مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۵، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۸۴

ماده تاریک یا دینامیک دیگر؟

یوسف ثبوتی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه - زنجان

پست الکترونیکی: sobouti@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۴/۲/۲۳)

چکیده

اگر انرژی میدان گرانش بتواند نقشی در تولید خود داشته باشد، اجرام گراننده میدانی قویتر از آن چه قانون نیوتن اجازه می‌دهد از خود نشان خواهند داد و به زبان نیوتنی پر جرمتر ظاهر خواهند شد. بسته به میزان فشردگی جرم گراننده این افزایش ممکن است تا پنج برابر برسد و در تفسیر منحنی سرعت کهکشانهای مارپیچی، پراکندگی سرعت در خوشه‌های کهکشانها و یا توجیه قاعده تالی- فیشر به کار بیاید. دینامیکی که بر مبنای یاد شده به دست می‌آید از اصل هم‌ارزی پیروی می‌کند. ولی از اصل برهم‌نهی، تنها به طور تقریبی و در مورد سیستمهایی که اجزای آن به قدر کافی از هم دور باشند پیروی می‌کند.

واژه‌های کلیدی: ماده تاریک، دینامیک نانیوتنی

۱. مقدمه

"The only justification for our concepts and system of concepts is that they serve to represent the complex of our experiences. Beyond this they have no legitimacy."

آلبرت اینشتین، ۱۹۲۲ [۱]

دو مشاهده نجومی نشان می‌دهند جرم روشن ستاره‌ها و کهکشانها دینامیک حاکم بر این سیستمها را تامین نمی‌کنند.

الف) مسئله منحنی سرعت: بنا به دو قانون حرکت و گرانش نیوتن، سرعت یک ستاره در خارج از یک کهکشان کروی برابر با $\upsilon=\sqrt{GM/r}$ و در داخل آن (مشروط بر این که توزیع جرم یکنواخت باشد) برابر با $\upsilon=\sqrt{GM/R^{3}}\ r$ است، که در آن M جرم کهکشان، R شعاع آن، υ سرعت ستاره در مدار دایروی و فاصله از مرکز کهکشان است. بنابراین انتظار می‌رود اگر سرعت رصد شده ستاره‌ها بر حسب فاصله از کهکشان رسم شوند، منحنی در فواصل نزدیک متناسب با بالا رود و در فواصل دور، متناسب با $1/\sqrt{r}$ پایین بیاید. در هر دو حال، υ متناسب با جذر جرم کل M است. ولی مشاهدات نجومی چنین چیزی را نشان نمی‌دهند. نخست آنکه جرم M کهکشان که بر مبنای نورسنجی و شمارش ستارگان به دست می‌آید (جرم روشن) بسیار کمتر از جرم دینامیکی‌ای است که فرمولهای یادشده لازم دارند. جرم روشن قابل مشاهده ممکن است به ده درصد جرم دینامیکی مورد نیاز هم نرسد. دوم آنکه در فواصل بسیار دور از کهکشان منحنی سرعت با شیب مورد انتظار $1/\sqrt{r}$ پایین نمی‌آید و اکثراً به یک مجانب افقی نزدیک می‌شود.

ب) مسئله جرم ویریال: باز بنا به قانونهای نیوتن در سیستمهای دینامیکی پایدار، $2T+V=0$ است که درآن T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل گرانشی سیستم است. در دستگاه مختصات مرکز جرمِ مجموعه‌های کهکشانی، T متناسب با جرم مجموعه

و متوسط مجذور سرعتها است. انرژی پتانسیل متناسب با مجذور جرم و عکس فاصله متوسط بین اجزای مجموعه‌هاست. از قضیه ویریال نتیجه می‌شود $<\upsilon^{2}> \approx GM/<r>$. در مجموعه‌های کهکشانی نیز از سالهای ۱۹۳۰ نشان داده شده است که جرم دینامیکی لازم در این رابطه بسیار بیشتر از جرم روشن مجموعه است.

تفاوت جرم دینامیکی و جرم روشن در اصطلاح اختر فیزیک پیشه‌گان نخست به جرم گمشده معروف شد، بعدها بعضی از صاحب‌نظران وجود آن را مسلم دانستند ولی چون راهی برای دیدن آن نداشتند عنوان ماده تاریک به آن دادند. پس از بیان این مفاهیم مقدماتی به بحث تخصصی چیستان ماده تاریک می‌پردازیم.

در ۱۹۸۵ وان آلبادا و همکارانش [۲] چنین نوشتند: "موضوع ماده‌تاریک در کهکشانهای مارپیچی از تاریکترین ناشناخته‌های اختر فیزیک معاصر است. سالها پژوهش روشنایی چندانی بر آن نتابانده است." دست‌اندرکاران ماده تاریک در آن سالهای محتاط‌تر بودند. باکال و کاسرتانو [۳] از جرم گمشده مترادف با روشنایی گم شده سخن می‌گفتند، یا ترمین و لی [۴] منظورشان از جرم تاریک آن بود که تنها اثر گرانشی داشته باشد. منتقدان ماده تاریک نیز خاموش نبودند. شاخص‌ترین آنها میلگروم، معمار نظریه (MOND)[1] [۵] از رویهٔ تاریک نظریه ماده تاریک سخن می‌گفت که هر کجا نیاز باشد به اندازه لازم و با توزیع دلخواه به میان کشیده می‌شود تا چیستان جرم گم شده را حل کند [۶].

در دو دهه گذشته منحنیهای سرعت دقیق از کهکشانهای مارپیچی به دست آمده‌اند. نک: بگمان و همکاران [۷]، ساندرس [۸]، ساندرس و فرهاین [۹]، مک گاف و دبلوک [۱۰]. داده‌های خوبی نیز از پراکندگی سرعت در مجموعه‌های کهکشانی فراهم شده است. نک: تالی و همکاران [۱۱] برای داده‌های مجموعه خرس بزرگ. از جهات نظری انواع ماده تاریک با طبایع مختلف پیشنهاد شده است. سیاهه‌ای که اخیراً توسط اوسترایکر و استاین‌هارت [۱۳] گردآوری شده، اقلام زیر را شامل می‌شود: ماده تاریک سرد بی برخورد، ماده تاریک با خود برهم کنش قوی، ماده تاریک گرم، ماده تاریک خود گریز، ماده تاریک فازی، ماده تاریک خود خور، ماده تاریک تباهی پذیر و غیره. ولی علی‌رغم همه این یافته‌ها و نظریه پردازیها گشایشی در جهت فهم طبیعت ماده تاریک و قوانین فیزیکی حاکم بر آن حاصل نشده است. چیستان به نظر نمی‌رسد روشنتر از آن باشد که وان آلبادا و همکارانش در [۲] توصیف کردند. نظرات موافق و مخالف همانند یک ربع قرن پیش است. موافقین قوانین نیوتن را در مقیاس کهکشانی و فراکهکشانی معتبر می‌دانند و برای تأمین گرانش گم شده از نوعی ماده تاریک یاری می‌جویند. از سوی دیگر منتقدان، منطقی در به میان کشیدن پای ماده تاریک نمی‌بینند که معضل گرانش را به‌گشاید ولی با هیچ روش شناخته شده فیزیکی قابل آشکارسازی نباشد.

در سال جهانی فیزیک که به مناسبت یک صدمین سال نظریه نسبیت خاص و تجلیل از اینشتین اعلام شده است، شاید روایت گوشه‌ای از تاریخ گسترش فیزیک بی‌مناسبت نباشد. در دهه پایانی قرن نوزدهم فیزیک پیشه‌گان به اتفاق پذیرفته بودند که نور، موج الکترومغناطیسی است. و با توجه به شناختشان از امواج در محیطهای مادی، برای نور نیز یک محیط انتشار به نام اِتر آفریده بودند. ولی همه کوششها برای آشکارسازی اتر ناکام می‌ماند. با وجود این ضرورت محیط انتشار آن چنان بدیهی می‌نمود که بعضی از نوابغ زمان به دنبال نظریه‌هایی رفتند که اتر را داشته باشند ولی مخفی داشته باشند. تبدیلهای مشهور لورنتز و انقباض طول فیتز جرالد ابتدا برای تفسیر نتایج منفی آزمایشهای فیزو، مایکلسون و مایکلسون – مورلی پیشنهاد شده بودند، نه به خاطر نسبیت خاصی که سالها بعد به وجود آمد و تبدیلهای لورنتز در بنیان آن قرار گرفت. در حوصله اینشتین بود که صغری و کبری کند و سپس به صدای رسا اعلام کند: مفاهیمی که به کار می‌بندیم از آن رو معتبرند که بتوانند مجموعه تجربیات را

۱. Modifield Newtonian Dynamics

تفسیر کنند. ورای آن مشروعیتی ندارند. اگر اتِر خود را نمی‌نمایاند بگذاریم نهفته بماند. اگر آزمایشها نشان می‌دهند که سرعت نور در همه دستگاههای مختصات ثابت است بپذیریم که واقعیت همان است و فیزیک نوین را بر آن استوار کنیم.

در این سالهای نخست قرن بیست و یکم از هشیاری به دور نخواهد بود که سفارش اینشتین را جدیتر بگیریم. اعتبار دینامیک نیوتنی را در مقیاس منظومه شمسی و مانندهای آن بپذیریم که آزموده شده است. ولی در مقیاس کهکشانی و فراکهکشانی به دنبال جایگزین باشیم که مکانیک نیوتنی در بوته آزمایش این وادی بی‌غش نبوده است. میلگروم از نخستین کسانی است که در این جهت گام برداشته است. ساندرس [۱۳] کارهای او و دیگران را دوره می‌کند. نظریه میلگروم، علی‌رغم توانایی در تفسیر منحنیهای سرعت، در چارچوب نسبیت عام قابل تعمیم نیست و از جهات دیگر نیز مورد انتقاد بوده است. در این نوشته پیشنهاد می‌کنیم که انرژی متمرکز در میدان گرانش بتواند خودزا باشد. در قالب فرمولبندی لاگرانژی و حساب تغییرات عمل می‌کنیم. تعمیمی از قوانین نیوتن را به دست می‌دهیم. نارساییهای پیشنهادمان را نیز خاطرنشان می‌کنیم و رفع آنها را در فرمولبندی هموردا در چارچوب نسبیت عام می‌بینیم و به فرصت دیگر موکول می‌کنیم.

۲. فرمولبندی لاگرانژی

سیستم مورد نظر مجموعه‌ای از نقاط مادی با جرم m_i و مکان $\mathbf{x}_i$، $(i=1,2,\dots,N)$ به علاوه میدان گرانش $\phi(\mathbf{x})$ است دو قانون حرکت و گرانش نیوتن به کمک حساب تغییرات از انتگرال کنش زیر به دست می‌آید.

$$I=\int L\,dt,\quad L[\mathrm{x}_i,\phi(\mathbf{x})]=\sum m_i\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}_i^2+\phi(\mathbf{x}_i)\right]-\frac{1}{8\pi G}\int\left|\nabla\phi(\mathbf{x})\right|^2 d^3x. \qquad (1)$$

چگالی انرژی میدان در نقطهٔ $\mathbf{x}$ برابر $(8\pi G)^{-1}\left|\nabla\phi(\mathbf{x})\right|^2$ است. این انرژی بنابر نظریه نسبیت خاص اینشتین معادل جرمی دارد. پیشنهاد می‌شود ضریبی از آن بتواند مطابق قانون کلاسیک نیوتن میدان بیافریند. انرژی پتانسیل جرم m_i در نقطهٔ $\mathbf{x}_i$ از این گذر برابر خواهد بود با

$$\alpha G m_i(8\pi G C^2)^{-1}\left|\nabla\phi(\mathbf{x})\right|^2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|^{-1}$$

سهم همه m_iها از تمام نقاط فضا در انتگرال کنش برابر خواهد بود.

$$I_{\text{int}}=\int L_{\text{int}}dt,\quad L_{\text{int}}[\mathbf{x}_i,\phi(x)]=\frac{1}{8\pi}\frac{\alpha}{C^2}\sum_i m_i\int\frac{\left|\nabla\phi(\mathbf{x})\right|^2}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|}d^3x. \qquad (2)$$

ضریب بی‌بعد α از مرتبه"یک" است که به عنوان پارامتر آزاد که بعداً تعیین می‌شود پیش‌بینی شده است. در هر حال عبارت $\alpha G m_i/C^2$ از مرتبهٔ شعاع شوارتزشیلد و بسیار کوچک است (برای جرم زمین چند ده سانتیمتر و برای جرم خورشید حدود ۱۰ کیلومتر).

۲. ۱ معادله میدان

از صفر کردن مشتق تابعی لاگرانژی کل نسبت به $\phi(\mathbf{x})$ به دست می‌آید:

$$\frac{\delta(I+I_{\text{int}})}{\delta\phi(\mathbf{x})}=\nabla.\left[\nabla\phi(\mathbf{x})\left\{1-\frac{\alpha G}{C^2}\sum\frac{m_i}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|}\right\}\right]+4\pi G\sum m_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)=0 \qquad (3)$$

با درنظر گرفتن این که $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)=\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|^{-1}$ است، از معادله (۳) نتیجه می‌شود.

$$\nabla\phi\left\{1-\frac{\alpha G}{C^2}\sum_i\frac{m_i}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|}\right\}=-G\nabla\sum\frac{m_i}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|} \qquad (4)$$

با توجه به این که پتانسیل نیوتنی برابر است با $\phi_N(\mathbf{x})=-G\sum\frac{m_i}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\right|}$, نتیجه می‌شود

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{C^2}{\alpha}\ln\left[1+\alpha\frac{\phi_N(\mathbf{x})}{C^2}\right]=\phi_N\left[1-\frac{1}{2}\alpha\frac{\phi_N}{C^2}+\frac{1}{3}\alpha^2\frac{\phi_N^2}{C^4}+\cdots\right]. \qquad (5)$$

۲. ۲. معادله حرکت

برای جرم m_i از صفر کردن مشتق تابعی $I+I_{\rm int}$ نسبیت به $\mathbf{x}_i$ به دست می‌آید:

$$\frac{\delta(I+I_{\rm int})}{\delta\mathbf{x}_i}=m_i\left[\ddot{\mathbf{x}}_i-\nabla_i\phi(\mathbf{x}_i)-\frac{۱}{۸\pi}\frac{\alpha}{C^۲}\nabla_i\int\frac{|\nabla\phi(\mathbf{x})|^۲}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}d^۳x\right]=۰ \quad (۶)$$

امتحان شود که در همه فرمولهای فوق، با صفر کردن α، جوابهای نیوتنی به دست می‌آیند. برای درک نقش تغییراتی که در معادلات حرکت و میدان داده شده به حل چند مثال ساده مبادرت می‌شود.

۳. کاربردهای ساده

۳. ۱. گرانش اجرام کروی

کره‌ای به شعاع R، به جرم M و چگالی یکنواخت در مبداء مختصات در نظر بگیریم. از معادله (۵)، میدان در خارج از کره به دست می‌آید.

$$\phi(r)=\frac{GM}{S}\ln\frac{r-S}{r}=-\frac{GM}{r}\left(۱+\frac{۱}{۲}\frac{S}{r}+\cdots\right),\quad r\geq R,$$
$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{GM}{r(r-S)},\quad S=\frac{\alpha GM}{C^۲},\qquad r\geq R \qquad (۷)$$

که در آن $S=\alpha GM/C^۲$ از مرتبه شعاع شوارتزشیلدِ جرم M است. در داخل کره، با توجه به این که گرانش نیوتنی $\phi_N(r)=-\frac{۱}{۲}\frac{GM}{R^۳}(۳R^۲-r^۲)$ است از معادله (۵) نتیجه می‌شود.

$$\phi(r)=\frac{C^۲}{\alpha}\ln\left[۱-\frac{۳}{۲}\frac{S}{R}+\frac{۱}{۲}\frac{S}{R}\frac{r^۲}{R^۲}\right],\qquad r\leq R,$$
$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{GM}{R^۲}\frac{r}{R}\left[۱-\frac{۳}{۲}\frac{S}{R}+\frac{۱}{۲}\frac{S}{R}\frac{r^۲}{R^۲}\right]^{-۱},\qquad r\leq R. \qquad (۸)$$

۳. ۲. حرکتِ سیاره در میدان جرم کروی

معادله حرکت سیاره با جایگزاری معادلات (۷) و (۸) در معادله (۶) و انجام اعمال ریاضی لازم به دست می‌آید

$$m\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{GmM}{r^۲}\left[۱+u\left(\frac{S}{R}\right)+\frac{S}{r-S}\right]\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (۹)$$

که در آن $u(S/R)$ از جمله انتگرالی موجود در معادله (۶) حاصل شده است. محاسبات ریاضی و عددی و رسم منحنی تغییرات آن در پیوست الف آمده است. اگر جرم مرکزی پخش باشد (R بزرگ) S/R خیلی کوچک و u عملاً نزدیک به صفر است. با تراکم جرم مرکزی S/R و u هر دو افزایش می‌یابند و به ازای $S/R=\frac{۲}{۳}$، که بیشترین مقدار مجاز است، مقدار u برابر چهار می‌شود. نتیجه این که میدان گرانش یک جرم فشرده قویتر از میدان همان جرم در حالت پراکندگی است. در فشرده‌ترین حالت این قوت می‌تواند تا $۱+u\left(\frac{۲}{۳}\right)=۵$ برابر افزایش یابد بدون این که نیاز به فرض ماده تاریک باشد. جمله سوم در معادله (۹) به دو سبب ناچیز و قابل اغماض است: الف) به خاطر ضریب کوچک S در آن. ب) به خاطر افت سریع آن، تقریباً متناسب با $^{-۳}$، در مقایسه با افت $^{-۲}$ دو جمله دیگر.

۳. ۳. مسئله چند جسم

مجموعه‌ای از اجرام کروی هریک به جرم M_i، شعاع R_i و مکان $\mathbf{x}_i$ درنظر بگیریم. فرض کنیم که اجرام از همدیگر چنان دوراند که $|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|>>R_i$ به ازای همه iها و jهاست. در پیوست نشان داده شده است که انتگرال معادله (۶) به صورت مجموع چند جمله در می‌آید، معادله (۷.الف). و مآلاً معادله حرکت برای جرم i به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$\ddot{\mathbf{x}}_i-G\sum M_j^{eff}\frac{(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|^۳}=۰. \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$M_j^{eff}=M_j(۱+u_j),\ u_j=u(S_j/R_j)$$

معادله (۱۰) تقریبی است و در آن عبارتی از مرتبه $G\sum_j M_jS_j|r_{ij}-S_j|^{-۱}$ حذف شده است. به دو دلیل: الف) به خاطر ضریب کوچک S_i، ب) به خاطر بستگی تقریباً $r_{ij}^{-۳}$ آن در مقایسه با رفتار $r_{ij}^{-۲}$ جملات دیگر.

در چارچوب این تقریب، معادله (۱۰) همان معادله نیوتن برای چند جسم است. جز این که به جای جرمهای کلاسیک،

M_j، جرم مؤثر $M_j^{eff} = M_j(1+u_j)$ در آن ظاهر شده است. چنانکه در بالا اشاره شد، بسته به میزان فشردگی اجرام گراننده جرمهای مؤثر می‌توانند تا پنج برابر بزرگتر از جرمهای کلاسیک ظاهر شوند.

ثابتهای معادله (۱۰) نیز همان ثابتهای نیوتنی‌اند که در آنها جرم مؤثر جای جرم کلاسیک را گرفته باشد:

تکانه کل: $$\boldsymbol{P} = \sum M_i^{eff} \dot{\mathbf{x}}_i = \text{ثابت}, \qquad (۱۱)$$

تکانه زاویه‌ای کل: $$\boldsymbol{L} = \sum M_i^{eff} \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = \text{ثابت}, \qquad (۱۲)$$

انرژی کل: $$E = T + V, \qquad (۱۳)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i M_i^{eff} \mathbf{x}_i^2, \quad V = -\frac{1}{2} G \sum_{i\neq j} M_i^{eff} M_j^{eff} / r_{ij}$$

قضیه ویریال: $$2\overline{T} + \overline{V} = 0, \qquad (۱۴)$$

که در آن "¯" نشان متوسط‌گیری روی اعضای سیستم یا متوسط‌گیری روی زمان است. در معادلات (۱۰) – (۱۴) بزرگی جرم مؤثر نسبت به جرم متعارف است که به عنوان چاره‌ای برای جرم گم‌شده پیشنهاد می‌شود و ممکن است در تفسیر منحنی سرعت کهکشانهای مارپیچی و یا توجیه جرم ویریال بیشتر از جرم روشن در مجموعه‌های کهکشانی به‌کار بیاید و جایگزین ماده تاریک باشد.

۴. ۳. بحث و نتیجه‌گیری

"... it is contrary to the mode of thinking in science to conceive of something that can act itself, but which cannot be acted upon."

آلبرت اینشتین ۱۹۲۲ [۱]

با سخن بالا اینشتین زمینه را برای طرد فضا – زمان مطلق در حضور ماده آماده می‌سازد و ماخ را تحسین می‌کند، که از انتساب اینرسی به جسم بدون توجه به حضور اجرام دیگر در دوردستها ناخرسند است. در پیشنهاد دینامیک جدید توصیه اینشتین مدنظر بوده و سعی شده است که معادلات حرکت و میدان تأثیر متقابل بر روی هم داشته باشند. برای تأمین این نظر کنش پیشنهادی معادله (۲) مختصات اجرام، $\mathbf{x}_i$ها، ومختصات میدان، $\nabla\phi$، هر دو را در بر دارد.

نکته مهم در L_{int} حضور انرژی میدان است که مآلاً به صورت افزایش جرم در عبارت M^{eff} در معادلات (۹تا۱۴) ظاهر می‌شود. به یاد داریم که در منحنی سرعت اولاً جرم متعارف ستارگان کفاف دینامیک مورد انتظار را نمی‌دهد و ثانیاً توزیع جرم روشن، افقی بودن مجانبی آن را توجیه نمی‌کند. بزرگ بودن جرم مؤثر بخشی از کمبود جرم روشن را ممکن است جایگزین باشد. افقی بودن منحنی سرعت بستگی به توزیع اجرام فشرده خواهد داشت. به عنوان مثال اگر در کرانه‌های بازوهای مارپیچی به تعداد کافی اجرام فروریختهِ کم‌سو وجود داشته باشد می‌توانند منحنی سرعت را به قدر کافی افقی سازند.

میدان معادله (۵) بر خلاف میدان نیوتنی متناسب با جرم اجزای تشکیل‌دهنده سیستم نیست و از اصل برهم‌نهی پیروی نمی‌کند. حتی در تقریب معادله (۷.الف) نیز میدان هر عضو تابع غیرخطی پیچیده‌ای از جرم همان عضو است. این بستگی غیرخطی ممکن است در بحث تالی – فیشر مفید واقع شود. رابطه اخیر یک رابطه آماری و آمپیریک رصدی بین درخشندگی کهکشان و سرعت مجانبی منحنی سرعت است. رابطه تالی – فیشر همراه با رابطه آمپیریک و آماری دیگر بین درخشندگی و جرم کهکشان منجر به یک رابطه توانی بین سرعت مجانبی و جرم کهکشان می‌شود. $v_{asymp} \propto M^{\beta},\ 2/5 < \beta < 3/5$.

در دینامیک پیشنهادی توان β بستگی حساس به توزیع اجرام و میزان فشردگی آنها دارد و در هر مورد با توجه به عوامل یاد شده باید تجزیه و تحلیل انجام گیرد. همین ملاحظات در مورد رابطه کمتر شناخته شده‌ی فابر – جکسون نیز وجود دارد. رابطهٔ فابر – جکسون، رابطه آماری و آمپیریک دیگری بین روشنایی مجموعه‌های کهکشانی و پراکندگی سرعت در مجموعه است.

در زیر فصلهای ۳ ثابتهای حرکت با فرض برهم‌نهی تقریبی میدان گرانش بررسی شد. بهتر از این می‌توان انجام داد: لاگرانژی کل $(I + I_{\text{int}})$ تحت تبدیلهای انتقال زمان، انتقال مختصات ناورداست. بنابراین صورت تعمیم یافته‌ای از انرژی کل و تکانه زاویه‌ای کل باید ثابت باشد. بحث

بیشتر موضوع به فرصت دیگر موکول می‌شود.

بنا به قضیه بِرکهوف در گرانش نیوتنی و نسبیتی، میدان اجرام کروی مستقل از ساختار درونی جرم گراننده است. این قضیه در مورد میدان معادله (۶) صادق نیست. حضور جمله $u(S/R)$ در معادله (۹) بر این امر دلالت دارد. بنابراین با دینامیک حاضر امکان دارد مراحل فشارش یا فروریزش اجرام با بررسی میدان گرانش خارجی آنها مطالعه شود.

برابر معادله (۶) نیروی مؤثر وارد بر یک سیاره مشتق عبارتی است. چنین نیرویی را می‌توان در دستگاه مختصاتی که سقوط آزاد دارد حذف کرد. بنابراین دینامیک پیشنهادی از اصل هم‌ارزی پیروی می‌کند. این نتیجه‌گیری غیرمنتظره نیست و ریشه در ساختار کنشهای I و $I_{\rm int}$ دارد. در هر دو انتگرال معادلات (۱) و (۲) برای نوشتن انرژیهای جنبشی و گرانشی تنها یک جرم m_i به کار رفته است. بین جرم اینرسی و جرم گرانشی تفاوتی گذاشته نشده است.

بالاخره یک نقد: این که انرژی برابر جرمی دارد یک مفهوم نسبیتی است. در دینامیک پیشنهادی نیروی جاذبه آن برابر قانون گرانش نیوتن ملحوظ شده است. قابل تأملتر اینکه مقدار همین نیرو وقتی چشم‌گیر است که جرم مرکزی در ابعادی در حدود شعاع شوارتزشیلد فشرده باشد. منطق حکم می‌کند که نظریه پیشنهادی در صورت‌بندی هم‌وردا و در چارچوب نسبیت عام بازنگری شود و از اختلاط مفاهیم کلاسیک و نسبیتی پرهیز شود. چنین تفکری پی‌گیری می‌شود. در حال حاضر به دنبال معادله ژئودزیک و معادله میدانی هستیم که در آن نوعی کنش متقابل بین نقاط دور از هم، نظیر آنچه که در معادله (۲) دیده شد وجود داشته باشد. نظریه بازنگری شده باید دارای شرایط زیر باشد: پارامتر آزاد آن، α، اگر صفر شود معادلات ژئودزیک و میدان نسبیت عام به دست آید. در حد میدانهای ضعیف و $\alpha \neq 0$ نظریه حاضر نتیجه شود. در حد میدانهای ضعیف و $\alpha = 0$ دینامیک نیوتنی حاصل شود.

پیوست الف: محاسبه $L_{\rm int}$

مقادیر عددی انتگرال موجود در معادله (۲)، برای محاسبه مسیرهای سیاره‌ای، معادله (۶)، قضیه ویریال، معادله (۱۴) و جاهای دیگر لازم است. در این پیوست آن را برای یک جرم کروی یکنواخت و برای مجموعه‌ای از چنین کرات محاسبه می‌کنیم.

الف) میدان یک جرم کروی تقارن کروی دارد. انتگرال غیرنیوتنی معادله (۶) به صورت زیر در می‌آید.

$$l_{\rm int}(r) = \frac{1}{8\pi}\frac{\alpha}{C^2}\int \frac{\left|d\phi(r')/dr'\right|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'. \qquad \text{(۱.الف)}$$

نظر به این که $d\phi/dr'$ تنها تابع فاصله از مبداء است و بستگی زاویه‌ای ندارد، در جایگذاری بسط لوژاندر برای $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ فقط جمله $l=0$ مقدار غیر صفر خواهد داد. این بسط را انجام می‌دهیم، روی امتدادهای مختلف انتگرال می‌گیریم و بازه $0 < r' < \infty$ را به سه بازهٔ $0 < r' < R$، $R < r' < r$ و $r < r' < \infty$ قسمت می‌کنیم.

$$l_{\rm int} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{C^2}\left[\frac{1}{r}\int_0^R \left|\frac{d\phi(r')}{dr'}\right|^2 r'^2\, dr' + \frac{1}{r}\int_R^r \left|\frac{d\phi(r')}{dr'}\right|^2 r'^2\, dr' + \int_r^\infty \left|\frac{d\phi(r')}{dr'}\right|^2 r'\, dr'\right]. \qquad \text{(۲.الف)}$$

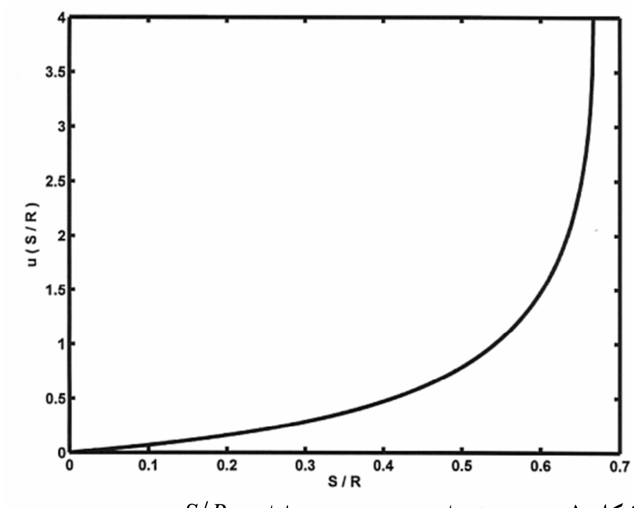
گرادیان میدان در انتگرال اول باید از معادله (۸) و در دو انتگرال دیگر از معادله (۷) جایگذاری شود. بقیه محاسبات مفصل ولی مقدماتی است. نتیجه نهایی به شکل زیر به دست می‌آید.

$$l_{\rm int} = \frac{GM}{r}u\left(\frac{S}{R}\right), \quad S = \frac{\alpha GM}{C^2}, \qquad \text{(۳.الف)}$$

که در آن

$$u(y) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{y}\left[1 - \sqrt{(2-3y)/y}\,\arctan\sqrt{y/(2-3y)}\right]. \qquad \text{(۴.الف)}$$

پارامتر S/R میزان فشردگی جرم مرکزی را نشان می‌دهد.



شکل ۱. منحنی تغییرات u بر حسب پارامتر S/R.

یک جرم پراکنده که به تدریج فشرده می‌شود S/R و هماهنگ با آن $u(S/R)$ افزایش می‌یابد. منحنی تغییرات u در شکل ۱ رسم شده است. بیشینه آن، ۴، به ازای $S/R=\frac{2}{3}$ است. تفسیر u چنین است: سیاره در مدار خود حول یک جرم فشرده، گرانش آن را $(1+u)$ برابر گرانش نیوتنی می‌بیند. به زبان نیوتنی انگار جرم فشرده، $(1+u)$ برابر جرم کلاسیک شده است.

ب) مسئله چند جسم: در معادله (۱.الف) بخش عمده انتگرال از حوالی بلافاصله جرم مرکزی تأمین می‌شود. از دور که به جسم نزدیک می‌شویم $|d\phi(r')/dr'|^2$ متناسب با r^{-4} تا سطح جسم افزایش می‌یابد و سپس از سطح تا مرکز به صفر می‌رسد. با توجه به این مطلب دو کره گرانده با جرم و شعاع (R_1,M_1) در $\mathbf{x}_1$ و (R_2,M_2) در $\mathbf{x}_2$ فرض کنیم. و فرض کنیم که دور از همدیگرند، به طوری که $|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|>>R_1,R_2$. از معادلات (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم.

$$|\nabla\phi(\mathbf{x}')|^2=\left[1-\frac{\alpha G}{C^2}\left(\frac{M_1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1|}+\frac{M_2}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2|}\right)\right]^{-2}$$
$$G^2\left[\frac{M_1^2}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1|^4}+\frac{M_2^2}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{21}|^4}+2M_1M_2\frac{(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1).(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2|^3}\right].$$
(۵.الف)

در این‌جا نیز بخش عمده L_{int} از حوالی بلافاصله کره‌های ۱ و ۲ حاصل می‌شود. منتهی، در حوالی کره یک جمله $G^2M_1^2|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1|^{-4}$ بزرگ و جمله $G^2M_2^2|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2|^{-4}$ به سبب دور بودن دو کره از هم ناچیز است. در حوالی کره ۲ نقش عوض می‌شود. جمله اول کوچک و قابل اغماض و جمله دوم بزرگ و عمده می‌شود. جمله سوم به سبب بستگی $(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1).(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2)$ به امتدادهای مختلف در انتگرال‌گیری روی زوایا عملا صفر و همیشه قابل اغماض است. نتیجه اینکه برای دو جرم دور از هم

$$l_{\text{int}}(x)\approx\frac{GM_1u_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|}+\frac{GM_2u_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|},\quad u_i=u\left(\frac{S_i}{R_i}\right),\quad i=1,2. \qquad \text{(۶.الف)}$$

با همین استدلال برای مجموعه‌ای از کرات دور از هم

$$l_{\text{int}}(x)\approx G\sum_i\frac{M_iu_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|},\qquad u_i=u(S_i/R_i). \qquad \text{(۷.الف)}$$

برهم‌نهی تقریبی میدان که در زیر فصل ۳.۳ و فصل ۴ بحث شد ناشی از صورت ساده شده ولی تقریبی معادله (۷.الف) است.

مراجع

1. A Einstein, 1922, *The Meaning of relativity*, Princeton Univ. Press,3rd. paperback, (1972).
2. T S Albada, von, J N Bahcall, K Begman and R Sancisi, *Astrophys. J., **295*** (1985) 305.
3. J N Bahcall and S Cassertano, *Astrophys. J. Lett.*, **293** (1985) L7.
4. S Tremaine and H M Lee, , in *Dark matter in the universe*, (1987) 410.
5. M Milgrom, *Astrophys. J.,* **270** (1983) (a): 365 (b): 375, and (c): 384.
6. M Milgrom: in *dark matter in the universe*, eds.: J Bahcall, T Piran and S Weinberg, Wold Scientific Publ. Co., Singapore (1987) 231.
7. K G Begeman, A H Broeils and R H Sanders, , MNRAS, **249** (1991) 523.
8. R H Sanders, *Astrophys. J.*, **473** (1996) 117.
9. R H Sanders and M A W Verheijen, *Astrophys. J.,* **503** (1998) 97.
10. S S Mc Gaugh and W J G de Blok, *Astrophys. J.,* **499** (1998) (a): 41, (b): 66.
11. R B Tully, M A W Verheijen, M J Pierce, J S Huang and R Wainscoat: *Astron. J.,* **112** (1996) 2471.
12. J M Ostriker and P Steinhardt (2003), arXiv:astro-ph/0306402.
13. R H Sanders and S S Mc Gaugh (2002), arXiv:astro-ph/0204521 v1.