 318.
31. S Yamamoto, *Phys. Rev. B* **55** (1997) 3603.
32. J Dukelsky and S Pittel, *Phys. Rev. B* **56** (1997) 10770.
33. S S Aplesnin, *Phys. Rev. B* **61** (2000) 6780.
34. H Onishi and S Miyashita, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 014405.
35. Y Narumi, M Hagiwara, M Kohno, and K Kindo, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 324.
36. L Capriotti, F Becca, S Sorella, and A Parola, *Phys. Rev. B* **67** (2003) 172404.
37. N Maeshima, K Okunishi, K Okamoto, and T Sakai, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 127203.
38. S-S Gong and G Su, *Phys. Rev. B* **78** (2008) 104416.
39. T Fukui and N Kawakami, *Phys. Rev. B* **57** (1998) 398.
40. J Almeida, M A Martin-Delgado, and G Sierra, *Phys. Rev. B* **76** (2007) 184428.
41. E Canevet *et al.*, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 132404.
42. T J Osborne and M A Nielsen, *Quantum Inf Process* **1** (2002) 45.
43. I Dzyaloshinsky, *J. Phys. Chem. Solids* **4** (1958) 241; T Moriya, *Phys. Rev.* **120** (1960) 91.
44. X G Wang, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 044305.
45. Y Sun *et al.*, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 044301.
46. G F Zhang and S S Li, *Phys. Rev. A* **72** (2005) 034302.
47. M C Arnesen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 017901.
48. M Asoudeh and V Karimipour *Phys. Rev. A* **71** (2005) 022308.
49. D Gunlycke *et al.*, *Phys. Rev. A* **64** (2001) 042302.
50. M A Nielsen, arXiv:quant-ph/0011036.
51. H Ollivier and W H Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2001) 017901.
52. A Osterloh, L Amico, G Falci, and R Fazio, *Nature* **416** (2002) 608
53. L E Reichl, "A Modern Course in Statistical Physics", John Wiley & Sons, New York (1998).
54. M R Soltani, S MahdaviFar, A Akbari, and A A Masoudi, *J. Supercond. Nov. Magn.* **23** (2010) 1369.
1. M A Nielsen and I L Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Cambridge University press (2000).
2. C H Bennett, G Brassard, C Crepeau, R Jozsa, A Peres, and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
3. D Bouwmeester, J W Pan, K Mattle, M Eibl, H Weinfurter, and A Zeilinger, *Nature* **390** (1997) 575.
4. D Boschi, S Branca, F De Martini, L Hardy, and S Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1121.
5. A Furusawa, J L Sorensen, S L Braunstein, C A Fuchs, H J Kimble, and E S Polzik, *Science* **282** (1998) 706.
6. C H Bennett and S J Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2881.
7. A K Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 661.
8. H J Briegel and R Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 910; R Raussendorf and H J Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5188.
9. C H Bennett, D P Di Vincenzo, J A Smolin, and W K Wootters, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 3824.
10. C H Bennett, H J Bernstein, S Popescu, and B Schumacher, *Phys. Rev. A* **53** (1996) 2046.
11. P Štelmachovič and V Bužek, *Phys. Rev. A* **70** (2004).
12. A Hutton and S Bose, *Phys. Rev. A* **69** (2004) 042312.
13. D Braun *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 277901.
14. F Benatti *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 070402.
15. S Sachdev, "Quantum phase transitions", Cambridge University Press, (1999).
16. S L Sondhi, S M Girvin, J P Carini, and D Shahar, *Rev. Modern Phys.* **69** (1997) 315.
17. D A Lidar, D Bacon, and K B Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 4556; D P Di Vincenzo *et al.*, *Nature* **408** (2000) 339; L F Santos, *Phys. Rev. A* **67** (2003) 062306.
18. B E Kane, *Nature* **393** (1998) 133.
19. D Loss and D P Di Vincenzo, *Phys. Rev. A* **57** (1998) 120; G Burkard, D Loss, and D P Di Vincenzo, *Phys. Rev. B* **59** (1999) 2070; B Trauzettel *et al.*, *Nature Phys.* **3** (2007) 192.
20. T Senthil *et al.*, *Phys. Rev. B* **60** (1999) 4245; M Nishiyama *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 047002.
21. A Sørensen and K Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 2274.
22. S Hill and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 5022; W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2245.