محاسبه هولوگرافیک توابع دو-نقطه‌ای تانسور تنش در نظریه میدان همدیس دو بعدی با استفاده از پیمانه BMS و هولوگرافی فضا-زمانهای به طور مجانبی تخت

رضا فارغبال، پدرام کریمی
دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
r_fareghbal@sbu.ac.ir , pedramkarimie@gmail.com

در این مقاله از روش بازبهنجارش هولوگرافیک برای محاسبه توابع دو نقطه‌ای تانسور تنش نظریه میدان همدیس استفاده می‌کنیم. در قسمت گرانش فضا-زمان‌های مجانباً AdS را در پیمانه BMS می‌نویسیم و روش استاندارد بازبهنجارش هولوگرافیک را برای این فضا-زمان‌ها به کار خواهیم برد. اهمیت محاسبه توابع چند نقطه‌ای در این پیمانه به خاطر سهولت گرفتن حد فضای تخت است که در انتهای مقاله در مورد آن بحث می‌کنیم.

PACS: 02,04,10

۱. مقدمه

پیشنهاد مالداسنا برای تناظر میان نظریه میدان‌های همدیس در d بعد وگرانش در زمینه AdS در d+1 بعد[۱] ، شاخه تحقیقاتی بسیار فعالی را در حوزه فیزیک انرژی‌های بالا به وجود آورده است. یکی از سوالات باز در این زمینه گسترش دوگانی بین نظریه‌های پیمانه‌ای و نظریه‌های گرانشی به خارج از چارچوب AdS/CFTاست. در واقع سوال این است که آیا فضا-زمان‌هایی که به طور مجانبی AdS نیستند نیز دارای یک نظریه دوگان هستند؟

یکی از فضا-زمان‌های مطلوب برای بررسی دوگانی، فضا-زمان‌های مجانباً تخت هستند که با گرفتن حد فضای تخت از فضا-زمان‌های مجانباً AdS به دست می‌آیند. منظور از حد تخت در فضا-زمان‌های مجانباً AdS حدی است که ثابت کیهان‌شناسی (که برای فضا-زمان‌های مجانباً AdS منفی است) به سمت صفر میل کند. صفر شدن ثابت کیهان‌شناسی از دید متریک مجانباً AdS به صورت صفر شدن شعاع AdS جلوه می‌کند. می‌توان پرسشی به این صورت مطرح کرد که حد تخت درسمت گرانش متناسب با چه حدی در سمت نظریه میدان دوگان خواهد بود. خوشبختانه پیشنهادی برای این موضوع در مقالات[۲،۳] مطرح شده است که حد تخت گرانشی را با حد فرانسبیتی در سمت نظریه میدان همدیس معادل می‌گیرد. بر مبنای این پیشنهاد ، دوگان به فضاهای مجانباً تخت یک نظریه میدان همدیس منقبض شده یا CCFT است و این دوگانی Flat/CCFT نام گرفته است.

بر مبنای دوگانی Flat/CCFT می‌توان محاسبات جالبی با استفاده از حدگرفتن از محاسبات AdS/CFT انجام داد. به عنوان مثال در مقاله [۴] نشان داده شده است که آنتروپی حل کیهان‌شناختی که از حد تخت سیاه‌چاله BTZ به دست می‌آید با فرمولی شبیه فرمول کاردی در CCFT داده می‌شود. آنتروپی درهمتنیدگی برای CCFT ها با استفاده از محاسبات هولوگرافیک در فضاهای مجانباً تخت در مقاله[۵] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین محاسبه توابع چند نقطه‌ای CCFT_2 ها با استفاده ار روش هولوگرافیک اخیرا در مقالات [۶] و [۷] انجام شده است.

دو نوع محاسبه در راستای تکمیل دیکشنری Flat/CCFT قابل انجام است. روش اول این است که به صورت مستقل از AdS/CFT به Flat/CCFT نگاه کرد و سعی کرد محاسبات مربوط به CCFT را به یک محاسبه معادل در فضاهای مجانباً تخت مربوط دانست. روش دوم این است که از محاسبات AdS/CFT حد گرفت. روش دوم به لحاظ محاسباتی ساده‌تر به نظر می‌رسد چون کافی است در محاسبات سمت گرانش شعاع AdS را به صفر میل داد. اما در عمل این‌گونه محاسبات به مشکل بر می‌خورد چون تعریف فضاهای مجانباً AdS به صورت معمول که با مختصات ففرمن-گراهام[۸] داده می‌شود در حد شعاع AdS به سمت صفر، خوش تعریف نبوده و متریک‌های مرتبط در این حد دارای تکینگی هستند. چاره این است که فضاهای مجانباً AdS را در یک پیمانه دیگر بنویسیم. یک پیمانه شناخته شده برای این کار پیمانه BMS نام دارد که حد تخت از آن فضاهای مجانباً تخت را به دست می‌دهد. ادعا بر این است که با شروع از این پیمانه و انجام محاسبات هولوگرافیک، می‌توان در نهایت حد

تخت گرفت و به محاسبه‌ای در فضا-زمان‌های مجانباً تخت رسید که معادل با یک محاسبه در CCFT است.

مهم‌ترین مساله‌ای که در یک CCFT می‌توان به آن فکر کرد محاسبه توابع چند نقطه‌ای عملگرها است. اگر دوگانی Flat/CCFT را قبول کنیم آنگاه محاسبه این توابع در سمت گرانش دارای یک تعبیر هولوگرافیک است. در AdS/CFT نیز محاسبه هولوگرافیک توابع چند نقطه‌ای CFT به وسیله روش استاندارد بازبهنجارش هولوگرافیک [۹] در سمت AdS انجام می‌شود. انتظار بر این است که روش بازبهنجارش هولوگرافیک برای Flat/CCFT نیز وجود داشته باشد که هنوز از مسائل باز است. با فقدان این روش مستقیم، می‌توان روش حدگیری از AdS/CFT را برای این مساله آزمود. این روش در مقاله [۱۰] برای محاسبه توابع تک نقطه‌ای عملگرها به کار برده شده است. همان طور که انتظار می‌رود متریکی که [۱۰] برای اعمال روش بازبهنجارش هولوگرافیک استفاده می‌کند در مختصات BMS داده می‌شود. در این مقاله برآنیم تا محاسبات [۱۰] را ادامه داده و توابع دو نقطه‌ای تانسور تنش را نیز به دست آوریم. در واقع روش استاندارد بازبهنجارش هولوگرافیک در مختصات BMS را برای محاسبه توابع دو نقطه‌ای به کار خواهیم برد. برای این منظور در ابتدا پیمانه BMS را معرفی می‌کنیم و محاسبات [۱۰] برای توابع تک نقطه‌ای را مرور می‌کنیم. سپس توابع دو نقطه‌ای را حساب کرده و در مورد حد تخت از آنها بحث می‌کنیم.

۲. معرفی پیمانه BMS

پیمانه BMS متریک‌های به طور مجانبی AdS را به دست می‌دهد که حد فضای تخت از آن‌ها خوش تعریف است. در دستگاه BMS متریک به صورت زیر داده می‌شود[۱۰]:

$$\begin{aligned}\mathrm{ds}^2_{\mathrm{d}+1} &= \mathrm{G}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \\ &= -\Phi\, du^2 + 2\, du\, dr + \gamma_{i\,j}\big(\, dx^i +\ \bar\sigma^i\, du\,\big)\big(\, dx^j +\ \bar\sigma^j\, du\,\big), \qquad (1)\end{aligned}$$

به طوری که بسط مجانبی مؤلفه‌های متریک به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\gamma_{i\,j}(r,u,\vec{x}) &= r^2\left(\gamma_{(0)i\,j}(u,\vec{x}) +\ O(r^{<0})\right),\\ \Phi(r,u,\vec{x}) &= \Phi_{(0)}(u,\vec{x}) +\ O(r^{<0}),\\ \bar\sigma^i &= O(r^{<0}). \qquad (2)\end{aligned}$$

در (۱) حد$r\to\infty$ بی‌نهایت پوچ (null infinity) را به دست خواهد داد. با تغییر مختصات $\bar z = \frac{\ell_0}{r}$ که ℓ_0 یک ثابت با بعد طول است (یک انتخاب برای ℓ_0 می‌تواند ثابت نیوتون در سه بعد G_3 باشد) و نیز با تعریف $\bar\phi = \frac{\bar z^2}{\ell_0^2}\Phi$ و $\bar g_{i\,j}\ =\ \frac{\bar z^2}{\ell_0^2}\gamma_{i\,j}$ خواهیم داشت:

$$ds^2 = \frac{\ell_0^2}{\bar z^2}\Big(-\bar\phi \mathrm{du}^2 -\ 2\, du\, d\bar z +\ \bar g_{i\,j}\big(dx^i +\ \bar\sigma^i\, du\big)\big(dx^j +\ \bar\sigma^j\, du\big)\Big). \qquad (3)$$

اگر متریک فوق را در معادله حرکت اینشتین با حضور ثابت کیهانشناسی قرار دهیم به دست خواهیم آورد

$$\mathrm{R}_{\mathrm{i\,j}} =\ -\frac{\mathrm{d}+1}{(\alpha\,\ell_0)^2}\mathrm{G}_{\mathrm{i\,j}}. \qquad (4)$$

برای به دست آوردن این معادله فرض شده است که شعاع فضا-زمان پاددوسیته به صورت $\alpha\ell_0$ داده می‌شود که α یک ثابت بدون بعد است. با این انتخاب حد فضای تخت معادل با $\alpha \to \infty$ خواهد بود. حل مجانبی معادله (۴) حول z=0 نتایج زیر را به دست خواهد داد:

$$
\begin{aligned}
&\bar{g}_{\mathrm{i\,j}}(\mathrm{r,u,x}) = \bar{g}_{(0)\mathrm{i\,j}} + \bar{z}\,\bar{g}_{(1)\mathrm{i\,j}} + \mathrm{O}(\bar{z}^2),\\
&\bar{\phi}(\mathrm{r,u,x}) = \frac{1}{\alpha^2} + \bar{z}\bar{\phi}_{(1)} + \mathrm{O}(\bar{z}^2),\\
&\bar{\sigma}^i(r,u,x) = \bar{\sigma}^i_{(0)} + \mathrm{O}(\bar{z}^2). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$g_{(0)i\,j}$ ، $\bar{\phi}_{(1)}$ و $\sigma^i_{(0)}$ مقادیر مرزی دیریشله یا همان منبع نظریه میدان دوگان هستند. دو دلیل وجود دارد که یک بار دیگر تغییر مختصات را اعمال کنیم:

اول: با توجه به اینکه منبع نظریه دوگان در تابع $\bar{\phi}_{(1)}$ یعنی در $O(\bar{z}^2)$ قرار دارد. این منبع در مرز همدیس فضای پاد دوسیته وجود ندارد. از آنجا که برای محاسبه تابع دو نقطه‌ای نیاز به وردش گیری از این منبع وجود دارد، سعی می‌کنیم با یک تغییر مختصات این جمله را به مرتبه $O(\bar{z}^0)$ ببریم.

دوم: اگر مبنا بر این باشد که متریک ما تمام خانواده همدیس را در مرز همدیس تولید کند، نیاز به تغییر مختصات به گونه‌ای که تمام این پاسخ‌ها را در مرز داشته باشد وجود دارد.

به منظور حل هر دوی این مشکلات در [۱۰] پیشنهاد شده است که تغییر مختصات $z = \bar{z}\,N_0(u,x^i)$ را اعمال کنیم که N_0 یک تابع مثبت است. با این تغییر مختصات متریک به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ds}^2_{\mathrm{d+1}} = \frac{\ell_0^2}{\mathrm{z}^2}\Big(&-\phi \mathrm{N_0 du^2} - 2\,\mathrm{N_0\,du\,dz}\\
&+ \mathrm{g_{i\,j}}\big(\mathrm{dx^i} + \sigma^{\mathrm{i}}\,\mathrm{du}\big)\big(\mathrm{dx^j} + \sigma^j du\big)\Big), \qquad (6)
\end{aligned}
$$

و توابع متریک به شکل زیر بازتعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\phi\,N_0 &= \bar{\phi}N_0^2 - 2z\,(\partial_u - L_{\bar{\sigma}})N_0 + z^2\,|\Delta_{\bar{g}}\log N_0|^2,\\
\sigma^i &= \bar{\sigma}^i + z\,N_0^{-2}\bar{g}^{i\,j}\partial_j N_0,\\
g_{i\,j} &= N_0^2\bar{g}_{i\,j}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

حال اگرحل مجانبی تابع ϕ متریک را بررسی کنیم، خواهیم یافت:

$$
\begin{aligned}
&\phi\big(z,u,x^i\big) = \phi_{(0)}\big(x^i,u\big) + z\,\phi_{(1)}\big(x^i,u\big) + O(z^2),\\
&\qquad \phi_{(0)} = \frac{1}{\alpha^2}N_0,\\
&\qquad \phi_{(1)} = \phi_{(1)} - 2\left(\partial_{\mathrm{i}} - \mathrm{L}_{\sigma_{(0)}}\right)\log(\mathrm{N_0}). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

در اینجا هر دو تابع $\phi_{(1)}$ و N_0 توابعی دلخواه هستند که با اعمال شرط زیر می‌توان یکی را به نفع دیگری از بین برد:

$$
\phi_{(1)} = \left(\partial_{\mathrm{i}} - \mathrm{L}_{\sigma_{(0)}}\right)\log(N_0) \qquad (9)
$$

با استفاده از (۶) متریک القا شده در روی مرز برابر خواهد بود با

$$
ds_d^2 = h_{a\,b}\,dx^a\,dx^b
$$

$$= \frac{\ell_0^2}{z^2}\Big(-\phi N_0 du^2 \;+\; g_{ij}\big(dx^i + \sigma^i du\big)\big(dx^j + \sigma^j du\big)\Big), \qquad (10)$$

که متریک پس‌زمینه‌ای که نظریه میدان دوگان بر روی آن زندگی می‌کند با استفاده از آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} ds_d^2 &= \frac{\ell_0^2}{z^2}\Big(h_{(0)ab}dx^a\, dx^b + O(z)\Big) \\ &= \frac{\ell_0^2}{z^2}\left(-\frac{1}{\alpha^2}N_0^2 du^2 + g_{(0)ij}\big(dx^i + \sigma_{(0)}^i du\big)\left(dx^j + \sigma_{(0)}^j du\right)\right). \qquad (11)\end{aligned}$$

۳. تابع تک نقطه‌ای تانسور تنش

در این قسمت تابع تک نقطه‌ای را برای تانسور تنش نظریه میدان دوگان در دو بعد به دست خواهیم آورد. بنابراین با شروع از متریک (۶)، آن را در سه بعد می‌نویسیم،

$$ds_3^2 = \frac{\ell_0^2}{z^2}\left(-\phi N_0^2 du^2 - \;2\, N_0\, du\, dz \;+\; g(dx \;+ \sigma\, du)^2\right) \qquad (12)$$

با استفاده از معادله اینشتین در حضور ثابت کیهانشناختی منفی، پارامترهای متریک به شکل مجانبی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \phi(z,u,x) &= \phi_{(0)}(x,u) + \frac{z^2}{2}\big(\phi_{(2)}(x,u)\big) + \dots, \\ \sigma(z,u,x) &= \sigma_{(0)}(u,x) + z\,\sigma_{(1)}(u,x) + \frac{z^2}{2}\big(\sigma_{(2)}(x,u)\big) + \dots, \\ g(z,u,x) &= g_{(0)}(u,x) + z\, g_{(1)}(u,x) + \frac{z^2}{2}\Big(g_{(2)}(x,u)\Big) + \dots, \qquad (13)\end{aligned}$$

که جملات بسط به صورت زیر دارای ارتباط با همدیگر هستند:

$$\begin{aligned} \phi_{(0)} &= \frac{N_0}{\alpha^2}, \\ \sigma_{(1)} &= \frac{\partial_x N_0}{g_{(0)}}, \\ g_{(1)} &= \frac{\alpha^2}{N_0}\big(\partial_u g_{(0)} - \sigma_{(0)}\, \partial_x g_{(0)} - 2\, g_{(0)}\, \partial_x \sigma_{(0)}\big), \\ g_{(2)} &= \frac{g_{(1)}^2}{2\, g_{(0)}}. \qquad (14)\end{aligned}$$

بر خلاف انتظار $g_{(2)}$ یک ثابت انتگرال‌گیری نیست. این جمله توسط جملات منبع و با استفاده از معادله مجانبی میدان معین می‌شود. بنابراین در اینجا $\sigma_{(2)}$ و $\phi_{(2)}$ جملات پاسخ بوده و N_0 ، $\sigma_{(0)}$ و $g_{(0)}$جملات منبع هستند.

اگر ما در همین نقطه از محاسبات حد تخت را اعمال کنیم آنگاه ضریب $g_{(1)}$ و به دنبال آن $g_{(2)}$ تبدیل به ضرایب انتگرال‌گیری خواهند شد و به دنبال آن جملات پادکنش گرانشی جملاتی غیرمحلی می‌شوند که

مطلوب نیست. برای محاسبه توابع چند نقطه‌ای نیاز به معرفی جملات پادکنش داریم که باعث حذف بینهایت ها از کنش on shell می‌شود. پادکنش گرانشی در پیمانه BMS برای حلهای به طور مجانبی پاددوسیته در مرجع [۱۰] معرفی شده است که با استفاده از آن کنش بازبهنجار شده به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$S_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{16\,\pi\, G_3}\int_M d^3 x\sqrt{G}\,(\,R[G] + 2\,\Lambda) + \frac{1}{8\,\pi\, G_3}\int_{\partial M} d^2x\,\sqrt{\gamma}\,k + \frac{1}{8\,\pi\, G_3 \alpha\,\ell_0}\int_{z=\epsilon} d^2x\,\sqrt{\gamma}, \qquad (15)$$

که k انحنای عرضی است. تابع تک نقطه‌ای یا تانسور انرژی-تکانه با استفاده از روش براون-یورک [۱۱] به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$T_{i\,j} = \frac{1}{8\,\pi\, G_N}\left(k_{i\,j} - h_{i\,j}k - \frac{1}{\alpha\,\ell_0}h_{i\,j}\right). \qquad (16)$$

پس از جایگذاری مقادیر داریم:

$$\begin{aligned} < T_{x\,x} > &= \frac{-\ell_0\alpha\, g_{(0)}\phi_{(2)}}{32\,\pi\, G_N N_0},\\ < T_{uu} > &= \frac{\ell_0 g_{(0)}\sigma_{(0)}\sigma_{(2)}}{8\,\pi\, G_N\,\alpha} - \frac{\ell_0 N_0\phi_{(2)}}{32\,\pi\,\alpha\, G_N} - \frac{\ell_0\,\alpha\, g_{(0)}\sigma_{(2)}^2\,\phi_{(2)}}{32\,\pi\, G_N N_0} + \text{جملات محلی},\\ < T_{u\,x} > &= \frac{\ell_0\, g_{(0)}\sigma_{(2)}}{16\,\pi\, G_N\alpha} - \frac{\ell_0\alpha g_{(0)}\sigma_{(0)}\phi_{(2)}}{32\,\pi\, G_N N_0} + \text{جملات محلی} \end{aligned} \qquad (17)$$

جملات محلی را می‌توان بوسیله جملات مرزی در کنش از بین برد. این جملات در قسمت گرانشی شامل فیزیک خاصی نمی‌شوند، اما در قسمت نظریه میدان دوگان چند راهنمایی کلی دارند از جمله اینکه نظریه دوگان باید یک نظریه ایستا باشد[۱۰].

۴. تابع دو نقطه‌ای

۱،۴. خطی سازی

برای یافتن تابع دو نقطه‌ای نیاز داریم که جملات پاسخ را بر اساس جملات منبع معین کنیم به این منظور به حل خطی معادلات اینشتین اکتفا می‌کنیم. ابتدا متریک پس‌زمینه را به شکل زیر برمی‌گزینیم:

$$d\,s^2_{\text{پس‌زمینه}} = \frac{\ell_0^2}{z^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}d\,u^2 - 2\,du\,dz + dx^2\right) \qquad (18)$$

می‌خواهیم متریک (۱۲) را در پس زمینه (۱۸) مختل کنیم. اگر پارامتر اختلال را b بنامیم آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\alpha^2} + b\,F,\\ g &= 1 + b\,\gamma,\\ \sigma &= b\,S. \end{aligned} \qquad (19)$$

بعد از حل خطی معادله اینشتین حاصل به این ترتیب خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&\gamma = g_{(0)}(u,x) + z\, g_{(1)}(u,x),\\
&S = S_{(0)}(u,x) + z^2 S_{(2)}(u,x),\\
&F = z f_{(1)}(u,x) + z^2 f_{(2)}(u,x).
\end{aligned} \tag{20}
$$

فقدان $g_{(2)}$ در این حل را از قبل هم انتظار داشتیم زیرا در رابطه (۱۴) نشان دادیم که این جمله به واسطه جمله منبع بدست می‌آید و ثابت انتگرال‌گیری نیست. اما $f_{(1)}$ ، $S_{(2)}$ و $f_{(2)}$ از معادلات زیر پیروی می‌کنند:

$$
\begin{aligned}
&g_{(1)} = \alpha^2\left(f_{(1)} + 2\,\partial_x S_{(0)} + \partial_u g_{(0)}\right),\\
&f_{(2)} = -2\,\frac{\partial_u}{\partial_x} S_{(2)},\\
&S_{(2)} = \frac{1}{2}\alpha^2 \partial_x f_{(1)} + \frac{\alpha^4}{\partial_x^2 - \alpha^2 \partial_u^2}\left(\partial_u^2 \partial_x^2 S_{(0)} - \frac{1}{2}\,\partial_x \partial_u^3 g_{(0)}\right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

در این مرحله تغییر مختصات $z = \frac{\bar{z}}{N_0}$ را انجام می‌دهیم. مقادیر منبع و پاسخ‌ها به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{(0)} = \frac{N_0^2}{\alpha^2},\\
&\sigma_{(0)} = b\, S_{(0)},\\
&g_{(0)} = N_0^2(1 + b\, g_{(0)}),\\
&\phi_{(2)} = b\,\frac{f_{(2)}}{N_0} + \text{جملات محلی},\\
&\sigma_{(2)} = b\,\frac{S_{(2)}}{N_0^2} + \text{جملات محلی}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

نتیجه خطی‌سازی معادلات اینشتین و تغییر مختصات این است که:

$$
f_{(1)} = \frac{2\,\partial_x N_0}{N_0}. \tag{23}
$$

همان‌گونه که انتظار داشتیم $S_{(2)}$ و $\phi_{(2)}$ جملاتی غیرمحلی از منبع هستند و توسط تحلیل نزدیک مرز معین نمی‌شوند. این جملات، پاسخ‌های نظریه میدان دوگان هستند. نکته مهم در این تحلیل این است که هیچ یک از دو پاسخ ما به تابع N_0 وابسته نیستند. یک بار دیگر توابع تک نقطه‌ای را در تحلیل خطی بازنویسی می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&< T_{x\,x} >_s = \frac{-\ell_0\,\alpha}{32\,\pi\, G_N} b f_{(2)} - \frac{\ell_0\,\alpha}{32\,\pi\, G_N} b^2 g_{(0)} f_{(2)},\\
&< T_{u\,u} >_s = \frac{-\ell_0}{32\,\pi\, G_N \alpha} b f_{(2)} + \frac{\ell_0}{8\,\pi\, G_N \alpha} b^2 S_{(0)} S_{(2)} + O(b^2),\\
&< T_{u\,x} >_s = \frac{-\ell_0}{16\,\pi\, G_N \alpha} b S_{(2)} + \frac{\ell_0}{16\,\pi\, G_N \alpha} b^2 g_{(0)} S_{(2)} - \frac{\ell_0\,\alpha}{32\,\pi\, G_N} b^2 S_{(0)} f_{(2)}\\
&\qquad + O(b^3)
\end{aligned} \tag{24}
$$

حال که همه چیز را برای یافتن تابع دو نقطه‌ای در دست داریم، تنها کافی است که از اتحاد زیر استفاده کنیم[۱۲]:

$$\frac{1}{\partial_{\mathrm{x}}^{2}-\alpha^{2}\partial_{\mathrm{u}}^{2}}\delta^{2}(\mathrm{u},\mathrm{x})=\frac{1}{4\,\pi\,\alpha}\log\left(M^{2}\left(x^{2}+\frac{u^{2}}{\alpha^{2}}\right)\right). \qquad (25)$$

همچنین متریک پس‌زمینه نظریه میدان در مختصات جدید برابر است با:

$$\eta_{a\,b}=\frac{\ell_{0}^{2}}{z^{2}}\begin{pmatrix}\frac{-N_{0}^{2}}{\alpha^{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{N}_{0}^{2}\end{pmatrix}, \qquad (26)$$

$$\sqrt{\det(-\eta)}=\frac{\ell_{0}}{\mathrm{z}^{2}}\frac{N_{0}^{2}}{\alpha}. \qquad (27)$$

۲,۴. محاسبه تابع دو نقطه‌ای

اکنون میتوانیم به محاسبه توابع دو نقطه‌ای بپردازیم. طبق لغت‌نامه تابع دو نقطه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید[۹]:

$$<\mathrm{T}_{\mathrm{a\,b}}(\vec{X})\mathrm{T}_{\mathrm{i\,j}}(0)>=\frac{2}{\sqrt{-\eta}}\eta_{a\,c}\eta_{b\,c}\frac{\delta T_{i\,j}(0)}{\delta G_{(0)c\,d}(\vec{X})}\ , \qquad (28)$$

جایی که $G_{(0)}$ اولین تابع با وردش غیر صفر در مرز است.

$$G_{(0)a\,b}=\frac{\ell_{0}^{2}}{z^{2}}\begin{pmatrix}2N_{0}S_{(0)}^{2} & b\,S_{(0)}N_{0}^{2}\\ b\,S_{(0)}N_{0}^{2} & b\,N_{0}^{2}g_{(0)}\end{pmatrix}. \qquad (29)$$

بنابراین (۲۸) را بدین طریق می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
<\mathrm{T}_{\mathrm{x\,x}}\ldots> &= 2\alpha\frac{\delta(\ldots)}{\mathrm{b}\,\delta(\mathrm{g}_{(0)})},\\
<\mathrm{T}_{\mathrm{u\,x}}\ldots> &= \frac{-2}{\alpha}\frac{\delta(\ldots)}{\delta(\mathrm{S}_{(0)})},\\
<\mathrm{T}_{\mathrm{u\,u}}\ldots> &= \frac{-1}{\alpha^{3}}\frac{1}{\mathrm{b}^{2}\mathrm{S}_{(0)}}\frac{\delta(\ldots)}{\delta(\mathrm{S}_{(0)})}, \qquad (30)
\end{aligned}$$

در نتیجه توابع دو نقطه‌ای نظریه میدان دوگان به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
<T_{\mathrm{x\,x}}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{T}_{\mathrm{x\,x}}(0,0)> &= \frac{3}{4}\frac{\ell_{0}\alpha^{4}}{\mathrm{G_{N}}}\frac{\mathrm{u}^{4}+6\,\mathrm{u}^{2}\mathrm{x}^{2}\alpha^{2}+\mathrm{x}^{4}\alpha^{4}}{(\mathrm{u}^{2}-\mathrm{x}^{2}\alpha^{2})^{2}},\\
<T_{\mathrm{u\,u}}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{T}_{\mathrm{u\,u}}(0,0)> &= \frac{3}{4}\frac{\ell_{0}\alpha}{\mathrm{G_{N}}}\frac{\mathrm{u}^{4}+6\,\mathrm{u}^{2}\mathrm{x}^{2}\alpha^{2}+\mathrm{x}^{4}\alpha^{4}}{(\mathrm{u}^{2}-\mathrm{x}^{2}\alpha^{2})^{2}},\\
<T_{\mathrm{u\,x}}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{T}_{\mathrm{u\,x}}(0,0)> &= \frac{3}{4}\frac{\ell_{0}\alpha^{3}}{\mathrm{G_{N}}}\frac{\mathrm{u}^{4}+6\,\mathrm{u}^{2}\mathrm{x}^{2}\alpha^{2}+\mathrm{x}^{4}\alpha^{4}}{(\mathrm{u}^{2}-\mathrm{x}^{2}\alpha^{2})^{2}},\\
<T_{\mathrm{u\,x}}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{T}_{\mathrm{x\,x}}(0,0)> &= -3\frac{\ell_{0}\alpha^{3}}{\mathrm{G_{N}}}\frac{\mathrm{x}(\mathrm{u}^{3}+\mathrm{u\,x}^{2}\alpha^{2})}{(\mathrm{u}^{2}-\mathrm{x}^{2}\alpha^{2})^{2}}\ ,\\
<T_{\mathrm{u\,u}}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{T}_{\mathrm{x\,x}}(0,0)> &= \frac{3}{4}\frac{\ell_{0}\alpha^{3}}{\mathrm{G_{N}}}\frac{\mathrm{u}^{4}+6\,\mathrm{u}^{2}\mathrm{x}^{2}\alpha^{2}+\mathrm{x}^{4}\alpha^{4}}{(\mathrm{u}^{2}-\mathrm{x}^{2}\alpha^{2})^{2}},
\end{aligned}$$

$$< T_{u\,x}(u,x)T_{u\,u}(0,0) >= -3\,\frac{\ell_0\alpha^3}{G_N}\frac{x(u^3 + u\,x^2\alpha^2)}{(u^2-x^2\alpha^2)^2}\,. \qquad (31)$$

این توابع دو نقطه‌ای به ازای کلی‌ترین متریک مجانباً پاد دوسیته هستند که در حد ثابت کیهانشناسی به سمت صفر $\alpha \to \infty$ به فضا-زمان به طور مجانبی تخت منجر می‌شوند.

۳,۴. حد فضای تخت از توابع چند نقطه‌ای و هولوگرافی فضا-زمانهای به طور مجانبی تخت

همانطور که گفتیم حد فضای تخت که با $\alpha \to \infty$ انجام می‌شود هر حل پاددوسیته را در پیمانه BMS به یک حل مجانبا تخت تبدیل می‌کند. با این وجود همانطور که از(۱۷) و (۳۱) دیده می‌شود این حد به صورت مستقیم از توابع یک و دو نقطه ای باعث صفر شدن بعضی از مولفه ها و بینهایت شدن بعضی دیگر می‌شود. اما در مقاله [۱۳] این موضوع بحث شده است که اگر قبل از حدگیری مولفه ها را در توانهای مناسبی از α ضرب کنیم آنگاه می‌توانیم حد گیری را از توابع یک نقطه ای بطور موفقیت آمیزی انجام داده و تانسور تنشی را به دست آوریم که در سمت گرانش جواب درستی برای بارهای پایستار می‌دهد. در نگاه اول به نظر می‌رسد که این اتفاق برای توابع چند نقطه ای هم قابل تکرار باشد. در واقع هدف این است که با حد گیری از (۳۱) نتایجی را به دست آوریم که با نتایج مقالات [۶] و [۷] همخوانی داشته باشد. اما محاسبه بسیار سرراستی نشان می‌دهد که تکرار روش مقاله [۱۳] برای توابع دونقطه ای نمی‌تواند مارا به جواب درست برساند. بنابراین باید روش مقاله [۱۳] در این حالت مورد کنکاش مجدد قرار گیرد. این مساله‌ای است که ما همچنان روی آن متمرکز هستیم و امید آن را داریم که در آینده بتوانیم دیکشنری کامل برای چگونگی پیدا کردن توابع چند نقطه‌ای تانسور تنش CCFT با شروع از CFT را ارایه دهیم.

۵. نتیجه‌گیری

پیمانه BMS یک پیمانه مناسبی است که با شروع از آن می‌توانیم از محاسبات هوگرافیک در پس‌زمینه پاددوسیته حد بگیریم و نتایجی برای هولوگرافی فضا-زمانهای به طور مجانبی تخت به دست آوریم. در این مقاله توابع دونقطه‌ای تانسور تنش را در سه بعد برای حالت پاددوسیته حساب کردیم. دیدیم که بر خلاف انتظار حد تخت از این توابع آنچنان که در ابتدا تصور می‌کردیم از دیکشنری مرجع [13] تبعیت نمی‌کند. یک راه حل برای رسیدن به نتیجه مطلوب این می‌تواند باشد که قبل از حدگیری ترکیبهای مناسبی از مولفه‌های تانسور تنش را تشکیل داده و از آنها حد بگیریم. این موضوع در دستور کار ما برای آینده قرار دارد. در صورت موفقیت روش حدگیری از محاسبات AdS/CFT آنگاه میتوان هولوگرافی فضا-زمانهای به طور مجانبی تخت را به راحتی با شروع از AdS/CFT به دست آورد و اصل هولوگرافی را به خارج از حوزه AdS/CFT گسترش داد.

مراجع

[1] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [hep-th/9711200]

[2] A. Bagchi, Phys. Rev. Lett. **105**, 171601 (2010) [arXiv:1006.335[hep-th]].

[3] A. Bagchi and R. Fareghbal, JHEP **1210**,092(2012) [arXiv:1203.5795 [hep-th]].

[4] A. Bagchi, S. Detournay, R. Fareghbal and J. Simon, Phys. Rev. Lett. **110**, 141302 (2013) [arXiv:1208.4372 [hep-th]].

[5] A. Bagchi, R. Basu, D. Grumiller and M. Riegler, Phys. Rev. Lett **114**, no. 11, 111602 (2015) [arXiv:1410.4089 [hep-th]].

[6] A. Bagchi, D. Grumiller and W. Merbis, ``Stress tensor correlators in three-dimensional gravity,'' Phys. Rev. D **93**, no. 6, 061502 (2016) [arXiv:1507.05620 [hep-th]].

[7] M. Asadi, O. Baghchesaraei and R. Fareghbal, ``Stress Tensor orrelators Of CCFT$_2$ using Flat-Space Holography,'' arXiv:1701.00063 [hep-th].

[8] C. Fefferman and C. Robin Graham, ‘Conformal Invariants’, in Elie Cartan et les Math´ematiques d’aujourd’hui (Ast´erisque, 1985) 95.

[9] K. Skenderis, Class. Quant. Grav. **19**, 5849 (2002) doi:10.1088/0264-9381/19/22/306 [hepth/0209067].

[10] R. N. Caldeira Costa, Phys. Rev. D **90**, no. 10, 104018 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.104018 [arXiv:1311.7339 [hep-th]].

[11] J.D. Brown and J.W. York, “Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action”, Phys.Rev. D47 (1993), 1407-1419.

[12] K. Skenderis, M. Taylor and B. C. van Rees, JHEP **0909**, 045 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/09/045 [arXiv:0906.4926 [hep-th]].

[13] R. Fareghbal and A. Naseh, JHEP **1403**, 005 (2014) [arXiv:1312.2109 [hep-th]].

Holographic calculation of two-point correlation functions of CFT stress tensor in the BMS gauge and flat-space holography

Reza Fareghbal, Pedram Karimi
Department of physics, Shahid Beheshti University, Tehran
r_fareghbal@sbu.ac.ir , pedramkarimie@gmail.com

In this paper we use holographic renormalization method to calculate the two-point correlation functions of CFT stress tensor. In the gravity side we write the asymptotically AdS spacetimes in the BMS gauge and apply the standard holographic renormalization method. The significance of using this gauge is that its flat-space limit is well-defined. We discuss about this point in the last section of the present paper.

PACS:02,04,10