مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۲، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۹۱

درهم‌تنیدگی کوانتومی و گذار فاز کوانتومی تحت اتلاف در مدل ناهمسانگرد هایزنبرگ XXZ با برهم‌کنش ژیالوسینکی- موریا

رضا افضلی، محسن صالح کوتاهی و جلال سبحانی

دانشکدهٔ علوم، گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

پست الکترونیکی: afzali@kntu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۱۲/۱۰ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۱/۵/۱۸)

چکیده

از آنجا که درهم‌تنیدگی یک مقولهٔ کلیدی در اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی محسوب می‌شود، بررسی اثرات محیط به عنوان یک منبع اتلاف کوانتومی بر میزان درهم‌تنیدگی و نقشی که جفت شدگی بین سیستم و محیط در تغییرات درهم‌تنیدگی کوانتومی و در نتیجهٔ گذار فاز کوانتومی دارد، بسیار مهم خواهد بود. در این مقاله، یک سیستم دوکیوبیتی در مدل ناهمسانگرد هایزنبرگ XXZ را که دارای برهم‌کنش ژیالوسینکی- موریا است، با در نظر گرفتن اتلاف کوانتومی با استفاده از دینامیک لیندبلد در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است این مدل به صورت گسترده‌ای در کارهای اپتیکی و ماده چگال مورد استفاده قرار می‌گیرد. اثر جفت شدگی بین سیستم و محیط و نیز اثر دما را بر تابع توافق سیستم، که در اینجا به عنوان شاخصی برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی سیستم استفاده می‌شود، به دست می‌آوریم و نقشی را که پارامترهای برهم‌کنشی DM در تحول درهم‌تنیدگی بازی می‌کنند مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین با استفاده از مشتق تابع توافق، تأثیر اتلاف و پارامترهای برهم‌کنش DM را در گذار فاز کوانتومی به دست می‌آوریم. لازم به ذکر است بر هم کنش اسپین- مدار که نقش خود را از طریق پارامتر DM نشان می‌دهد تأثیر بسزایی بر روند اثر اتلاف بر میزان درهم‌تنیدگی و گذار فاز کوانتومی سیستم دارد. این نتایج در مباحث سیستم‌های کوانتومی در ابعاد نانو دارای اهمیت زیادی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: نظریهٔ کوانتومی اتلاف، درهم‌تنیدگی کوانتومی، گذار فاز کوانتومی

۱. مقدمه

درهم‌تنیدگی یک خصیصهٔ بنیادیی مکانیک کوانتومی است که تفاوت اساسی بین فیزیک کلاسیکی و کوانتومی را تعیین و مشخص می‌کند. حالت‌های در هم تنیده بیانگر نوعی همبستگی کوانتومی غیر موضعی بین زیر سیستم‌ها بوده [۱] و شالودهٔ اساسی برای بسیاری از کاربردهای علوم اطلاعات کوانتومی که شامل دورحضوری کوانتومی[۱] [۲ و ۵]، کد نویسی متراکم کوانتومی[۲] [۶]، رمزنگاری کوانتومی[۳] [۷]، و محاسبات کوانتومی[۴] می‌باشد را فراهم می‌کند. تحقیقات گسترده‌ای بر روی حالت‌های درهم‌تنیده، این ویژگی نادر مکانیک کوانتومی، انجام شده است. یکی از نتایج قابل توجه این تحقیقات شناخت درهم‌تنیدگی به عنوان یک منبع است [۷ و ۱۰]، مانند انرژی که می‌تواند برای اجرای کارهای دلخواه فیزیکی مورد استفاده قرار بگیرد.

شباهت‌های بین درهم‌تنیدگی و انرژی خیلی بیشتر از یک تشابه سادهٔ ظاهری است. درهم‌تنیدگی موجود بین حالت‌های کوانتومی می‌تواند به صورت کمیتی کوانتیده ظاهر شود. این

۱. Quantum teleportation

۲. Quantum dense coding

۳. Quantum cryptography

۴. Quantum computing

مسئله ما را قادر به ارتقا و توسعهٔ قوانین تراز اول کوانتومی حاکم بر رفتار حالت‌های درهم‌تنیده می‌سازد. این قوانین مشابه با قوانین ترمودینامیک حاکم بر رفتار انرژی، مستقل از شکل ویژه‌ایی که با آن توصیف می‌شوند، رفتار می‌کنند. امیدواریم که نظریهٔ کوانتیدگی درهم‌تنیدگی این امکان را فراهم کند که یک چهارچوب یگانه سازِ قدرتمند برای فهم سیستم‌های کوانتومی پیچیده به دست بیاوریم. چرا که وقتی سیستم‌ها را برحسب درهم‌تنیدگی بینشان بررسی کنیم، خواهیم دید که تعداد بسیاری از حالت‌های مختلف، معادل هم خواهند بود.

درهم‌تنیدگی سیستم‌های برهم‌کنش کننده با محیط اطراف که سبب ایجاد اثرات ناهمدوسی بر سیستم می‌شود یکی از بزرگترین موانع بر سر راه فرآیندهای اطلاعات کوانتومی می‌باشد. درهم‌تنیدگی می‌تواند هم از طریق برهم‌کنش مستقیم بین دوکیوبیت [۱۱] و یا از طریق برهم‌کنش با کیوبیت‌ها با یک قسمت سوم تولید شده باشد [۱۲]. به هرحال در هر دو فرآیند سیستم بسته فرض شده و از اثرات محیط صرف‌نظر شده است. در وضعیت واقعی، یک سیستم کوانتومی می‌تواند هرگز منزوی نباشد و به طور اجتناب ناپذیری با محیط اطراف خود برهم‌کنش داشته باشد. یک اثر این برهم‌کنش ناخواسته، ناهمدوسی است که به طور عمده‌ای باعث کاهش درهم‌تنیدگی و همدوسی کوانتومی می‌شود. نشان داده شده است که دو کیوبیت جفت شده با محیط اطراف و بدون جفت شدگی مستقیم باهم می‌توانند درهم‌تنیده باشند [۱۳]، علاوه بر آن می‌تواند یک حالت پایدار نیز تشکیل دهد [۱۴].

گذار فاز کوانتومی[۱] (QPT) یک تغییر کیفی در حالت پایهٔ یک سیستم بس ذره‌ای کوانتومی است [۱۵ و ۱۶]. بر خلاف گذار فاز معمولی که در دماهای غیر صفر رخ خواهد داد، افت وخیزهای موجود در QPT به طور کامل کوانتومی هستند. به طوری‌که در نقاط بحرانی در فضای پارامترها، همبستگی‌های بلند برد حالت پایه سیستم، در جایی که گذار فاز صورت می‌گیرد افزایش شدیدی دارند. علاوه بر آن وجود یک QPT در یک سیستم بس ذره‌ای کوانتومی به شدت متأثر از رفتار سیستم در نزدیکی نقاط بحرانی، است [۱۵].

مدل هاینزبرگ یک نامزد ایده‌ال برای تولید و دستکاری حالت‌های درهم‌تنیده می‌باشد و مدل برهم‌کنشی هایزنبرگ می‌تواند در محاسبات کوانتومی جهت کدنویسی مورد استفاده قرار گیرد [۱۷]. از این رو بسیاری از سیستم‌های فیزیکی همچون اسپین‌های هسته [۱۸]، نقاط کوانتومی [۱۹]، ابررساناها [۲۰]، و شبکهٔ اپتیکی یا نوری [۲۱]، توسط این مدل شبیه سازی شده‌اند.

در این مقاله ما به مطالعهٔ درهم‌تنیدگی گرمایی در مدل هایزنبرگ می‌پردازیم. این درهم‌تنیدگی قاعدتاً به دما بستگی دارد اما حالت سیستم تعادل آماری نیست. این وضعیت زمانی اتفاق می‌افتد که سیستم کوانتومی با یک حمام بوزونی در دماهای مختلف برهم‌کنش می‌کند. درهم‌تنیدگی یک دو کیوبیتی در زنجیرهٔ XXZ را به ازای پارامترهای مختلف برهم‌کنش ژیالوسینکی- موریا[۲] (DM) و اثر اتلاف را بروی آن بررسی می‌کنیم. از تابع توافق به عنوان اندازهٔ درهم‌تنیدگی استفاده می‌کنیم [۲۲]. تابع توافق C عددی بین صفر و یک می‌باشد به طوری‌که $C=0$، بر درهم‌تنیدگی صفر و $C=1$ بر بیشینهٔ درهم‌تنیدگی سیستم دلالت می‌کند. برای یک حالت مخلوط q، تابع توافق حالت برابر است با: $C(\rho)=\max\{2\lambda_{\max}-\sum_i^4\lambda_i\}$، جایی که λ_iها ریشه مربع مثبت ویژه مقادیر ماتریس $R=\rho(\sigma^Y\otimes\sigma^Y)\rho^*(\sigma^Y\otimes\sigma^Y)$ هستند و علامت ستاره بر الحاقی مختلط ماتریس چگالی اشاره می‌کند.

همچنین در مورد تابع آنتروپی گرمایی سیستم در حالت‌های مختلف صحبت می‌کنیم و تحولات آنتروپی را بر حسب پارامترهای مختلف بررسی خواهیم کرد. نهایتاً تحولات مشتق تابع توافقی سیستم را برحسب پارامترهای برهم‌کنش DM رسم کرده و گذار فاز کوانتومی سیستم را در شرایط عدم حضور و حضور اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط بررسی می‌کنیم.

۲. دینامیک لیندبلد[۳]

ابعاد دینامیک کوانتومی اتلاف در

۱. Quantum Phase Transitions

۲. Dzyaloshinskii-Moriya

۳. Lindblad

ناهمدوسی[۱] [۲۳ و ۲۴]، آشفتگی کوانتومی[۲] [۲۵]، دینامیک فمتو ثانیه[۳] [۲۶]، و در دینامیک کوتاه زمانی سیستم‌های دستگاه نانو متریک [۲۷]، در سال‌های اخیر به شکل وسیعی مورد بررسی و استفاده قرار گرفته است. ساختار رسمی نظریه بر پایه نیمهٔ گروه‌های دینامیکی کوانتومی، که تقریباً به طور همزمان توسط لیندبلد [۲۸] و کوساکوسکی[۴][۲۹] ارائه شده است، بنا گردیده است. این نظریه به شکل رسمی معادلهٔ دینامیکی کوانتومی دقیقی را در اختیار قرار داده است، به ویژه اینکه این معادله خصوصیت مثبت بودن ماتریس چگالی را در تحولات تضمین می‌کند.

معادلهٔ لیندبلد تعمیمی از معادلات وان نیومن-لیوویل[۵] می‌باشد. همان طور که معادلهٔ شرودینگر توصیفی از تحول زمانی حالت خالص یک سیستم ارائه می‌دهد، معادلات لیندبلد شرحی از تحول زمانی ماتریس چگالی برای سیستم‌های باز کوانتومی را در اختیار قرار می‌دهد. معادلهٔ شرودینگر تحول یکانی یک سیستم برگشت پذیر را توصیف می‌کند حال آنکه برای تحولات غیر یکانی در سیستم های برگشت ناپذیر همانند سیستم‌های اتلافی (سیستم باز) به معادلات تعمیم یافته‌ای همچون معادلهٔ لیندبلد نیاز است [۲۸]. معادلات وان نیومن برای ماتریس چگالی یک توصیف یکانی از سیستم، که شامل اتلاف نیست، را فراهم می‌کند.

معادلهٔ لیندبلد برای تحول زمانی ماتریس چگالی یک سیستم که تحت اتلاف است به این صورت تعریف می‌شود [۲۸ و ۲۹]:

$$\frac{d}{dt}\rho(t)=\hat{\mathcal{L}}(t)\rho(t),\qquad \hat{\mathcal{L}}(t)\rho\equiv -i\left[H(t),\rho\right]+\hat{\mathcal{D}}(t)\rho, \tag{۱}$$

که برای بخش اتلاف گر یا میرا کننده $\hat{\mathcal{D}}(t)$ داریم:

$$\hat{D}\rho=\sum_{\mu}(2\hat{L}_{\mu}^{+}\hat{\rho}\hat{L}_{\mu}-\hat{L}_{\mu}\hat{L}_{\mu}^{+}\rho-\rho\hat{L}_{\mu}\hat{L}_{\mu}^{+}). \tag{۲}$$

H عملگر هامیلتونی سیستم، $\hat{L}_{\mu}$ها عملگرهای دارای رد مساوی یک بوده و $\hat{L}_{\mu}^{+}$ همیوغ الحاقی آن است. از طریق این معادلهٔ، تحولات زمانی سیستم را بررسی می‌کنیم. جملهٔ اول معادلهٔ (۱)، یک تحول یکانی همدوس از ماتریس چگالی را نشان می‌دهد، در حالی که جملهٔ دوم اثرات ناهمدوسی محیط را روی سیستم نشان داده و یک دینامیک غیر همدوسی را برای سیستم ایجاد می‌کند. در این مقاله تنها به بررسی اثرات ناهمدوسی ناشی از محیط بر روی انواع حالات سیستم می‌پردازیم و از تحول یکانی سیستم صرف نظر می‌کنیم

$$\frac{d}{dt}\rho(t)=\sum_{\mu}(2\hat{L}_{\mu}^{+}\hat{\rho}\hat{L}_{\mu}-\hat{L}_{\mu}\hat{L}_{\mu}^{+}\rho-\rho\hat{L}_{\mu}\hat{L}_{\mu}^{+}). \tag{۳}$$

منبعی را که سیستم با آن برهم‌کنش دارد را به صورت یک سیستم بوزونی در نظر گرفته که به صورت مجوعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ عمل می‌کند، که هامیلتونی آن به این شکل است:

$$H_E=\sum_{k}\hbar\omega_k b_k^{\dagger}b_k, \tag{۴}$$

که در آن $b^{\dagger},b$ به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی در سیستم‌های بوزونی می‌باشند و ω_k بسامدهای مختلف این سیستم است. عملگرهای لیندبلد، که بیانگر تأثیرات اتلافی و ناهمدوسی منبع روی سیستم می‌باشند، با توجه به هامیلتونی سیستم به این صورت در نظر گرفته می‌شود؛ از آنجایی که سیستم شامل دو کیوبیت است و لذا برای هر دوتای آنها می‌نویسیم

$$L_{\pm,Z}^{1}=\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\sigma_{\pm,Z},\qquad L_{\pm Z}^{2}=\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\sigma_{\pm,Z}, \tag{۵}$$

که در آن L^{2},L^{1} عملگرهای لیندبلد کیوبیت اول و دوم است و $\sigma_{\pm,Z}$ مؤلفه‌های مثبت، منفی و Z ماتریس پائولی می‌باشند. γ ضریب جفت شدگی سیستم با منبع می‌باشد که در اینجا برای هردو کیوبیت آن را یکسان در نظر می‌گیریم. با انجام محاسبات با استفاده از معادلهٔ لیندبلد برای مؤلفه‌های اتلافی ماتریس چگالی نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

---

۱. Decoherence

۲. Quantum chaos

۳. Dynamics femtosecond

۴. A Kossakowski

۵. Liouville-von Neumann equation

$$
\begin{aligned}
&\dot{p}_{11}(t)=(\gamma/2)\left[p_{33}+p_{22}\right],\\
&\dot{p}_{12}(t)=-(5\gamma/4)\,p_{12}+(\gamma/2)\,p_{34}\,,\\
&\dot{p}_{13}(t)=-(5\gamma/4)\,p_{13}+(\gamma/2)\,p_{24}\,,\\
&\dot{p}_{14}(t)=-(10\gamma/4)\,p_{14}\,,\\
&\dot{p}_{22}(t)=-(\gamma/2)\left[p_{22}+p_{44}\right],\\
&\dot{p}_{23}(t)=-(10\gamma/4)\,p_{23},\\
&\dot{p}_{24}(t)=-(7\gamma/4)\,p_{24},\\
&\dot{p}_{33}(t)=-(\gamma/2)\left[p_{33}+p_{44}\right],\\
&\dot{p}_{34}(t)=-(7\gamma/4)\,p_{34}\,,\\
&\dot{p}_{44}(t)=-\gamma\,p_{44}\,,\\
&p_{12}^{*}=p_{21},p_{13}^{*}=p_{31},p_{14}^{*}=p_{41},p_{23}^{*}=p_{32},\\
&p_{24}^{*}=p_{42},p_{34}^{*}=p_{43},
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

که اثر اتلاف روی سیستم را در حالت‌های مختلف با استفاده از نتیجهٔ بالا، در قسمت بعد بررسی می‌کنیم.

۳. گذار فاز کوانتومی

افت وخیزهای کوانتومی در سیستم‌های اسپینی با ابعاد کمتر نسبت به سیستم‌های اسپینی با ابعاد بزرگتر قویتر هستند [۱۵]. گذار فاز کوانتومی توسط افت وخیزهای کوانتومی شدیدتر تحریک شده و سپس پدیده‌های کوانتومی بدیع و جالبی را در سیستم‌های اسپینی ابعاد کم به نمایش می‌گذارد. این اثرات و اثرات برهم‌کنش‌های نوار نوسانی، به طور گسترده‌ای در سیستم‌های اسپینی مانند زنجیرهٔ هاینزبرگ پادفرومغناطیس [۳۰–۳۵]، زنجیرهٔ هاینزبرگ با دوره‌های نواری [۳۶ و ۳۷]، زنجیرهٔ پادفرومغناطیس هاینزبرگ چهارمتریک [۳۸]، و نردبان اسپینی دو پایه‌ای [۳۹–۴۰]، مطالعه شده‌اند. این گذارهای فاز کوانتومی (QPT ها) به طور موثق کوانتومی بوده به این معنی که عامل اصلی همبستگی‌های بلند برد همچون درهم‌تنیدگی هستند. نکتهٔ قابل توجه این است که حالت سیستم در نقاط بحرانی به شدت درهم‌تنیده است [۴۲]. به این ترتیب سیستم در پیرامون نقاط بحرانی می‌تواند برحسب درهم‌تنیدگی خود، که تابعی از پارامترهای مختلف سیستم است، توصیف شود. ابتدا درهم‌تنیدگی و تغییرات اندازهٔ آن را بر حسب پارامترهای مختلف سیستم بررسی کرده و سپس تغییر در بیشینه اندازهٔ درهم‌تنیدگی، که تفسیری از انتقال فاز کوانتومی است، را در شرایط مختلف تحلیل می‌کنیم. در این مطالعه، ما زنجیرهٔ اسپینی نوع هایزنبرگ را با یک جفت شدگی تبادلی نوسانی در نظر گرفتیم. طبیعتاً این نوسانات نواری، نمی‌تواند فاز پاد فرومغناطیس مربوط به موقعیت نواری یکنواخت را نابود کند، بلکه تنها به طور جزیی ویژگی حالت پایه را که ناشی از دوپارش[1] شبکهٔ اسپینی است تغییر می‌دهد. پس یک برهم‌کنش با تقارن کم می‌تواند نقش قابل توجهی در القای فاز کوانتومی بازی کند. برای بررسی گذار فاز کوانتومی، ما از برهم‌کنش موریا–ژیالوشینسکی (DM) [۴۳] که نتیجهٔ جفت شدگی اسپین مدار است، استفاده می‌کنیم. از طریق مشتق تابع توافقی سیستم، نقاط بحرانی کوانتومی سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا محاسبات درهم‌تنیدگی میان اسپین‌های شبکه در دمای دلخواه را انجام داده و سپس اثرات اتلاف روی درهم‌تنیدگی سیستم را، با وجود برهم‌کنش سیستم با محیط و به طبع آن بیشینهٔ درهم‌تنیدگی، بررسی می‌کنیم. ایدهٔ اصلی این است که با بررسی درهم‌تنیدگی میان اسپین‌های شبکه، با در نظر گرفتن سیستم کل به صورت یک سیستم دو قسمتی و تعمیم آن، درک مناسبی از درهم‌تنیدگی کل سیستم و گذار فاز کوانتومی به دست بیاوریم. از این رو قادر خواهیم بود صحت وجود ویژگی‌های کوانتومی را در همبستگی بین ذرات سیستم تعیین کنیم.

۴. محاسبهٔ درهم‌تنیدگی کوانتومی

۴. ۱. پارامتر راستای z جفت شدگی DM

هامیلتونی H برای یک دو کیوبیتی ناهمسانگرد مدل هاینزبرگ XXZ با پارامتر z جفت شدگی DM عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
H=&\,J_X\sigma_1^X\sigma_2^X+J_Y\sigma_1^Y\sigma_2^Y+J_Z\sigma_1^Z\sigma_2^Z\\
&+D_Z(\sigma_1^X\sigma_2^Y-\sigma_1^Y\sigma_2^X)
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

که $J_i(i=X,Y,Z)$ ضرایب جفت شدگی حقیقی می‌باشند. D_Z مؤلفه z پارامتر جفت شدگی DM است و $\sigma^i(i=X,Y,Z)$ ماتریس‌های پائولی می‌باشند. در اینجا به اصطلاح برهم‌کنش DM یک عبارت مغناطیسی الحاقی برآمده از جفت شدگی اسپین مدار می‌باشد [۴۳]. $J_i>0$ مربوط به حالت پادفرومغناطیس و $J_i<0$ مربوط به حالت فرومغناطیس

۱. Dimerization

می‌باشد. این مدل به ازای $J_X = J_Y,\ J_Z = 0$ به مدل هاینزبرگ XX همسانگرد و به ازای $J_X = J_Y = J_Z$ به مدل هاینزبرگ XXX همسانگرد تبدیل می‌شود.

ابتدا نشان می‌دهیم که شکل ماتریسی این هامیلتونی بر حسب پایه‌های استاندارد $\{|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle\}$ به صورت زیر خواهد بود

$$H = \begin{pmatrix} J_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_Z & 2J+2iD_Z & 0 \\ 0 & 2J-2iD_Z & -J_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_Z \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

فرض می‌کنیم که سیستم در یک آنسامبل کانونی در تعادل گرمایی قرار دارد. وضعیت سیستم شبکهٔ اسپینی در تعادل گرمایی توسط عملگر چگالی گیبس $p(T) = \frac{\exp(-\beta H)}{Z}$ داده شده است که $Z = tr[\exp(-\beta H)]$ تابع پارش سیستم می‌باشد، H هامیلتونی سیستم است و $\beta = \frac{1}{K_B T}$، که T بیانگر دماست و K_B ثابت بولتزمن است که برای سادگی آن را برابر با یک می‌گیریم. $p(T)$ یک حالت گرمایی را نمایش می‌دهد. درهم‌تنیدگی در حالت‌های گرمایی [۴۴-۴۹] درهم‌تنیدگی گرمایی نامیده می‌شود [۵۰]. با انجام محاسبات طولانی، می‌توانیم به بیان زیر برای ماتریس چگالی $p(T)$ برسیم:

$$p(T) = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & ue^{i\phi} & 0 \\ 0 & ue^{-i\phi} & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

که در آن داریم

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(1+e^{4\beta\omega})e^{\beta(J_Z-2\omega)}, \\ v &= \frac{1}{2}(1-e^{4\beta\omega})e^{\beta(J_Z-2\omega)}, \\ r &= e^{-\beta J_Z}, \\ \omega &= \sqrt{J^2+D_Z^2}, \phi = \arctan\left(\frac{D_Z}{J}\right), \\ Z &= 2e^{-2\beta J_Z}(1+e^{2\beta J_Z}\cosh(2\beta\omega)]. \end{aligned} \qquad (10)$$

ابتدا تابع توافق سیستم را با استفاده از رابطه‌ای که قبلاً به آن اشاره شد، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} C(\rho(T)) &= \frac{e^{\beta J_Z}}{Z}\left(e^{2\beta\omega} - e^{-2\beta J_Z} - e^{-2\beta\omega} - e^{-2\beta J_Z}\right) \\ &= \frac{e^{\beta J_Z}}{Z}\left(e^{-2\beta J_Z} - 2i\sinh(2\beta\omega)\right) \end{aligned} \qquad (11)$$

تغییرات تابع توافق سیستم در غیاب اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط اطراف توسط نمودارهای زیر نشان داده شده است.

اثر اتلاف بر روی مؤلفه‌های ماتریس چگالی را از طریق معادلهٔ لیندبلد (۶) به دست آوردیم، به این ترتیب ماتریس چگالی اتلافی از این قرار است

$$\rho(t,T) = \begin{bmatrix} (2-2e^{-(1/2)t\gamma})(r+u)+re^{-4t\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(1/2)t\gamma}(r+u)-re^{-t\gamma} & ve^{-(10/4)t\gamma+i\theta} & 0 \\ 0 & ve^{-(10/4)t\gamma-i\theta} & e^{-(1/2)t\gamma}(r+u)-re^{-t\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & re^{-t\gamma} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

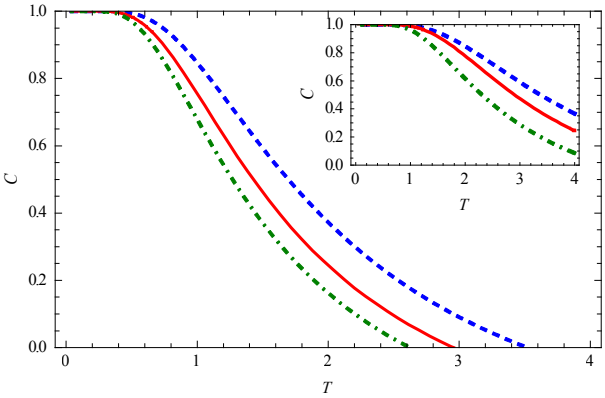
تغییرات درهم‌تنیدگی در نتیجهٔ اثر اتلاف بروی سیستم را از طریق تابع توافق به عنوان اندازهٔ درهم‌تنیدگی، محاسبه می‌کنیم. طبق تعریف ویژه مقادیر ماتریس $R = \rho(\sigma^Y \otimes \sigma^Y)\rho^*(\sigma^Y \otimes \sigma^Y)$ را به دست آورده و با استفاده از رابطهٔ $C(\rho) = \max\{2\lambda_{\max} - \sum_i^4 \lambda_i\}$، تابع توافق سیستم اتلافی را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C(\rho(t,T)) = & \\ & \frac{1}{Z}(e^{-(10/4)t\gamma}\left(e^{(3/2)t\gamma}r - e^{2t\gamma}(r+u)+v\right) \\ & -e^{-(10/4)t\gamma}\left(-e^{(3/2)t\gamma}r + e^{2t\gamma}(r+u)+v\right) \\ & -2\sqrt{re^{-t\gamma}\left(re^{t\gamma}+(2-2e^{-(1/2)t\gamma})(r+u)\right)}, \end{aligned} \qquad (13)$$

که در آن $Z = (1+e^{4\beta\omega})e^{\beta(J_Z-2\omega)} + 2e^{-\beta J_Z}$. سپس با استفاده از نمودار تغییرات تابع توافق اثر اتلاف بر روی سیستم را از جنبه‌های مختلف مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۴. ۲. نتیجه و بحث

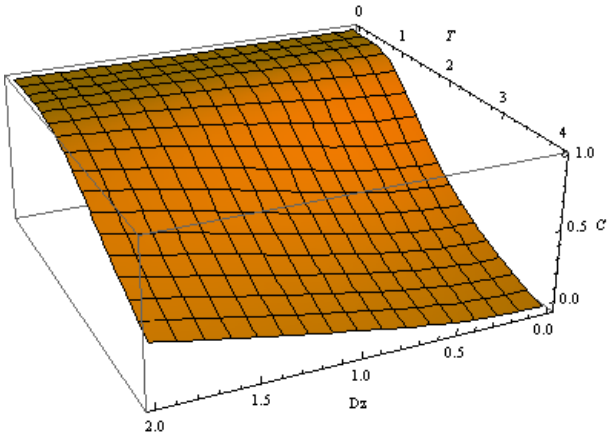
با ثابت نگهداشتن بعضی از پارامترها، می‌توانیم تغییرات



شکل ۱. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ Z به ازای $J_Z=۰/۲$ و $J=۱$. و خط تیره آبی $D_X=۱$، خط ضخیم $D_X=۰/۶$، نقطه چین $D_X=۰/۲$. و نمودار کوچک سمت راست را به ازای $D_Z=۱$ و $J=۱$. و خط تیرهٔ آبی $J_Z=۳$، خط ضخیم $J_Z=۲$، نقطه چین $J_Z=۱$ رسم کردیم.

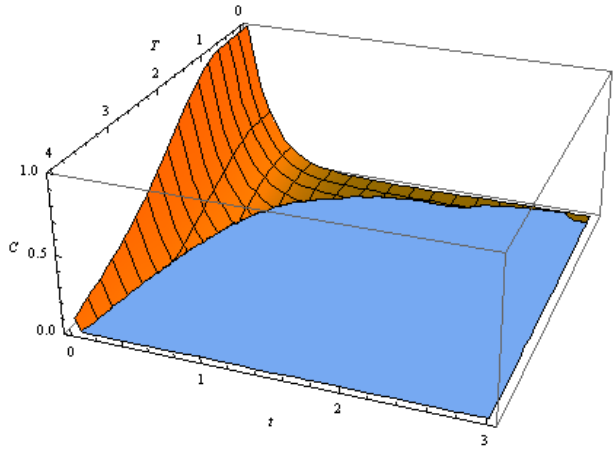
درهم‌تنیدگی کوانتومی را از طریق تابع توافق C و میزان تأثیر از پارامترهای مختلف را بررسی کنیم. به شکل ۱ نگاه کنید جایی که $J=۱$ است. می‌بینیم که میزان درهم‌تنیدگی با افزایش دما کاهش می‌یابد. این وضعیت مشابه رفتار حالتی است که در شکل ۱ (نمودار کوچک سمت راست) نشان داده شده است. برخلاف آن، در شکل ۲ می‌بینیم که در یک نقطه مشخص مقدار C دیرتر صفر می‌شود در حالی که در شکل ۱ این نقطه بالاتر است. به عبارتی پارامترهای بزرگتر D_Z دارای نقاط بزرگتری هستند. این نقاط به اصطلاح به نقاط بحرانی سیستم دلالت می‌کنند. این حالت‌ها در نتیجهٔ ترکیب حالت‌های درهم‌تنیده بیشینه با دیگر حالت‌ها می‌باشد. این موضوع بیانگر این است که درهم‌تنیدگی گرمایی با افزایش دمای T در نقاط بحرانی پنهان می‌شود و در نتیجه هیچ منبع درهم‌تنیدگی برای استفاده کردن وجود ندارد. همان طور که می‌دانیم درهم‌تنیدگی کوانتومی تنها همبستگی کوانتومی موجود نیست. بر پایهٔ بحث اولیور و زوریک[۱] [۵۱]، فقدان درهم‌تنیدگی به معنایی کلاسیک بودن سیستم نیست. برای ازبین بردن کوانتیدگی سیستم باید از فرآیندهای ناهمدوس استفاده کرد. ناهمدوسی نهایتاً باعث صفر شدن کوانتیدگی سیستم شده و آنگاه سیستم در مجموع حالت کلاسیکی خواهد داشت.

۱. Ollivier and Zurek

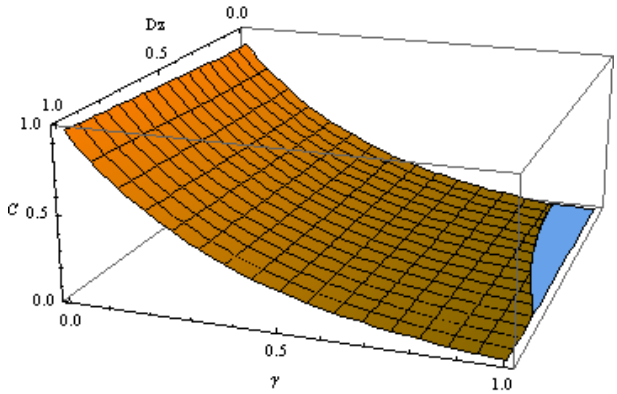


شکل ۲. تغییرات تابع توافقی سیستم بر حسب دما T و D_Z به ازای $J_Z=۱$ و $J=۱$.

حال به شکل‌ها نگاه کنید، وقتی دما T افزایش می‌یابد، افت و خیزهای دمایی کنترل سیستم را در آن ناحیه به دست می‌گیرد و نقش ثابت‌های جفت شدگی D_Z، J_Z و J کاهش می‌یابد. پس می‌بینیم که این خطوط در شکل ۱ به هم نزدیکتر می‌شوند. ما حال پارامتر J_Z را برابر با یک قرار می‌دهیم. همان طور که در شکل ۱ (نمودار کوچک سمت راست) می‌بینیم، در دماهای یکسان خطوط نسبت به شکل اصلی ۱ بیشتر ازهم جدا شده‌اند. این اثر به دلیل تأثیر قابل توجه ضریب جفت شدگی J_Z در اندازهٔ کوانتیدگی و درهم‌تنیدگی سیستم است. حال به ما اجازه دهید که با توجه به شکل‌های ۱ و ۲ به تأثیر پارامتر D_Z در میزان درهم‌تنیدگی گرمایی بپردازیم. درنتیجه تقارن پارامترهای برهم‌کنش DM، ما می‌توانیم تنها تأثیر قدرت پارامتر D_Z را در محاسبات وارد کنیم. پس تنها حالت‌های $D_Z>۰$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در نواحی معین زمانی که پارامتر D_Z افزایش می‌یابد درهم‌تنیدگی کوانتومی نیز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر با افزایش پارامتر D_Z می‌توان سیستم درهم‌تنیده‌تری ایجاد کرد و نواحی دمایی که سیستم همچنان درهم‌تنیده است را نیز می‌توان افزایش داد، یعنی نقاطی را که سیستم در آنها درهم‌تنیدگی خود را از دست می‌دهد به تاخیر انداخت. همان‌طور که از نمودارهای بالا مشخص است وجود اتلاف باعث تضعیف و در مواردی باعث نابودی درهم‌تنیدگی سیستم می‌شود. هرچقدر میزان جفت شدگی بین سیستم و محیط

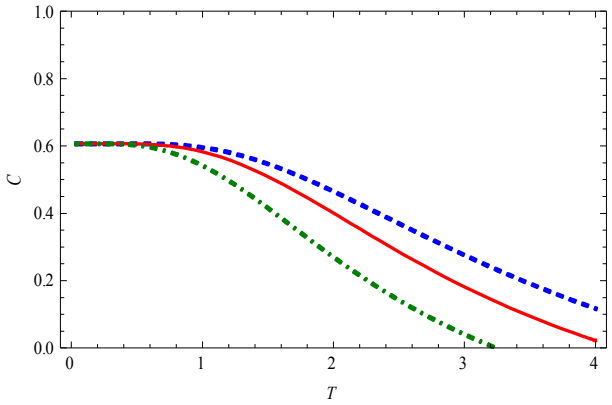


شکل ۳. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ D_Z به ازای $\gamma=۰/۲$، $D_Z=۱$، $J_Z=۱$ و $J=۱$.



شکل۴. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ D_Z به ازای $T=۱$، $t=۱$، $J_Z=۱$ و $J=۱$.

اطراف آن بیشتر باشد، طبعاً اثر اتلاف مشخص‌تر و کاهش درهم‌تنیدگی سیستم بیشتر خواهد بود. همان طور که از شکل ۴ مشخص است ثابت جفت شدگی γ نقش تعیین کننده‌ای در میزان کاهش درهم‌تنیدگی سیستم دارد، که اگر مقدار کمتری داشته باشد بیانگر برهم‌کنش ضعیف‌تر بین سیستم و محیط بوده و در نتیجه تضعیف کمتر درهم‌تنیدگی سیستم را در پی خواهد داشت، و بالعکس. نکتهٔ جالب توجهی که از مقایسهٔ شکل ۵ و ۶ می‌توان دریافت این است که مقاومت بیشتر سیستم با J_Z بیشتر، در مقایسه با همان مقدار برای D_Z، در برابر نقش تضعیف کنندگی که محیط ایجاد می‌کند، حاصل می‌شود. به عبارت دیگر



شکل ۵ . تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ D_Z به ازای $\gamma=۰/۲$، $t=۱$، $D_Z=۱$ و $J=۱$. خط تیرهٔ آبی $J_Z=۳$، خط قرمز ضخیم $J_Z=۲$ و خط سبز $J_Z=۱$ را نشان می‌دهند.

پارامتر D_Z در مقابل اتلاف ناشی از محیط تأثیرپذیرتر است و کاهش بیشتری از درهم‌تنیدگی کوانتومی با این پارامتر شاهد هستیم. در شکل ۶ همان طور که مشاهده می‌کنیم با افزایش ثابت جفت شدگی که بیانگر یک برهم‌کنش قوی بین سیستم و محیط است، تأثیر پارامترهای دیگر در اندازهٔ درهم‌تنیدگی به شدت کاهش می‌یابد و خط‌های حالت مختلف به همدیگر نزدیکتر می‌شوند. البته با وجود برهم‌کنش قوی بین سیستم ومحیط عملاً سیستم حتی در دماهای پایین نیز درهم‌تنیده نخواهد بود.

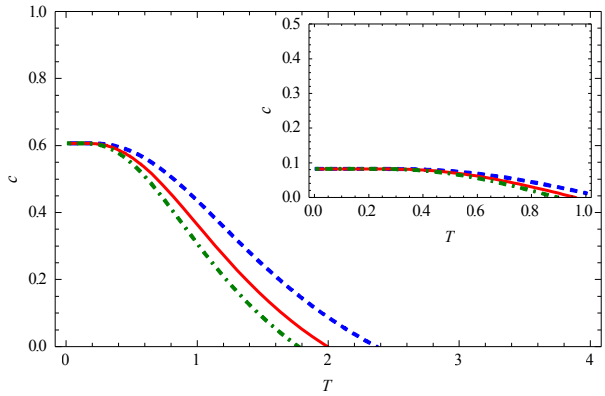
۴. ۳. پارامتر راستای x جفت شدگی DM

هامیلتونی H برای یک دو کیوبیتی ناهمسانگرد مدل هاینزبرگ XXZ با پارامتر x جفت شدگی DM عبارت است از :

$$H = J\sigma_۱^X\sigma_۲^X + J\sigma_۱^Y\sigma_۲^Y + J_Z\sigma_۱^Z\sigma_۲^Z + D_x\left(\sigma_۱^X\sigma_۲^Y - \sigma_۱^Y\sigma_۲^X\right), \quad (۱۴)$$

که در آن $J_i\,(i=X,Y,Z)$ ضرایب جفت شدگی حقیقی می‌باشند. D_X مؤلفه x پارامتر جفت شدگی DM است و $\sigma^i\,(i=X,Y,Z)$ ماتریس‌های پائولی می‌باشند. شکل ماتریسی این هامیلتونی بر حسب پایه‌های استاندارد $\{|۰۰\rangle,|۰۱\rangle,|۱۰\rangle,|۱۱\rangle\}$ به صورت زیر خواهد بود

$$H' = \begin{pmatrix} J_Z & iD_X & -iD_X & ۰ \\ -iD_X & -J_Z & ۲J & iD_X \\ iD_X & ۲J & -J_Z & -iD_X \\ ۰ & -iD_X & iD_X & J_Z \end{pmatrix}. \quad (۱۵)$$



شکل ۶ . تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ D_Z به ازای $\gamma=۰/۲$، $t=۱$، $J_Z=۰$ و $J=۱$. خط تیرهٔ آبی $D_Z=۱$، خط قرمز ضخیم $D_Z=۰/۶$، و خط سبز $D_Z=۰/۲$ است نمودار کوچک سمت راست همان تغییرات را به ازای $\gamma=۱$، $t=۱$، $J_Z=۱$ و $J=۱$ نشان می‌دهد.

به این ترتیب با انجام محاسبات جبری مناسب و دقیق، همچنین با در نظر گرفتن حالت سیستم در تعادل گرمایی برای ماتریس چگالی خواهیم داشت

$$\rho'=\frac{۱}{۲Z'}\begin{pmatrix}\mu_+ & -\xi & \xi & \mu_-\\ \xi & \upsilon_+ & \upsilon_- & -\xi\\ -\xi & \upsilon_- & \upsilon_+ & \xi\\ \mu_- & \xi & -\xi & \mu_+\end{pmatrix}, \qquad (۱۶)$$

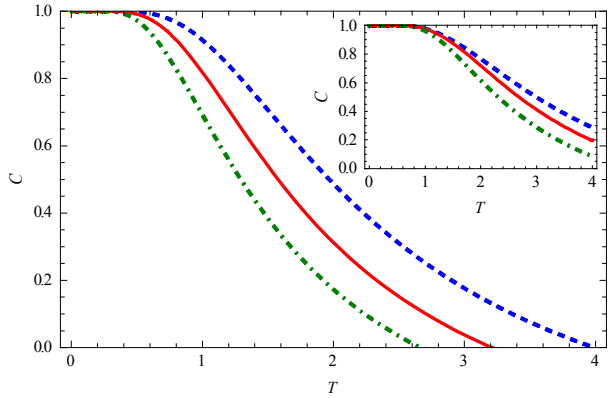
به طوری‌که داریم

$$\mu_\pm=e^{-\beta J_z}\pm(e^{\beta(J-\omega')}\sin^۲\phi+e^{\beta(J+\omega')}\sin^۲\varphi),$$
$$\xi=ie^{\beta(J-\omega')}\sin\phi\cos\phi+ie^{\beta(J+\omega')}\sin\varphi\cos\varphi),$$
$$\phi=\arctan(\frac{۲D_X}{J+J_Z-\omega'}),$$
$$\varphi=\arctan(\frac{۲D_X}{J+J_Z+\omega'}),$$
$$\omega'=\sqrt{(J+J_Z)^۲+۴D_X^۲}. \qquad (۱۷)$$

ویژه مقادیر ماتریس چگالی سیستم عبارت‌اند از

$$\lambda_۱=۲e^{-\beta J_Z},$$
$$\lambda_۲=۲e^{\beta(J_Z-۲J)},$$
$$\lambda_{۳,۴}=۲e^{\beta J}\sqrt{\begin{matrix}[۱+۲\cosh(۲\beta\omega')+۲\cos[۲(\phi-\psi)]\\ \mp\cosh(۲\beta\omega')\sqrt{\cosh(۲\beta\omega')+۲\cos[۲(\phi-\psi)}\end{matrix}}. \qquad (۱۸)$$

به این ترتیب از رابطهٔ تابع توافق استفاده کرده و نمودار



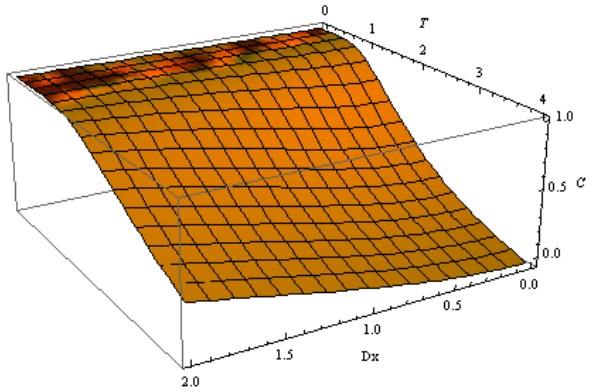
شکل ۷ . تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ X به ازای $J_Z=۰/۲$ و $J=۱$. خط فاصله در $D_X=۱$، خط ضخیم $D_X=۰/۶$، نقطه چین $D_X=۰/۲$ را نشان می‌دهند. و نمودار کوچک سمت راست به ازای $D_X=۱$ و $J=۱$. رسم شده است، و خط تیره آبی $J_Z=۳$، خط ضخیم $J_Z=۲$، نقطه چین $J_Z=۱$ است.

تغییرات آن را به ازای مقادیر مختلف پارامتر برهم‌کنش DM رسم می‌کنیم.

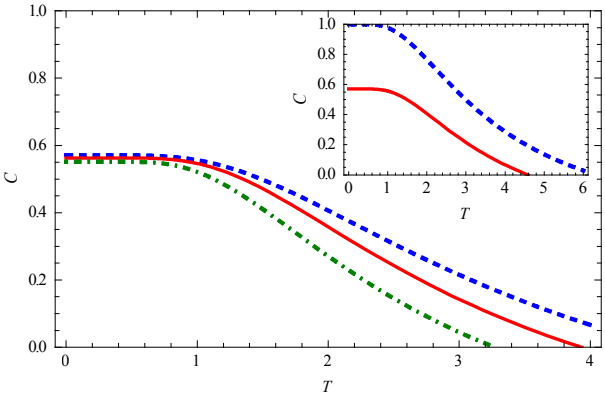
تأثیر اتلاف بروی درهم‌تنیدگی کوانتومی سیستم را از طریق رسم نمودارهای تغییرات تابع توافقی اتلافی بر حسب متغیرهای مختلف نشان می‌دهیم.

۴. ۴. نتیجه و بحث

مشابه با مدل هایزنبرگ ابتدایی که با پارامتر برهم‌کنش D_Z بررسی کردیم در مدل هایزنبرگ دومی با پارامتر برهم‌کنشی D_X اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط اطراف، باعث کاهش و از بین رفتن درهم‌تنیدگی در سیستم می‌شود. با این وجود تفاوت‌هایی هم در اندازه درهم‌تنیدگی و هم نقاط بحرانی که سیستم در آنها ویژگی درهم‌تنیده بودنش را از دست می‌دهد، با عدم حضور اتلاف و حتی درحضور اتلاف در دو حالت سیستم وجود دارد. در ادامه به شکل ۱ و ۷ برمی‌گردیم، که رفتار مشابه درهم‌تنیدگی کوانتومی را در مدل هایزنبرگ ناهمسانگرد بین پارامترهای D_Z و D_X می‌بینیم. این شباهت در رفتار را در حضور اتلاف ناشی از محیط نیز در شکل ۶ و ۱۰ مشاهده می‌کنیم. در حقیقت هرچقدر مقدار ثابت‌های برهم‌کنش DM بیشتر باشد مدت بیشتری سیستم در حالت درهم‌تنیده باقی

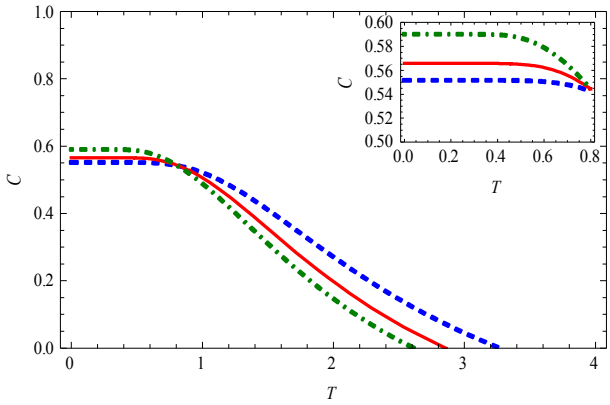


شکل ۸. تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ X به ازای $J_Z=۱$ و $J=۱$ بر حسب D_X و T.

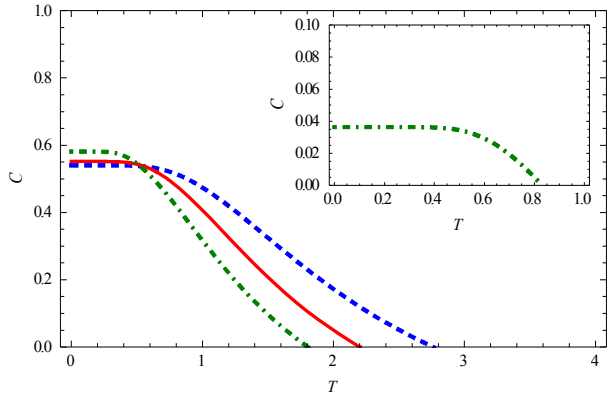


شکل ۹. تغییرات C برحسب T به ازای $\gamma=۰/۲$، $t=۱$، $D_X=۱$ و $J=۱$. خط آبی $J_Z=۳$، و خط قرمز $J=۲$ و خط سبز $J=۱$ را نمایش می‌دهد. و نمودار کوچک سمت راست تغییرات تابع توافقی سیستم را نشان می‌دهد، خط چین آبی $\gamma=۰$، خط قرمز $\gamma=۰/۲$ را نشان می‌دهند.

می‌ماند. آشکار است که تفاوت‌هایی بین دو حالت مختلف وجود دارد. ابتدا اجازه دهید که به شکل‌های ۷ و ۱ و نمودارهای کوچکی که در هر دو شکل قرار دارد، نگاه کنیم. ما درمی‌یابیم که در وضعیتی که تمام پارامترهای دیگر دقیقاً برابر هستند، وقتی دما افزایش می‌یابد D_X نسبت به D_Z بیشتر به واقعیت نزدیکتر است. این نمایان می‌سازد که D_X با افزایش دمای T با سهولت بیشتری تأثیر می‌پذیرد. و از شکل ۱و۷ ما در می‌یابیم که اگر پارامتر J_Z را بزرگتر انتخاب کنیم، درهم‌تنیدگی کوانتومی برحسب D_X های مختلف به طور آشکارتر نسبت به حالت‌های با پارامتر D_Z تغییر می‌کند. این به آن معنی است که پارامتر D_X در طول موقعیت معین با

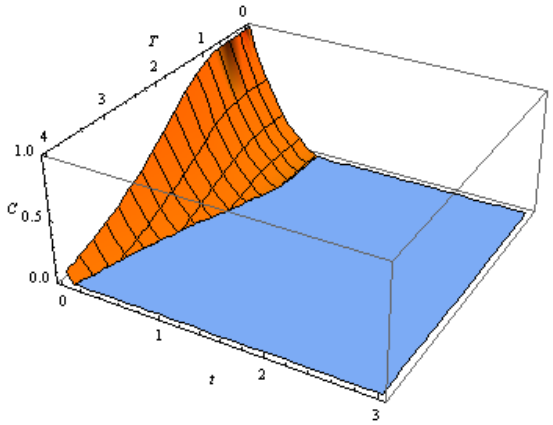


شکل ۱۰ . تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ X به ازای $t=۱$، $\gamma=۰/۲$، $J_Z=۱$ و $J=۱$.و خط فاصله در $D_X=۱$ ، خط ضخیم $D_X=۰/۶$، نقطه چین $D_X=۰/۲$.



شکل ۱۱ . تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ X به ازای $t=۱$، $\gamma=۰/۲$، $J_Z=۰/۲$ و $J=۱$.و خط فاصله در $D_X=۱$ ، خط ضخیم $D_X=۰/۶$، نقطه چین $D_X=۰/۲$، نمودار گوشهٔ سمت راست به ازای $t=۱$، $\gamma=۱$، $J_Z=۰/۲$ و $J=۱$ رسم شده است.

تغییر دادن پارامتری مانند J_Z، بیشتر حساس است. پس ما می‌توانیم به این نتیجه برسیم که مؤثرتر است که از پارامتر D_X برای کنترل درهم‌تنیدگی استفاده کنیم. همچنین ما درمی‌یابیم که وقتی پارامتر J_Z برابر یک تنظیم می‌شود، هردو نمودار شکل ۱ و شکل ۷ مشابه هستند، چراکه در این حالت برهم‌کنش DM دارای پارامترهای غالب کنترل کننده رفتار سیستم نیست. این رفتار سیستم را از لحاظ حساس بودن پارامتر D_X نسبت به پارامتر D_Z با وجود اتلاف می‌توان آشکارتر مشاهده کرد. در مقایسهٔ شکل‌های ۵ و ۶ که بیانگر نقش اتلاف در سیستم با پارامتر D_Z با شکل‌های ۱۰و۱۱ که بیانگر نقش اتلاف در



شکل ۱۲ . شکل تغییرات تابع توافقی سیستم در برهم‌کنش DM با مؤلفهٔ X به ازای $\gamma=1$ ، $D_X=1$، $J_Z=1$ و $J=1$.

حالت سیستم با پارامتر D_X است، می‌توان مشاهده کرد به ازای ثابت بودن تمام پارامترهای دیگر، درهم‌تنیدگی کوانتومی نسبت به پارامتر D_X سریع‌تر تغییر کرده ونسبت به آن حساس تر است. نکته دیگری که می‌توان به آن اشاره کرد در تأثیر اتلاف بر هر دو حالت سیستم است که مشاهده می‌کنیم که درهم‌تنیدگی سیستم با پارامتر D_X سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند. به عبارتی سیستم در این حالت نسبت به اتلاف تأثیرپذیرتر می‌باشد. با مشاهده شکل‌های ۱۰و۱۱ به یک نکتهٔ جالب توجه پی می‌بریم و آن هم این است که در حالت سیستم با پارامتر D_X و به ازای مقادیر کمتر آن، سیستم در نواحی دمایی کمتر از یک درجه مقاومت بیشتری از خود در مقابله با اتلاف نشان می‌دهد و دارای اندازهٔ درهم‌تنیدگی بیشتری نیز می‌باشد، برخلاف این تصور که با D_X بزرگتر سیستم دارای درهم‌تنیدگی بیشتری خواهد بود. از این رو می‌بینیم که در دماهای کمتر از یک درجه خلاف آن رخ خواهد دارد. همچنین در شکل ۱۱ این حالت را برای یک جفت شدگی قوی بین سیستم و منبع مشاهده می‌کنیم که حالت‌های با D_X بزرگتر درهم‌تنیدگی‌شان سریعتر مساوی صفر شده حال آنکه برای مقادیر پارامتر D_X کوچکتر این دیرتر اتفاق می‌افتد.

۵. محاسبهٔ آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی

با استفاده از رابطهٔ آنتروپی وان نیومن به محاسبهٔ آنتروپی حالت‌های مختلف بالا می‌پردازیم

$$S(\rho)=-Tr\left(\rho\log_2\rho\right)=-\sum_i\lambda_i\log_2\lambda_i\,. \qquad (۱۹)$$

به این ترتیب با داشتن ویژه مقادیر ماتریس چگالی می‌توان به سادگی آنتروپی سیستم دوکیوبیتی در شرایط عدم وجود اتلاف و با وجود اتلاف محاسبه کرد.

۵. ۱. پارامتر راستای z جفت شدگی DM

ویژه مقادیر ماتریس چگالی حالت اولیه که با پارامتر D_Z برهم‌کنش DM همراه است به قرار زیر است.

$$\begin{aligned}&\lambda_1=e^{-\beta J_Z}/Z\,,\lambda_2=e^{-\beta J_Z}/Z\,,\\&\lambda_3=e^{\beta(2\omega-J_Z)}/Z\,,\lambda_4=e^{\beta(2\omega+J_Z)}/Z\,.\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

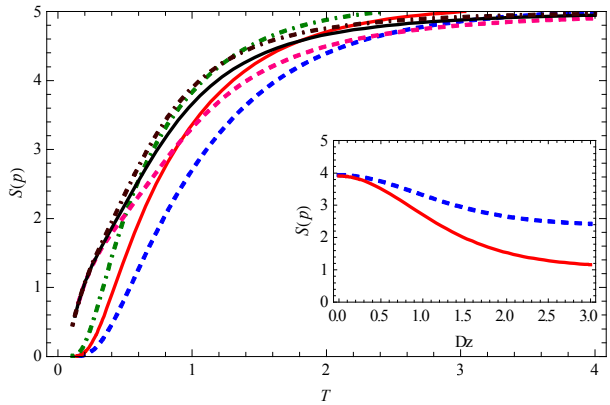
پس با استفاده از رابطهٔ وان نیومن برای آنتروپی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}S(\rho)=-\Bigg(&-2Log\left(\frac{e^{\beta J_Z}}{Z}\right)-Log\left(\frac{e^{\beta(2\omega-J_Z)}}{Z}\right)\\&-Log\left(\frac{e^{\beta(-2\omega+J_Z)}}{Z}\right)\Bigg),\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

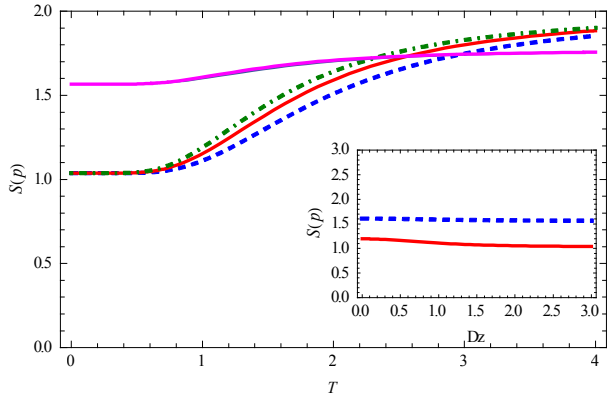
که تغییرات تابع آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی بر حسب دما T و کمیت‌های برهم‌کنشی ازاین قرار است.

آنتروپی گرمایی درهم‌تنیدگی در حضور اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط اطراف از این قرار است:

$$\begin{aligned}S(\rho)=&\frac{re^{-4t\gamma}}{2(r+u)}Log_2\left(\frac{re^{-4t\gamma}}{2(r+u)}\right)\\&-\frac{(2-2e^{-2t\gamma})(r+u)+re^{-4t\gamma}}{2(r+u)}\\&Log_2\left(\frac{(2-2e^{-2t\gamma})(r+u)+re^{-4t\gamma}}{2(r+u)}\right)\\&-\frac{e^{-10t\gamma}(-re^{6t\gamma}+re^{8t\gamma}+ue^{8t\gamma}-v)}{2(r+u)}\\&Log_2\left(\frac{e^{-10t\gamma}(-re^{6t\gamma}+re^{8t\gamma}+ue^{8t\gamma}-v)}{2(r+u)}\right)\\&-\frac{e^{-10t\gamma}(-re^{6t\gamma}+re^{8t\gamma}+ue^{8t\gamma}-v)}{2(r+u)}\\&Log_2\left(\frac{e^{-10t\gamma}(-re^{6t\gamma}+re^{8t\gamma}+ue^{8t\gamma}+v)}{2(r+u)}\right).\end{aligned} \qquad (۲۲)$$



شکل ۱۳. تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت ۱، $J_Z=۰/۲$ و $J=۱$، خط چین آبی و صورتی $D_Z=۱$، خط ضخیم قرمز و سیاه $D_Z=۰/۶$، نقطه چین سبز و قهوه‌ای $D_Z=۰/۲$. (خط‌های پایین متعلق به $J_Z=۱$ است). نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب D_Z را با ضرایب برهم‌کنش متفاوت $T=۱$ و $J=۱$، نشان می‌دهد. برای خط چین آبی $J_Z=۰/۲$ و برای خط ضخیم قرمز $J_Z=۱$ است.



شکل ۱۴. تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت $\gamma=۰/۲$، $J_Z=۱$ و $J=۱$، خط چین آبی $D_Z=۱$، خط ضخیم $D_Z=۰/۶$، نقطه چین سبز $D_Z=۰/۲$ و گروه بالایی به ازای $\gamma=۱$ به دست آمده است. نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه را برحسب D_Z با ضرایب برهم‌کنش متفاوت $J_Z=۱$، $T=۱$ و $J=۱$، نشان می‌دهد. برای خط چین آبی $\gamma=۱$ و برای خط ضخیم قرمز $\gamma=۰/۲$ است.

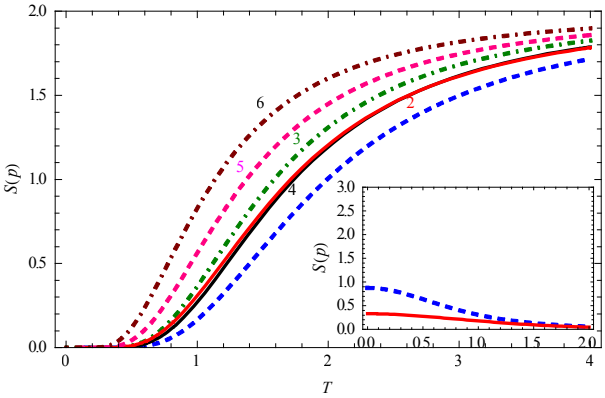
۵. ۲. نتیجه و بحث

همان‌طور که از نمودار ۱۳ مشخص می‌شود هرچقدر مقدار پارامتر Z برهم‌کنش DM یعنی D_Z بیشتر باشد مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی مقدار کمتری خواهد داشت. در نمودار ۱۳ (نمودار کوچک سمت راست) تحول آنتروپی گرمایی بر حسب پارامتر D_Z نمایش داده شده است، که گفته بالا را به طور آشکار ثابت می‌کند. در این نمودار همچنین تأثیر پارامتر J_Z در تغییر آنتروپی و درهم‌تنیدگی کوانتومی به شکل آشکاری مشخص است. در حقیقت می‌بینیم که با افزایش J_Z در اندازهٔ آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی به شکل محسوسی تغییر دیده می‌شود. خطوط تغییرات آنتروپی با افزایش D_Z در به ازای J_Z های مختلف جدایی زیادی از هم خواهند داشت. اما در حالتی که سیستم تحت اتلاف قرار دارد این جدایی کاهش یافته و تأثیر پارامتر در تغییر آنتروپی گرمایی به طور محسوسی کاهش یافته که این مطلب در نمودار ۱۴ (نمودار کوچک سمت راست) آشکارا دیده می‌شود. همچنین در شکل ۱۴ مشاهده می‌کنیم که بسته به نوع جفت شدگی که بین سیستم ومحیط اطرافش وجود خواهد داشت تأثیر این پارامترهای مختلف تغییر می‌کند. با جفت شدگی ضعیف یعنی به ازای $\gamma=۰/۲$ تفاوت در تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی به ازای تغییر در پارامترهای مختلف (هرچند کوچک) مختلف دیده می‌شود، اما زمانی که با یک جفت شدگی قوی سروکار داریم، یعنی به ازای $\gamma=۱$، هیچ تفاوتی در تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی برای پارامترهای مختلف برهم‌کنشی DM یعنی D_Z و J_Z دیده نمی‌شود، که بیانگر غالب شدن افت وخیزهای گرمایی بر سیستم کوانتومی است. عملاً سیستم در این حالت ویژگی درهم‌تنیدگی خود را ازدست داده و شبیه به یک سیستم کلاسیکی رفتار می‌کند.

۵. ۳. پارامتر راستای X جفت شدگی DM

با استفاده از ویژه مقادیر ماتریس چگالی سیستم با پارامتر X برهم‌کنش DM می‌توان آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی را به شکل زیر به دست آورد:

$$S(p)=-(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+ + v_+})Log_۲(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+ + v_+})$$
$$-(\frac{v_+ + v_-}{\mu_+ + v_+})Log_۲(\frac{v_+ + v_-}{\mu_+ + v_+})$$



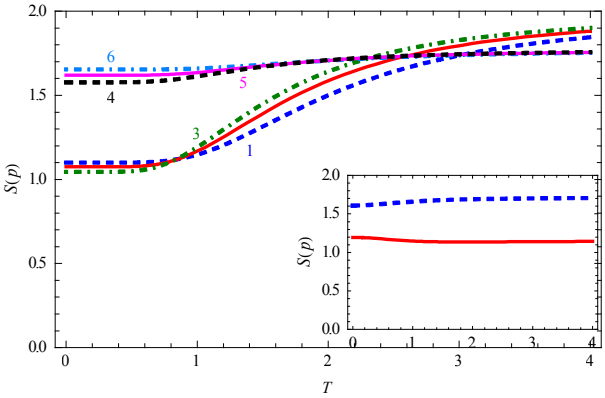
شکل ۱۵. تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما T با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت $J=1$، خط ۱: $J_Z=1$ و $D_X=1$، خط ۲: $J_Z=1$ و $D_X=0.6$، خط۳: $J_Z=1$ و $D_X=0.2$ و خط ۴: $J_Z=0.2$ و $D_X=1$، خط۵: $J_Z=0.2$ و $D_X=0.6$، خط ۶: $J_Z=0.2$ و $D_X=0.2$. نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه را برحسب D_X با ضرایب برهم‌کنش متفاوت $T=1$ و $J=1$، نشان می‌دهد. برای خط چین آبی $J_Z=0.2$ و خط ضخیم قرمز $J_Z=1$ است.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\sqrt{2}(\mu_+-\mu_-+v_+-v_-)}{2(\mu_++v_+)}\\
&-\frac{\sqrt{(\mu_--\mu_++v_+-v_-)^2-4(-4\xi^2-v_-\mu_++v_-\mu_--\mu_-v_++v_+-\mu_+)}}{2(\mu_++v_+)}\\
&\times Log_2\left(\frac{\sqrt{2}(\mu_+-\mu_-+v_+-v_-)}{2(\mu_++v_+)}\right.\\
&\left.-\frac{\sqrt{(\mu_--\mu_++v_+-v_-)^2-4(-4\xi^2-v_-\mu_++v_-\mu_--\mu_-v_++v_+-\mu_+)}}{2(\mu_++v_+)}\right)\\
&-\frac{\sqrt{2}(\mu_+-\mu_-+v_+-v_-)}{2(\mu_++v_+)}\\
&+\frac{\sqrt{(\mu_--\mu_++v_+-v_-)^2-4(-4\xi^2-v_-\mu_++v_-\mu_--\mu_-v_++v_+-\mu_+)}}{2(\mu_++v_+)}\\
&\times Log_2\left(\frac{\sqrt{2}(\mu_+-\mu_-+v_+-v_-)}{2(\mu_++v_+)}\right.\\
&\left.+\frac{\sqrt{(\mu_--\mu_++v_+-v_-)^2-4(-4\xi^2-v_-\mu_++v_-\mu_--\mu_-v_++v_+-\mu_+)}}{2(\mu_++v_+)}\right).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

در صورتی که سیستم تحت اتلاف ناشی از برهم‌کنش بین سیستم و محیط اطراف آن باشد آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی شکل پیچیده‌ای خواهد گرفت و لذا آن را در اینجا درج نخواهیم کرد وتنها به رسم نمودارها و مقایسهٔ آنها با حالت بدون اتلاف بسنده می‌کنیم.

۵. ۴. نتیجه و بحث

از نمودار ۱۵ مشخص است که با افزایش دما مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی نیز افزایش می‌یابد. می‌توان مشاهده کرد هرچقدر مقدار پارامتر برهم‌کنش DM یعنی D_X, J_Z بیشتر باشد مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی مقدار کمتری خواهد داشت. در نمودار ۱۵ (نمودار کوچک سمت راست) تحول آنتروپی گرمایی بر حسب پارامتر D_Z نمایش داده شده است که گفتهٔ بالا را به طور آشکار ثابت می‌کند و نکته قابل توجه که از این نمودار برداشت می‌شود این است که زمانی که D_X افزایش می‌یابد تفاوت تأثیر مقادیر مختلف J_Z بروی آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی از بین رفته و مقادیر متفاوت J_Z یک نتیجهٔ یکسان برای آنتروپی گرمایی سیستم به همراه دارند. این بیانگر آن است که در مقادیر بزرگتر پارامترها نقش D_X به مراتب مهم‌تر از پارامترهای دیگر است. از این رو همان‌طور که دربخش قبل در مورد تابع توافق دیدیم، پارامتر D_X به واقعیت نزدیکتر بوده و حساسیت بیشتری دارد و لذا برای تغییر در میزان درهم‌تنیدگی سیستم پارامتر مناسب‌تری است. همانند قبل در این نمودار نیز تأثیر پارامتر J_Z در تغییر آنتروپی و درهم‌تنیدگی کوانتومی به شکل آشکاری مشخص است. در حقیقت می‌بینیم که با افزایش J_Z در اندازهٔ آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی به شکل محسوسی تغییر دیده می‌شود. خطوط تغییرات آنتروپی با افزایش D_Z به ازای J_Zهای مختلف جدایی زیادی از هم خواهند داشت. اما در حالتی که سیستم تحت اتلاف قرار دارد این جدایی کاهش یافته و تأثیر پارامتر در تغییر آنتروپی گرمایی به طور محسوسی کاهش می‌یابد؛ این مطلب در نمودار ۱۶ آشکارا دیده می‌شود. همچنین در شکل ۱۴ مشاهده می‌کنیم که بسته به نوع جفت شدگی که بین سیستم و محیط اطرافش وجود خواهد داشت، تأثیر این پارامترهای مختلف تغییر می‌کند. با جفت شدگی ضعیف، یعنی به ازای $\gamma=0.2$، تفاوت در تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی به ازای تغییر در پارامترهای مختلف (هرچند کوچک) مختلف دیده می‌شود. اما زمانی که با یک جفت شدگی قوی سر و کار داریم، یعنی به ازای $\gamma=1$، هیچ تفاوتی در تغییرات



شکل ۱۶. تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه برحسب دما T با ضرایب برهم‌کنش DM متفاوت $t=۱$، $\gamma=۰/۲$ و $J=۱$، خط ۱: $J_Z=۱$ و $D_X=۱$، خط ۲: $J_Z=۱$ و $D_X=۰/۶$، خط۳: $J_Z=۱$ و $D_X=۰/۲$ خط ۴ و خط ۵ و خط ۶ به $\gamma=۱$ ازای به دست آمده است. نمودار کوچک سمت راست تغییرات آنتروپی گرمایی سیستم اولیه را برحسب D_X با ضرایب برهم‌کنش متفاوت $T=۱$ و $J=۱$، و نشان می‌دهد. برای خط چین آبی $J_Z=۰/۲$ و برای خط ضخیم قرمز $J_Z=۱$ است.

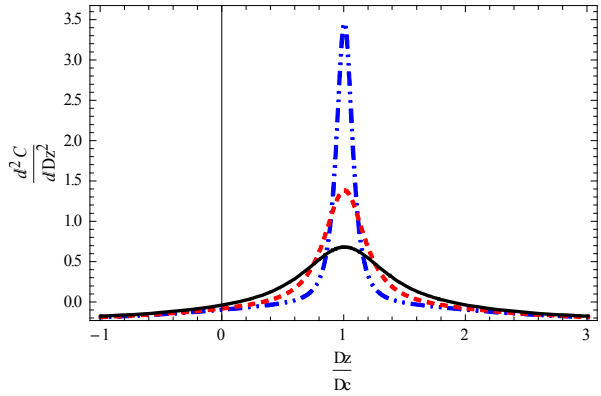
آنتروپی درهم‌تنیدگی گرمایی برای پارامترهای مختلف برهم‌کنشی DM یعنی D_Z و J_Z دیده نمی‌شود، که این بیانگر غالب شدن افت وخیزهای گرمایی بر سیستم کوانتومی است و عملاً سیستم در این حالت ویژگی درهم‌تنیدگی خود را از دست داده و شبیه به یک سیستم کلاسیک خواهد شد.

۶. گذار فاز کوانتومی و درهم‌تنیدگی

یکی از نکات کلیدی به دست آمده، نقشی است که درهم‌تنیدگی در گذار فاز کوانتومی ایفا می‌کند [۵۲]، به طوری که حالت سیستم در نقاط بحرانی به شدت درهم‌تنیده است. سیستم فیزیکی را می‌توان در نزدیکی نقاط بحرانی، در جملاتی برحسب درهم‌تنیدگی، که خود تابعی از پارامترهای مختلف آن سیستم است، نمایش داد. وقتی سیستم به نقاط بحرانی نزدیک می‌شود، ساختار درهم‌تنیدهٔ سیستم کوانتومی در حالت پایه دستخوش یک گذار قرار می‌گیرد. تغییر در اندازهٔ درهم‌تنیدگی سیستم چگونگی این گذار را تعیین می‌کند. درهم‌تنیدگی بین اسپین‌ها در یک شبکه، به غیر از نقاط بحرانی بایستی در سایر نقاط مقدار محدودی داشته باشد، چرا که همبستگی‌ها در چنین شبکه‌های اسپینی به طور نمایی افت می‌کنند. در نقاط بحرانی، همبستگی‌ها روی تمام پارامترهای طولی سیستم افزایش می‌یابند، و عامل فیزیکی این همبستگی‌ها، که درهم‌تنیدگی کوانتومی می‌باشد، بایستی تحول مشابهی در این نقاط داشته باشد. یک گذار بنیادی در درهم‌تنیدگی سیستم در این نقاط اتفاق می‌افتد؛ به این معنی که در نقاط بحرانی حالت سیستم غیرموضعی خواهد بود. اگر این تصویر فیزیکی درست باشد، بایستی در نقاط بحرانی به دلیل وجود درهم‌تنیدگی در سیستم، شواهدی از افزایش درهم‌تنیدگی در تمام پارامترهای سیستم دیده شود.

نشان داده شده است که ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و مشتقاتش، که غیر تحلیل بودن آن یک گذار فاز کوانتومی را مشخص می‌کند، به طور مستقیم با اندازهٔ درهم‌تنیدگی دو قسمتی سیستم ارتباط دارند. همان‌طور که قبلاً گفته شد گذار فاز کوانتومی در دمای $T=۰$ اتفاق می‌افتد، به این دلیل گذارهای فاز کوانتومی فقط از افت وخیزهای کوانتومی ناشی می‌شوند. در اکثر موارد این گذار فازها به وجود نقاط غیر تحلیلی در طیف انرژی سیستم مربوط می‌شوند. به طوری که گذارهای فاز کوانتومی با رفتار غیر تحلیلی در مشتق‌های انرژی حالت پایه سیستم مشخص می‌شوند. از این رو مشاهده شده است که یک گذار فاز کوانتومی مرتبهٔ اول توسط یک ناپیوستگی محدود در مشتق مرتبهٔ اول انرژی حالت پایه سیستم تشخیص داده می‌شود. به همین ترتیب یک گذار فاز کوانتومی مرتبهٔ دوم با ناپیوستگی محدود و یا یگ واگرایی در مشتق مرتبهٔ دوم انرژی حالت پایه سیستم، و با فرض اینکه مشتق مرتبهٔ اول پیوسته باشد، مشخص می‌شود [۵۲ و ۵۳].

تعیین موقعیت‌های که سیستم مادهٔ چگال رفتار مکانیک کوانتومی خواهد داشت از اهمیت بالایی برخوردار است. وقتی یک سیستم در حالت پایه‌اش قرار دارد اثرات کوانتومی مانند گذار فاز کوانتومی به طور معینی اهمیت پیدا می‌کند، در فضای پارامترها، خواص سیستم کوانتومی برای دماهای نزدیک دمای صفر، متاثر از نزدیکی به نقاط کوانتومی بحرانی



شکل ۱۷. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق برحسب D_Z به ازای $J=۰/۱$، خط نقطه چین آبی $J_Z=۰/۱$، خط چین قرمز $J_Z=۰/۲۵$، و خط پررنگ سیاه $J_Z=۰/۵$. $D_c=۱$ بیانگر نقطهٔ بحرانی می‌باشد.

می‌باشد [۱۵ و ۱۶]. از نظر عملی بسیار جالب خواهد بود که اثرات نزدیک شدن به نقاط بحرانی را به درهم‌تنیدگی حالت آمیخته در حالت گرمایی ارتباط دهیم. درنتیجه ما برای بررسی کردن این موضوع، مشتق درهم‌تنیدگی حالت پایه را که با تابع توافق نمایش داده می‌شود، در حضور دماهای غیر صفر محاسبه و تحولات آن را بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از نمودار تغییرات اندازه درهم‌تنیدگی و مشتق‌های آنها، که بیانگر طیف انرژی حالت پایه است، و با استفاده از تفسیری که در بالا از رابطهٔ نقاط غیر تحلیلی سیستم در حالت پایه با گذار فاز کوانتومی ارائه دادیم، وجود گذار فاز کوانتومی را در سیستم، در غیاب و وجود اتلاف کوانتومی، برای پارامتر مختلف برهم‌کنشی بررسی می‌کنیم. لازم به ذکر است که سیستم دارای یک گذار فاز کوانتومی از نل گاف دار[۱] یا فاز پادفرومغناطیس(AFM) به فاز مایع لوتینگر گاف دار[۲] (LL) در نقطهٔ بحرانی $D_c=۱$ می‌باشد [۵۴].

نمودار مشتق تابع توافق سیستم بر حسب پارامترهای برهم‌کنش DM یعنی D_Z و D_X در حالت‌های مختلف برحسب مقادیر متفاوت این کمیت‌ها و همچنین تأثیر اتلاف بر روی این تحولات را بررسی خواهیم کرد.

۱. Gapped Neel

۲. Gapless Luttinger Liquid

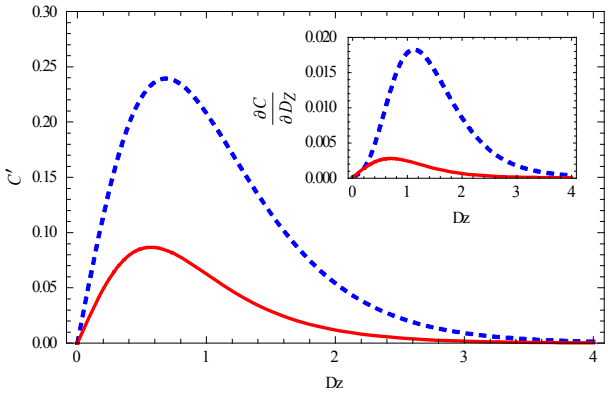
۶. ۱. پارامتر راستای z جفت شدگی DM

نمودار تغییرات مشتق تابع توافق از این قرار است. نمودارها برای حالتی که سیستم دارای اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط است به دست آمده، ضریب ثابت جفت شدگی سیستم با محیط را برابر با $\gamma=۰/۲$ گرفتیم، که بیانگر یک جفت شدگی ضعیف بین سیستم و محیط است.

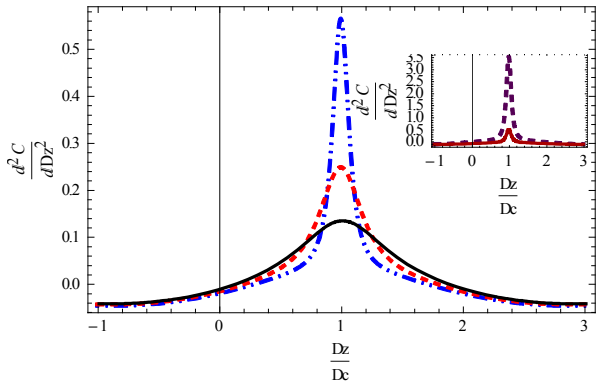
۶. ۲. نتیجه و بحث

با استفاده از نمودارها به بررسی تأثیر پارامترهای برهم‌کنش DM روی گذار فاز کوانتومی، با عدم وجود اتلاف و وجود آن می‌پردازیم. همان طور که قبلاً اشاره شود در نقاط بحرانی که گذار فاز کوانتومی انجام می‌شود، مقدار درهم‌تنیدگی بیشینهٔ خود را دارا می‌باشد. همچنین توضیح داده شد که مشتق تابع توافق سیستم در نقاط بحرانی دارای ناپیوستگی و یا به عبارتی دیگر دارای یک واگرایی می‌باشد. شکل ۱۷ مشتق دوم تابع توافق سیستم، که رابطهٔ تنگاتنگی با انرژی حالت پایه سیستم دارد، را نشان می‌دهد. با مشاهدهٔ شکل ۱۷ پی می‌بریم که مشتق مرتبهٔ دوم تابع توافق یک ناپیوستگی، و یا واگرایی، را در فضای پارامتری که بر حسب D_Z رسم شد، نشان می‌دهد که همان‌طور که گفته شد یک گذرا فاز کوانتومی مرتبهٔ دوم را به نمایش می‌گذارد. وجود تکینگی در مشتق‌های تابع توافق شرط کافی برای وجود نقطهٔ بحرانی و یا گذار فاز کوانتومی در سیستم فیزیکی محسوب می‌شود [۵۲]. بنابراین در این نمودار به خوبی این تکینگی را در نقطهٔ صفر شاهد هستیم؛ این بیانگر یک گذار فاز کوانتومی مرتبهٔ دوم در سیستم است. که همان‌طور که گفته شد، بیانگر یک گذار فاز کوانتومی از نل گاف‌دار یا فاز پادفرومغناطیس (AFM) به فاز مایع لوتینگر گاف‌دار (LL) در نقطهٔ بحرانی می‌باشد. نکتهٔ جالب توجه دیگری که از این نمودار قابل برداشت است، تأثیر قابل توجه پارامتر J_Z در اندازهٔ مقدار بیشینهٔ این تکینگی می‌باشد به طوری که با بزرگتر شدن آن، مقدار بیشینهٔ این تکینگی در مشتق دوم تابع توافق کاهش می‌یابد.

اما در نمودار ۱۸ می‌توان یکی از اکسترمم‌های نسبی مشتق

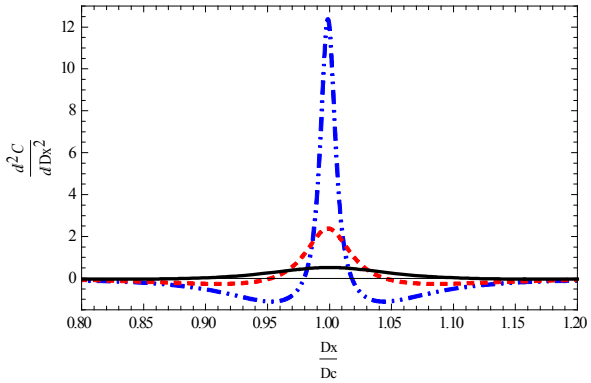


شکل ۱۸. تغییرات مشتق اول تابع توافق بر حسب پارامتر D_Z، نمودار با در نظر گرفتن $t=۱$، $\gamma=۰/۲$، $T=۱$ و $J=۱$ و برای خط چین بالایی $J_Z=۰/۲$ و برای خط ضخیم پایینی $J_Z=۱$ به دست آمده است. نمودار اصلی تغییرات را در غیاب اتلاف و نمودار دوم (گوشه سمت راست) با وجود اتلاف نشان می‌دهد.



شکل ۱۹. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق با وجود اتلاف برحسب D_Z به ازای $J=۰/۱$، خط نقطه چین آبی $J_Z=۰/۱$، خط چین قرمز $J_Z=۰/۲۵$، و خط پررنگ سیاه $J_Z=۰/۵$. شکل الحاقی گوشهٔ سمت راست حالت اتلافی(خط پررنگ) و غیر اتلافی (خط چین) را با هم مقایسه می‌کند. $D_c=۱$ بیانگر نقطهٔ بحرانی می‌باشد.

مرتبهٔ اول تابع توافق را مشاهده کرد، با رسم نمودار برای مشتق مرتبهٔ اول تابع توافق می‌بینیم که در آن نقطهٔ تکینگی وجود ندارد. به عبارت دیگر هیچ گذار فاز کوانتومی مرتبهٔ اولی برای سیستم وجود ندارد، اما در اینجا نیز تأثیر معکوس پارامتر J_Z در اندازهٔ مقدار بیشینهٔ اکسترمم‌های نسبی تابع توافق را شاهد هستیم، به طوری که سیستم با J_Z بزرگتر دارای مقدار بیشینهٔ نسبی کوچکتری می‌باشد. از طرف دیگر می‌توان تأثیر اتلاف بر روی اکسترمم‌های نسبی تابع توافق را در تصویر الحاقی

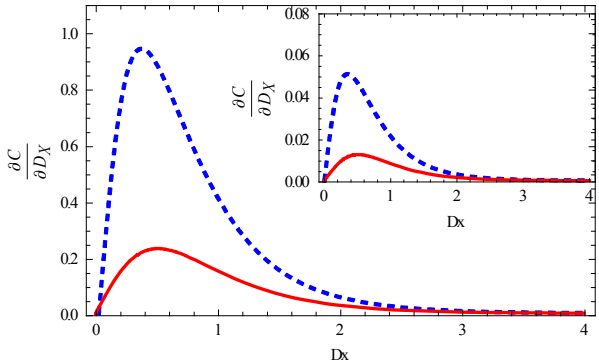


شکل ۲۰. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق برحسب D_X به ازای $J=۰/۱$، خط نقطه چین آبی $J_Z=۰/۱$، خط چین قرمز $J_Z=۰/۲۵$، و خط پررنگ سیاه $J_Z=۰/۵$ است. $D_c=۱$ بیانگر نقطهٔ بحرانی می‌باشد.

نمودار کوچک گوشه بالا سمت راست شکل ۱۷ نیز مشاهده کرد، که در آن اتلاف به طور آشکاری باعث کاهش اندازهٔ بیشینه اکسترمم‌های نسبی تابع توافق سیستم می‌شود، ولی با این وجود یک بیشینهٔ نسبی با اندازهٔ کمتر برای تابع توافق سیستم وجود خواهد داشت. همچنین تأثیر اتلاف را روی تکینگی‌های مشتق دوم تابع توافق برای حالت‌های مختلف در شکل ۱۹ مشاهده می‌کنیم، همان‌طور که انتظار داریم در نتیجهٔ برهم‌کنش سیستم با محیط اطراف مقدار بیشینهٔ این تکینگی‌های سیستم کاهش می‌یابد، اما نکته قابل توجه این است که با وجود اتلاف در سیستم، این تکینگی‌های مشتق مرتبهٔ دوم همچنان باقی می‌مانند، که بیانگر این است که اگرچه در نتیجهٔ اتلاف ناشی از برهم‌کنش با محیط در سیستم، مقدار بیشینهٔ این تکینگی‌ها، واگرایی‌ها، کاهش می‌یابد، اما با این حال سیستم همچنان دارای نقطهٔ بحرانی بوده و گذار فاز کوانتومی در سیستم رخ خواهد داد. در تصویر الحاقی شکل ۱۹ مقایسه بین این تکینگی‌ها را در حالت بودن اتلاف و وجود اتلاف مشاهده می‌کنیم.

۶. ۳. پارامتر راستای x جفت شدگی DM

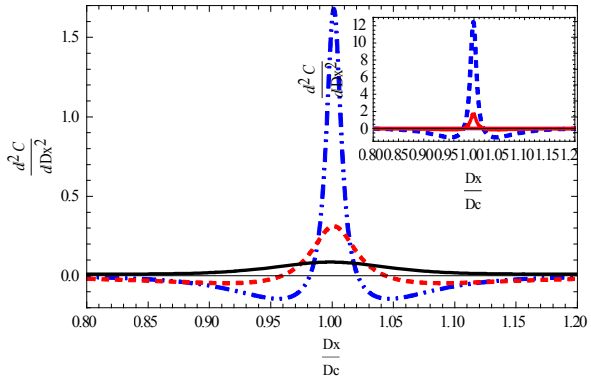
نمودار تغییرات مشتق تابع توافق به شکل زیر خواهد بود (شکل ۲۰، ۲۱ و ۲۲). نمودارهای حالت اتلافی به ازای $\gamma=۰/۲$ رسم شده‌اند.



شکل ۲۱. خط چین آبی $J_Z=۰/۲$ و خط قرمز $J_Z=۱$. نمودار به ازای مقادیر $t=۱$، $T=۱$ و $J=۱$ به دست آمده است. نمودار گوشه سمت راست حالت اتلافی را به ازای $\gamma=۰/۲$ نشان می‌دهد.

۶. ۴. نتیجه و بحث

نمودارهای ۲۰، ۲۱ و ۲۲ تأثیر پارامتر D_X برهم‌کنش DM را روی گذار فاز کوانتومی، با عدم وجود اتلاف و وجود آن، آشکارا نشان می‌دهد. با توجه به اینکه در نقاط بحرانی که گذار فاز کوانتومی انجام می‌شود یک ناپیوستگی در مشتق تابع توافق وجود دارد، شکل ۲۰ این تکینگی‌ها، واگرایی‌ها را در مشتق مرتبهٔ دوم تابع توافق سیستم به وضوح نشان می‌دهد، همان طور که قبلاً اشاره شد وجود ناپیوستگی (تکینگی) و یا واگرایی در مشتق‌های طیف انرژی حالت پایه، دلیلی بر وجود گذار فاز کوانتومی می‌باشد [۵۲]. وجود درهم‌تنیدگی در سیستم در بیشتر موارد از طریق طیف انرژی حالت پایه سیستم مشخص می‌شود و این دو به شدت به هم وابسته هستند از این رو اندازهٔ درهم‌تنیدگی که در این مقاله با تابع توافق تفسیر می‌شود، معرف انرژی حالت پایهٔ سیستم نیز می‌باشد پس هرگونه تکینگی و ناپیوستگی در تابع توافق سیستم مبین ناپیوستگی و واگرایی در انرژی حالت پایهٔ سیستم می‌باشد. شکل ۲۰ وجود واگرایی در انرژی حالت پایه را به خوبی نشان می‌دهد، از این رو یک گذار فاز کوانتومی مرتبهٔ دوم را در سیستم‌های با این نوع برهم‌کنش و با این پارامتر برهم‌کنشی خاص شاهد هستیم که یک گذار فاز کوانتومی از نل گاف‌دار یا فاز پادفرومغناطیس (AFM) به فاز مایع لوتینگر گاف‌دار (LL) در نقطهٔ بحرانی می‌باشد. اما تفاوتی که در این حالت با حالت قبلی وجود دارد این است که اگر قله تکینگی را معرف تأثیرگذاری پارامتر در گذار فاز کوانتومی در نظر بگیریم، از نمودار ۲۰ شاهد



شکل ۲۲. نمودار تغییرات مشتق دوم تابع توافق برحسب D_X به ازای $J=۰/۱$، خط نقطه چین آبی $J_Z=۰/۱$، خط چین قرمز $J_Z=۰/۵$، و خط پررنگ سیاه $J_Z=۰/۵$. شکل الحاقی گوشه سمت راست حالت اتلافی(خط پررنگ) و غیر اتلافی (خط چین) را با هم مقایسه می‌کند. $D_c=۱$ بیانگر نقطه بحرانی می‌باشد.

هستیم که پارامتر D_X نسبت به D_Z تأثیرگذارتر بوده و مقدار قلهٔ بیشتری را برای واگرایی در مشتق مرتبهٔ دوم تابع توافق به همراه دارد. اندازهٔ این تکینگی‌ها برای پارامترهای D_X نسبت به D_Z بیشتر می‌باشد. اکسترمم‌های نسبی مشتق اول تابع توافق نیز برای این حالت از پارامتر برهم‌کنشی در شکل ۲۱ رسم شده است، که هیچ گونه گذار فاز کوانتومی مرتبهٔ اولی را نشان نمی‌دهد. تأثیر اتلاف بروی اکسترمم‌ها نیز در تصویر الحاقی، نمودار کوچک گوشه بالا سمت راست شکل ۱۹ مشاهده می‌شود که مانند حالت قبلی اتلاف باعث کاهش اندازهٔ این اکسترمم‌ها می‌شود. همانند حالت قبلی نکته دیگری که از شکل ۲۰ و ۲۲ می‌توان به دست آورد، تأثیر معکوس پارامتر J_Z در اندازهٔ قلهٔ تکینگی مشتق دوم تابع توافق سیستم می‌باشد. به طوری که سیستم با J_Z بزرگتر دارای مقدار قلهٔ کوچکتری برای این واگرایی‌ها می‌باشد. و البته تأثیر آن در این تغییر (اندازهٔ قله) برای پارامتر برهم‌کنشی D_X بسیار بیشتر می‌باشد. از طرفی دیگر می‌توان تأثیر اتلاف بر روی این نقاط بحرانی را در شکل ۲۲ مشاهده کرد، که به طور آشکاری اتلاف باعث کاهش پیک واگرایی مشتق دوم تابع توافق سیستم می‌شود، ولی با این وجود این واگرایی همچنان در سیستم باقی می‌ماند. تصویر الحاقی شکل ۲۲ تکینگی‌ها را در غیاب اتلاف و وجود اتلاف با هم مقایسه می‌کند.

مراجع

1. M A Nielsen and I L Chuang, "*Quantum Computation and Quantum Information",* Cambridge University press (2000).
2. C H Bennett, G Brassard, C Crepeau, R Jozsa, A Peres, and W K Wttersoo, *Phys. Rev. Lett*. **70** (1993) 1895.
3. D Bouwmeester, J W Pan, K Mattle, M Eibl, H Weinfurter, and A Zeilinger, *Nature* **390** (1997) 575.
4. D Boschi, S Branca, F De Martini, L Hardy, and S Popescu, *Phys. Rev. Lett*. **80** (1998) 1121.
5. A Furusawa, J L Sorensen, S L Braunstein, C A Fuchs, H J Kimble, and E S Polzik, *Science* **282** (1998) 706.
6. C H Bennett and S J Wiesner, *Phys. Rev. Lett*. **69** (1992) 2881.
7. A K Ekert, *Phys. Rev. Lett*. **67** (1991) 661.
8. H J Briegel and R Raussendorf, *Phys. Rev. Lett*. **86** (2001) 910; R Raussendorf and H J Briegel, *Phys. Rev. Lett*. **86** (2001) 5188.
9. C H Bennett, D P Di Vincenzo, J A Smolin, and W KWootters, *Phys. Rev*. A **54** (1996) 3824.
10. C H Bennett, H J Bernstein, S Popescu, and B Schumacher, *Phys. Rev*. A **53** (1996) 2046.
11. P Štelmachovič and V Bužek, *Phys. Rev*. A **70** (2004).
12. A Hutton and S Bose, *Phys. Rev*. A **69** (2004) 042312.
13. D Braun *et al., Phys. Rev. Lett*. **89** (2002) 277901.
14. F Benatti *et al*., *Phys. Rev. Lett*. **91** (2003) 070402.
15. S Sachdev, "*Quantum phase transitions",* Cambridge University Press, (1999).
16. S L Sondhi, S M Girvin, J P Carini, and D Shahar, *Rev. Modern Phys*. **69** (1997) 315.
17. D A Lidar, D Bacon, and K B Whaley, *Phys. Rev. Lett*. **82** (1999) 4556; D P Di Vincenzo *et al*., *Nature* **408** (2000) 339; L F Santos, *Phys. Rev*. A **67** (2003) 062306.
18. B E Kane, *Nature* **393** (1998) 133.
19. D Loss and D P Di Vincenzo, *Phys. Rev*. A **57** (1998) 120; G Burkard, D Loss, and D P Di Vincenzo, *Phys. Rev*. B **59** (1999) 2070; B Trauzettel *et al*., *Nature Phys*. **3** (2007) 192.
20. T Senthil *et al*., *Phys. Rev*. B **60** (1999) 4245; M Nishiyama *et al*., *Phys. Rev. Lett*. **98** (2007) 047002.
21. A Sørensen and K Mølmer, *Phys. Rev. Lett*. **83** (1999) 2274.
22. S Hill and W K Wootters, *Phys. Rev. Lett*. **78** (1997) 5022; W K Wootters, *Phys. Rev. Lett*. **80** (1998) 2245.
23. M R Gallis, *Phys. Rev*. A **53** (1996) 655.
24. S Habib *et al*., *Phys. Rev. Lett*. **76** (1996) 4660.
25. W V Liu and W C Schieve, *Phys. Rev. Lett*. **78** (1997) 3278.
26. S Gao, *Phys. Rev. Lett*.**79** (1997) 3101.
27. A K Rajagopal, *Physica* A **253** (1998) 271.
28. G Lindblad, *Comm. Math. Phys*. **48** (1976) 119.
29. V Gorini *et al., J. Math. Phys*. **17** (1976) 821.
30. A K Kolezhuk, *Phys. Rev*. B **53** (1996) 318.
31. S Yamamoto, *Phys. Rev*. B **55** (1997) 3603.
32. J Dukelsky and S Pittel, *Phys. Rev*. B **56** (1997) 10770.
33. S S Aplesnin, *Phys. Rev*. B **61** (2000) 6780.
34. H Onishi and S Miyashita, *Phys. Rev*. B **64** (2001) 014405.
35. Y Narumi, M Hagiwara, M Kohno, and K Kindo, *Phys. Rev. Lett*. **86** (2001) 324.
36. L Capriotti, F Becca, S Sorella, and A Parola, *Phys. Rev*. B **67** (2003) 172404.
37. N Maeshima, K Okunishi, K Okamoto, and T Sakai, *Phys. Rev. Lett*. **93** (2004) 127203.
38. S-S Gong and G Su, *Phys. Rev*. B **78** (2008) 104416.
39. T Fukui and N Kawakami, *Phys. Rev*. B **57** (1998) 398.
40. J Almeida, M A Martin-Delgado, and G Sierra, *Phys. Rev*. B **76** (2007) 184428.
41. E Canevet *et al*., *Phys. Rev*. B **82** (2010) 132404.
42. T J Osborne and M A Nielsen, *Quantum Inf Process* **1** (2002) 45.
43. I Dzyaloshinsky, *J. Phys. Chem. Solids* **4** (1958) 241; T Moriya, *Phys. Rev*. **120** (1960) 91.
44. X G Wang, *Phys. Rev*. A **66** (2002) 044305.
45. Y Sun *et al*., *Phys. Rev*. A **68** (2003) 044301.
46. G F Zhang and S S Li, *Phys. Rev*. A **72** (2005) 034302.
47. M C Arnesen *et al*., *Phys. Rev. Lett*. **87** (2001) 017901.
48. M Asoudeh and V Karimipour *Phys. Rev*. A **71** (2005) 022308.
49. D Gunlycke *et al*., *Phys. Rev*. A **64** (2001) 042302.
50. M A Nielsen, arXiv:quant-ph/0011036.
51. H Ollivier and W H Zurek, *Phys. Rev. Lett*. **88** (2001) 017901.
52. A Osterloh, L Amico, G Falci, and R Fazio, *Nature* **416** (2002) 608
53. L E Reichl, "*A Modern Course in Statistical Physics",* John Wiley & Sons, New York (1998).
54. M R Soltani, S Mahdavifar, A Akbari, and A A Masoudi, *J. Supercond. Nov. Magn*. **23** (2010) 1369.