

# مطالعه‌ی نظری تولید اتم پاد هیدروژن توسط فرآیند بازآرایی بار در برخورد پاد پروتون با اتم پوزیترونیم

حکیمه پیشکوی و رضا فتحی\*

دانشکده فیزیک دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

در کار حاضر محاسبه‌ی سطح مقطع جزئی و کل برای تولید اتم پاد هیدروژن در حالت پایه و چند حالت برانگیخته، توسط بازچینی‌های مختلف هامیلتونی و با استفاده از پتانسیل‌های برهم‌کنشی الکترونی و الکترون-پادپروتون، به عنوان تقریب‌های بورن موج تخت و بورن موج واپیچیده‌ی کولنی در محدوده‌ی انرژی‌های میانی و بالا انجام شده است. در این محاسبات اتم پوزیترونیم در حالت پایه در نظر گرفته شده و تشکیل اتم پاد هیدروژن در حالت پایه و حالت‌های برانگیخته‌ی  $2p, 2s$  مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده به صورت سطح مقطع جزئی و کل با داده‌های تجربی و تئوری‌های مختلف در دسترس مقایسه گردیده است. محاسبات نشان می‌دهند که تقریب بورن موج تخت در کانال بازآرایی بار برخلاف کانال تهییج به نتایج بهتری در مقایسه با تقریب بورن موج واپیچیده‌ی کولنی منجر خواهد شد.

کلید واژگان: پاد هیدروژن، پوزیترونیم، سطح مقطع جزئی، تابع موج کولنی

## Theoretical study of anti-hydrogen atom production by charge rearrangement process with anti-proton-positronium atom impact

H. Pishkooi and R. Fathi

Physics Department, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

### Abstract

In the present work the calculation of differential and total cross section for production of anti-hydrogen atom in the ground and some excited states has been done by various rearrangements of Hamiltonian and using of electronic and electron-antiproton interaction potentials as plane wave Born and coulomb distorted wave Born approximations in intermediate and high impact energy ranges. In this calculations the positronium atom was considered in the ground state and the probability of forming anti-hydrogen atom at the ground and the  $2s, 2p$  excited states was examined. At last, the achieved differential and total cross section results were compared with different available experimental and theoretical datas. The results show that the approximation of plane wave Born in the charge rearrangement channel, unlike the excitation channel found better results compared with Coulomb distorted wave Born approximation.

Keywords: Anti-Hydrogen, Positronium, Differential Cross Section, Coulomb Wave Function

PACS: ۰۳-۳۰

\* نویسنده مسئول: rfathi@uk.ac.ir

در فیزیک ذرات، پاد ماده از پاد ذره تشکیل شده است که جرمی برابر جرم ذره اما دارای بار مخالف آن است. امروزه محققین نظری و تجربی تمایل دارند اطلاعاتی در مورد تقارن‌های ماده و پاد ماده به دست آورند تا به درک درستی از جهان پیرامون دست یابند. در سال‌های اخیر دو آزمایش آتنا<sup>۱</sup> و آتراپ<sup>۲</sup> در سرن<sup>۳</sup> نشان دادند که امکان تولید مقدار زیادی از پاد اتم‌ها در دمای پایین وجود دارد و امکان مطالعات بیشتر در تقارن اساسی بین ماده و پاد ماده مانند ناوردایی CPT (از طریق طیف سنجی با دقت بالا) و اندازه‌گیری مستقیم در رابطه با درستی اصل هم ارزی برای پاد ماده (از طریق آزمایش‌های بالستیک) فراهم آمده است. شناسایی و بررسی اتم پاد هیدروژن نیز می‌تواند زمینه‌ی لازم را برای توضیح ویژگی‌های پاد ماده و قوانین بنیادی فیزیک فراهم آورد [۱-۳]. مقایسه‌ی اندازه‌گیری فرکانس گذار  $2s \rightarrow 1s$  اتم هیدروژن و اتم پاد هیدروژن در آزمایشات طیف سنجی با دقت ۱ در  $10^{10}$  است و این دقت در مورد اتم پوزیترونیم با دقت ۱ در  $10^{11}$  می‌باشد. بنابراین می‌توان از این گذار اتم هیدروژن و اتم پاد هیدروژن برای انجام آزمایش‌های طیف سنجی دقیق استفاده کرد. این در حالی است که اتم‌های پاد هیدروژن تولید شده و ذخیره شده در انرژی‌های خیلی پایین در حالت برانگیخته‌ی  $2s$  دارای طول عمر طولانی تر ۱۲۲ میلی ثانیه و حد نهایی برای اندازه‌گیری انرژی گذار  $1s \rightarrow 2s$  با دقت ۱ در  $10^{18}$  را فراهم می‌آورند [۴]. این امر امکان مقایسه‌ی بهتر ماده و پادماده را فراهم کرده و انجام آزمایشات دقیق‌تر طیف سنجی را میسر می‌سازد. روش‌های مختلفی برای تولید پاد هیدروژن در سرن و آزمایشگاه فرمی<sup>۴</sup> پیشنهاد و انجام شده است. یکی از این آزمایش‌ها که در سرن انجام گردیده [۵]، فرود آمدن پاد پروتون‌های نسبی با انرژی‌های ۲ گیگا الکترون ولت بر روی اتم‌های هیدروژن در یک هدف گازی و انجام واکنش سه ذره ای بازاری<sup>۵</sup> بار است. در این روش اتم‌های پاد هیدروژن به تعداد کم تولید شده و به دلیل سرعت فوق العاده بالای آن‌ها برای انجام طیف سنجی مناسب نیستند. در آزمایش دیگری با به دام انداختن پاد پروتون‌ها و ترکیب آن‌ها با پوزیترون‌های سرد، پادهیدروژن سرد تولید شده است [۶]. در روشی دیگر با به دام انداختن پاد پروتون‌های ۵ مگا الکترون ولتی در تله پنینگ یوفه مقدار زیادی پاد هیدروژن سرد تولید گردیده است [۷]. روش دیگری که پیشنهاد شده فرود آمدن پاد پروتون بر روی اتم پوزیترونیم در انرژی پایین و نانسبیتی است که مورد بحث مقاله‌ی حاضر به شکل نظری می‌باشد. این واکنش به دلیل داشتن سطح مقطع بزرگ، برای تولید انبوه پادهیدروژن‌های کند مناسب است. ولی محدودیت‌های تجربی برای کند کردن پاد پروتون توسط شتاب گیرنده‌ها انجام چنین آزمایشی را با مشکل مواجه می‌کند و این روش دارای محدودیت‌های خاص خود می‌باشد به همین دلیل به جای بررسی و اندازه‌گیری‌های مستقیم بر روی این واکنش، اندازه‌گیری‌های محدودی بر روی واکنش مزدوج بار آن انجام گرفته است. در این کار نتایج به دست آمده با نتایج محدود تجربی تشکیل اتم هیدروژن مقایسه شده است. کارهای نظری زیادی برای بررسی تشکیل اتم پادهیدروژن انجام گرفته [۸-۱۱] و در هر کدام از این مدل‌ها که حل مسأله‌ی برهم‌کنش بین یون و اتم بوده روش‌های متفاوتی مطرح شده است. از جمله محاسبات انجام شده‌ی اولیه در خصوص برخورد یون-اتم می‌توان به کار برینکمن و کرامرز اشاره کرد که برای محاسبه دامنه‌ی برخورد پروتون با اتم هیدروژن در کانال انتقال بار

<sup>۱</sup> ATHENA (Apparatus for high precision experiments on neutral antimatter)

<sup>۲</sup> ATRAP (Antimatter trap)

<sup>۳</sup> CERN

<sup>۴</sup> Fermilab

از اثر برهم‌کنش بین دو پروتون صرف نظر کردند. نتایج حاصل در انرژی‌های بالا به تقریب مرتبه اول بورن نزدیک بوده [۱۲] ولی با نتایج تجربی توافق چندانی نداشت. در سال ۱۹۵۳ جکسون و شیف<sup>۰</sup> [۱۳] پیشنهاد دادند که سهم برهم‌کنش هسته‌ای نیز در تقریب مرتبه اول بورن گنجانده شود. جلتمن<sup>۱</sup> [۱۴] در فرآیند برخورد پروتون با اتم هیدروژن در کانال بازآرایی بار از این تقریب استفاده کرده است. در کار حاضر، سطح مقطع جزئی و کل برای تولید اتم پاد هیدروژن ناشی از برخورد پاد پروتون با اتم پوزیترونیم در محدوده‌ی انرژی برخورد (50–1000 keV) با پتانسیل‌های برهم‌کنشی الکترونی و الکترون-پادپروتون و با استفاده از تقریب بورن موج تخت و تقریب بورن موج واپیچیده‌ی کولنی محاسبه شده است. در این محاسبات اتم پوزیترونیم در حالت پایه قرار دارد و حالت پایه و حالت‌های برانگیخته‌ی 2s و 2p اتم پاد هیدروژن در نظر گرفته شده‌اند.

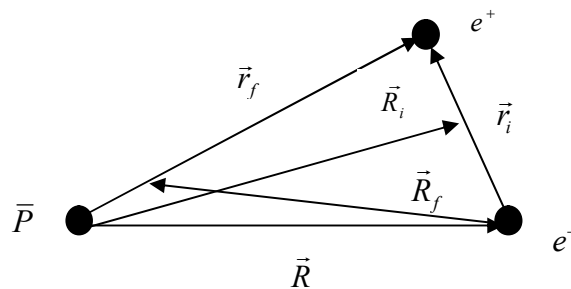
### تئوری

یک برخورد سه جسمی تحت عنوان یک یون برهنه به‌عنوان پرتابه و یک اتم به‌عنوان زیر سیستم مقید در نظر گرفته شده و فرض می‌شود که ساختار داخلی ذرات در طول برخورد تغییر نکند. در این کار  $\bar{P}$  به عنوان پرتابه‌ای است که در کانال اولیه بر زوج مقید ( $e^+e^-$ ) فرود می‌آید. اگر انرژی پرتابه به اندازه کافی باشد، در خلال چنین برخوردی امکان رویدادهای مختلفی وجود دارد. یکی از این رویدادها بازآرایی بار می‌باشد و به‌صورت



نمایش داده می‌شود.

مختصات مورد استفاده در سیستم سه جسمی برخورد پاد پروتون با اتم پوزیترونیم را می‌توان به شکل



شکل (۱). نمایش بردارهای موقعیت مورد استفاده در کار حاضر

در نظر گرفت.  $\vec{r}_i$  بردار نسبی پوزیترون-الکترون،  $\vec{r}_f$  بردار نسبی پوزیترون-پاد پروتون،  $\vec{R}_i$  بردار نسبی مرکز جرم زیر سیستم مقید اولیه نسبت به پاد پروتون،  $\vec{R}_f$  بردار نسبی زیر سیستم مقید نهایی نسبت به الکترون و  $\vec{R}$  بردار نسبی الکترون و پاد پروتون می‌باشد. با توجه به شکل (۱) هامیلتونی کل سیستم در کانال ورودی به صورت

<sup>۰</sup> Jackson and Schiff

<sup>۱</sup> Geltman

$$H = -\frac{1}{2v_i} \nabla_{R_i}^2 - \frac{1}{2\mu_i} \nabla_{r_i}^2 + V \quad (2)$$

می باشد که در آن  $\mu_i = \frac{m_{e^+} m_{e^-}}{m_{e^+} + m_{e^-}}$  و  $v_i = \frac{m_{\bar{p}}(m_{e^+} + m_{e^-})}{m_{\bar{p}} + m_{e^+} + m_{e^-}}$  است. همچنین در مورد هامیلتونی کل سیستم در کانال خروجی می توان نوشت

$$H = -\frac{1}{2v_f} \nabla_{R_f}^2 - \frac{1}{2\mu_f} \nabla_{r_f}^2 + V \quad (3)$$

به طوری که  $\mu_f = \frac{m_{e^+} m_{\bar{p}}}{m_{\bar{p}} + m_{e^+}}$  و  $v_f = \frac{m_{e^-}(m_{e^+} + m_{\bar{p}})}{m_{\bar{p}} + m_{e^+} + m_{e^-}}$  می باشند. پتانسیل برهم کنش  $V$  را می توان به شکل

$$V = V_{\bar{p}e^-} + V_{\bar{p}e^+} + V_{e^+e^-}$$

در نظر گرفته و رابطه ی (۳) را به صورت

$$H = H_f + V_f \quad (5)$$

باز نویسی نمود. در رابطه ی (۵) شامل انرژی جنبشی کل و پتانسیل  $V_{\bar{p}e^+}$  است و  $V_f$  به عنوان پتانسیل اختلالی شامل  $V_{\bar{p}e^-}$  و  $V_{e^+e^-}$  می باشد. با جایگزینی پتانسیل های برهم کنشی،  $H_f$  و  $V_f$  را می توان به صورت

$$H_f = -\frac{1}{2v_f} \nabla_{R_f}^2 - \frac{1}{2\mu_f} \nabla_{r_f}^2 - \frac{1}{r_f} \quad (6)$$

$$V_f = \frac{1}{R} - \frac{1}{r_i} \quad (7)$$

مرتب کرد به طوری که  $\frac{1}{R}$  سهم برهم کنش الکترون-پادپروتون را مشخص می کند. اگر به رابطه ی (۵) عبارت  $\pm \frac{1}{R_f}$

اضافه شود  $H_f$  و  $V_f$  را می توان به صورت

$$H_f = -\frac{1}{2v_f} \nabla_{R_f}^2 - \frac{1}{2\mu_f} \nabla_{r_f}^2 - \frac{1}{r_f} + \frac{1}{R_f} \quad (8)$$

$$V_f = \frac{1}{R} - \frac{1}{r_i} - \frac{1}{R_f} \quad (9)$$

نوشت. دلیل این امر رسیدن به جواب موج کولنی در مورد تابع موج ذره ی خروجی یا پراکنده شده در حل معادلات دیفرانسیلی مربوط به رابطه ی (۸) به روش جداسازی متغیرها می باشد. با توجه به این که  $R \approx R_f$  است (با توجه

به شکل (۱) داریم:  $\vec{R}_f + \vec{R} = \beta' \vec{r}_f$  که در آن  $\beta' = \frac{m_e}{m_e + m_{\bar{p}}} \ll 1$  می باشد.) رابطه ی (۹) به صورت

$$V_f = -\frac{1}{r_i} \quad (10)$$

ساده می‌شود. جواب هامیلتونی‌های نوشته شده با در نظر گرفتن پتانسیل‌های برهم‌کنشی مربوط به هر یک از آن‌ها در خصوص ذره‌ی پرتابه و پراکنده شده منجر به جواب‌های موج تخت و موج کولنی به روش جداسازی متغیرها خواهد شد. بازچینی هامیلتونی مطابق رابطه‌ی (6) دارای جواب موج تخت و به شکل رابطه‌ی (8) جوابی به شکل تابع موج کولنی را دارا خواهد بود. تابع موج کل در کانال اولیه به شکل

$$|\Psi_i^+\rangle = (1 + G_0^+ V + \dots) |\psi_i\rangle \quad (11)$$

بوده و  $\psi_i$  به صورت

$$\psi_i = \phi_i(\vec{R}_i) \varphi_i(\vec{r}_i) \quad (12)$$

قابل تعریف است. در رابطه‌ی (11)  $G_0^+$  و  $V$  به ترتیب تابع گرین و پتانسیل برهم‌کنش کل سیستم هستند. در کانال خروجی نیز  $\psi_f$  را می‌توان به شکل

$$\psi_f = \phi_f(\vec{R}_f) \varphi_f(\vec{r}_f) \quad (13)$$

تعریف نمود. در تقریب بورن موج تخت توابع موج ذره‌ی آزاد فرودی و ذره‌ی آزاد پراکنده شده به صورت

$$\phi_i(\vec{R}_i) = e^{i\vec{K}_i \cdot \vec{R}_i} \quad (14)$$

$$\phi_f(\vec{R}_f) = e^{i\vec{K}_f \cdot \vec{R}_f} \quad (15)$$

در روابط وارد شده و  $\varphi(\vec{r}_i)$  و  $\varphi(\vec{r}_f)$  توابع موج زیرسیستم مقید اولیه و نهایی هستند. لازم به ذکر است که  $(\vec{K}_f) \vec{K}_i$  اندازه حرکت ذره‌ی آزاد فرودی (پراکنده شده) می‌باشند. در تقریب مرتبه اول، ماتریس گذار را می‌توان به شکل

$$T_{fi} = \langle \psi_f | V_f | \psi_i \rangle \quad (16)$$

نوشت. با جایگذاری رابطه‌ی (7) در رابطه‌ی (16) ماتریس گذار جکسون-شیف حاصل می‌شود

$$T_{fi} = \langle \psi_f | \frac{1}{R} - \frac{1}{r_i} | \psi_i \rangle \quad (17)$$

و ماتریس گذار برینکمن و کرامرز با صرف‌نظر از سهم برهم‌کنش الکترون-پادپروتون در پتانسیل برهم‌کنشی به صورت

$$T_{BK} = \langle \psi_f | -\frac{1}{r_i} | \psi_i \rangle \quad (18)$$

معرفی می‌گردد. درتقریب بورن موج کولنی، تابع موج ذره‌ی آزاد فرودی به صورت تخت و ذره‌ی آزاد پراکنده شده به صورت موج واپیچیده‌ی کولنی و به عبارتی به شکل

$$\phi_f(\vec{R}_f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\pi\gamma\right)\Gamma(1-i\gamma)\exp(i\vec{K}_f \cdot \vec{R}_f) \times {}_1F_1(i\gamma; 1; i(-K_f R_f - \vec{K}_f \cdot \vec{R}_f)) \quad (19)$$

در مسأله وارد می‌شود.  $\gamma$  ضریب زومرفیلد و  ${}_1F_1(i\gamma; 1; i(-K_f R_f - \vec{K}_f \cdot \vec{R}_f))$  تابع فوق هندسی است. به این ترتیب ماتریس گذار در این تقریب به شکل

$$T_C = \int \exp\left(-\frac{1}{2}\pi\gamma\right)\Gamma(1-i\gamma)\exp(i\vec{K}_f \cdot \vec{R}_f) \times {}_1F_1(i\gamma; 1; i(-K_f R_f - \vec{K}_f \cdot \vec{R}_f)) \phi_f(\vec{r}_f) \times \left(-\frac{1}{r_i}\right) e^{i\vec{K}_i \cdot \vec{r}_i} \phi_i(\vec{r}_i) d\vec{r}_i d\vec{r}_f \quad (20)$$

باز نویسی می‌شود. بر طبق اصل پایستگی انرژی می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2} \frac{K_i^2}{v_i} + \varepsilon_i = \frac{1}{2} \frac{K_f^2}{v_f} + \varepsilon_f \quad (21)$$

به طوری که  $\varepsilon_i$  ( $\varepsilon_f$ ) به ترتیب انرژی قیدی اولیه (نهایی) زیر سیستم مقید می‌باشند.

پس از محاسبه‌ی ماتریس گذار در هریک از تقریب‌های بیان شده می‌توان سطح مقطع جزئی و کل را به ترتیب با استفاده از روابط

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{v_i v_f}{(2\pi)^2} \frac{K_f}{K_i} |T|^2 \quad (22)$$

و

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad (23)$$

محاسبه کرد. جهت انجام محاسبات فرض می‌گردد که اتم پوزیترونیم به عنوان زیر سیستم مقید اولیه در حالت پایه قرارداد و اتم پاد هیدروژن به عنوان زیر سیستم مقید نهایی در حالت‌های  $2p_0, 2s, 1s$  در نظر گرفته خواهد شد. محاسبات مربوط به زیر تراز  $2p_{\pm 1}$  به دلیل تعامد توابع موج به کار رفته در محاسبات منجر به عدد صفر خواهد گردید. در گذار  $1s \rightarrow 1s$  تابع موج حالت پایه اتم پوزیترونیم به شکل

$$\phi_i = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i}{2}} \quad (24)$$

بوده و تابع موج حالت پایه اتم پاد هیدروژن به صورت

$$\phi_f = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} e^{-r_f} \quad (25)$$

نوشته می‌شود. برای اولین گام پتانسیل اختلالی  $\frac{1}{r_i}$  را به عنوان اندرکنش الکترونی در نظر گرفته و با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) برای ماتریس گذار در تقریب بورن موج تخت خواهیم داشت

$$T_{BK} = \int e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{R}_f} \frac{2}{\sqrt{4\pi}} e^{-r_f} \times \left( -\frac{1}{r_i} \right) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{R}_i} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{r_i}{2}} d\vec{r}_i d\vec{r}_f \quad (26)$$

با توجه به شکل (۱) بردارهای موقعیت به صورت  $\vec{r}_i - \vec{R}_f = \beta \vec{r}_f$  و  $\vec{R}_i + \frac{\vec{r}_i}{2} = \vec{r}_f$  با یکدیگر ارتباط دارند که  $\beta = \frac{m_{\bar{p}}}{m_e + m_{\bar{p}}}$  تعریف شده و به دلیل  $m_e \ll m_{\bar{p}}$  اندازه‌ی  $\beta$  واحد در نظر گرفته می‌شود. با انجام انتگرال‌گیری

بر روی  $\vec{r}_i$  و  $\vec{r}_f$  ماتریس گذار به صورت

$$T_{BK} = -\frac{16\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{4} + \left| \vec{K}_f - \frac{1}{2} \vec{K}_i \right|^2 \right)^{-1} \times (1 - |\vec{K}_i - \beta \vec{K}_f|^2)^{-2} \quad (27)$$

حاصل می‌شود. اگر در مرحله‌ی بعدی جمله‌ی  $\frac{1}{R} - \frac{1}{r_i}$  به عنوان پتانسیل اختلالی در نظر گرفته شود با جایگزینی در رابطه‌ی (۲۸) ماتریس گذار به صورت

$$T_{JS} = \int e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{R}_f} \frac{2}{\sqrt{4\pi}} e^{-r_f} \times \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_i} \right) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{R}_i} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{r_i}{2}} d\vec{r}_i d\vec{r}_f \quad (28)$$

بازنویسی می‌شود. رابطه‌ی (۳۰) را می‌توان به صورت

$$T_{JS} = T_{BK} + I_{JS} \quad (29)$$

نوشته. با استفاده از تبدیل فوریه

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{R}}}{q^2} d\vec{q} \quad (30)$$

و با انتگرال‌گیری بر روی هر یک از متغیرهای انتگرالی و استفاده از انتگرال فاینمن [۱۵]

$$a^{-2} b^{-2} = \int_0^1 \frac{6x(1-x)}{[ax + b(1-x)]^4} dx \quad (31)$$

حاصل  $I_{JS}$  به شکل

$$I_{JS} = \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 x(1-x) dx [2\Lambda^{-3}(\Lambda - \Upsilon^2)^{-\frac{1}{2}} + \Lambda^{-2}(\Lambda - \Upsilon^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\Lambda^{-1}(\Lambda - \Upsilon^2)^{-\frac{5}{2}}] \quad (32)$$

ظاهر خواهد شد. باید دقت نمود که چون  $\Lambda$  و  $\Upsilon$  به  $\mathcal{X}$  وابسته هستند باید از حل عددی برای ادامه‌ی کار استفاده نمود. در این روابط

$$\Lambda = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x + x(\bar{K}_i - \beta\bar{K}_f)^2 + (\frac{1}{2}\bar{K}_i - \bar{K}_f)^2(1-x) \quad (33)$$

و

$$\bar{Y} = (\bar{K}_i - \beta\bar{K}_f)x + (\frac{1}{2}\bar{K}_i - \bar{K}_f)(1-x) \quad (34)$$

برای گذار به حالت پایه تعریف می‌گردند. برای گذارهای  $2p_0, 2s$  به طور مشابه محاسبات انجام گردیده و از آوردن مجدد آن‌ها صرف‌نظر شده است. برای محاسبه ماتریس گذار در تقریب بورن موج کولنی از رابطه‌ی (۲۰) استفاده می‌گردد. در محاسبات این تقریب از تبدیل فوریه

$$e^{-\lambda r} = \frac{\lambda}{\pi^2} \int \frac{e^{-iq\bar{r}}}{(q^2 + \lambda^2)^2} d\bar{q} \quad (35)$$

استفاده شده است. با توجه به انتگرال فاینمن و معرفی متغیرهای

$$g = x + \frac{1}{\beta^2} - \frac{x}{\beta^2}$$

$$\bar{q}_0 = \frac{\frac{\bar{K}_i}{\beta^2}(\frac{\beta}{2} - 1)(1-x)}{g}$$

$$\rho^2 = \frac{3x+1}{4g} + \frac{K_i^2(\frac{\beta}{2} - 1)^2(1-x)}{\beta^2 g} - \frac{K_i^2(\frac{\beta}{2} - 1)^2(1-x)^2}{\beta^2 g^2}$$

و این که

$$\bar{K} = [\frac{1}{\beta}(\bar{K}_i + \bar{q}_0) - \bar{K}_f]$$

می‌باشد، ماتریس گذار  $1s \rightarrow 1s$  این تقریب به صورت

$$T_C = \frac{-8\pi}{\beta^2 g^3 \sqrt{2}} \int_0^1 x dx e^{-\frac{1}{2}\pi\gamma} \Gamma(1+i\gamma) \times (\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}) (\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}) (K^2 + \frac{\rho^2}{\beta^2})^{-i\gamma-1} \times \quad (36)$$

$$[2\bar{K}_f \cdot \bar{K} - i \frac{\rho}{\beta} K_f + (K^2 + \frac{\rho^2}{\beta^2})]^{i\gamma}$$

حاصل می‌شود. برای محاسبه ماتریس گذار  $1s \rightarrow 2s$  از تبدیل فوریه‌ی

$$(1 - \frac{r_f}{2}) e^{-\frac{r_f}{2}} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{(2q^2 - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} + q^2)^3} e^{-iq\bar{r}_f} d\bar{q} \quad (37)$$



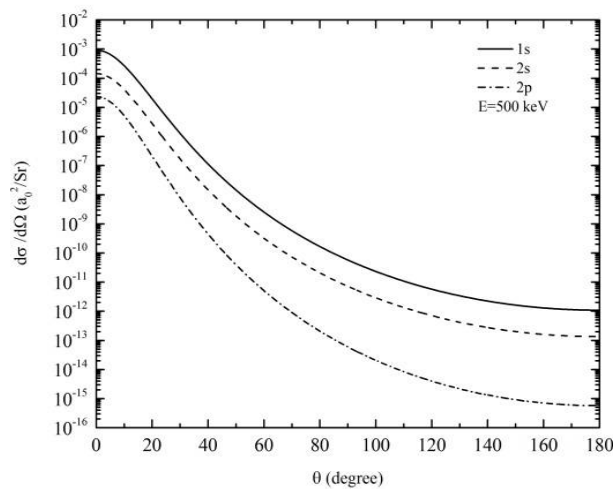
و انتگرال نردسبک [۱۶]

$$\int d\vec{r} \exp(-\lambda r - i\vec{q} \cdot \vec{r}) {}_1F_1(-i\alpha; 1; i(pr + \vec{p} \cdot \vec{r})) = -2\pi \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1}{2}(q^2 + \lambda^2) \right]^{-i\alpha-1} [\vec{p} \cdot \vec{q} - i\lambda p + \frac{1}{2}(q^2 + \lambda^2)]^{i\alpha} \quad (38)$$

و قضیه‌ی مانده‌های کوشی استفاده می‌شود. لازم به‌ذکر است که از آوردن نتایج تحلیلی مربوط به گذار  $1s \rightarrow 2p$  و زیر لایه‌های آن در تقریب موج کولنی به دلیل پیچیده بودن محاسبات و نیافتن روش تحلیلی برای محاسبه‌ی دامنه‌های پراکندگی صرفنظر گردیده است. در بخش بعدی نتایج عددی حاصل شده به شکل نمودارهای سطح مقطع جزئی و کل رسم گردیده و با نتایج نظری و تجربی در دسترس مقایسه شده‌اند.

### نتایج و بحث

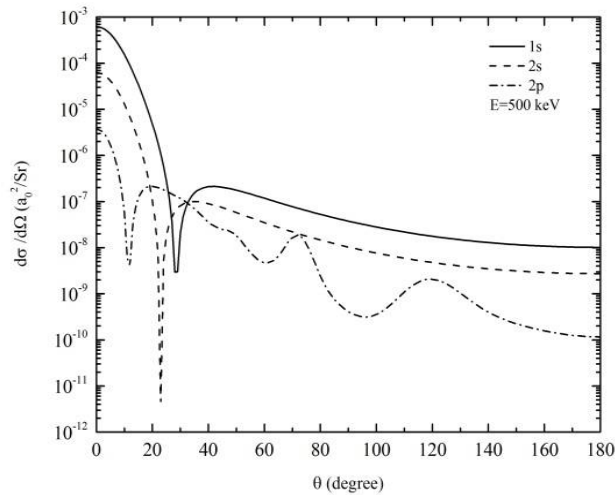
در شکل (۲) سطح مقطع‌های جزئی محاسبه شده در تقریب بورن موج تخت، در انرژی برخورد ۵۰۰ کیلو الکترون ولت و با در نظر گرفتن پتانسیل الکترونی برای تشکیل اتم پاد هیدروژن در حالت پایه‌ی  $1s$  و حالت‌های برانگیخته  $2s$  و  $2p$  با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان طور که مشخص است بیشترین احتمال تشکیل اتم پاد هیدروژن در حالت پایه بوده و در حالت برانگیخته بیشترین سهم را تراز  $2s$  دارا می‌باشد.



شکل (۲) مقایسه‌ی سطح مقطع جزئی حالت پایه و حالت‌های برانگیخته با پتانسیل اختلالی الکترونی در انرژی 500 keV

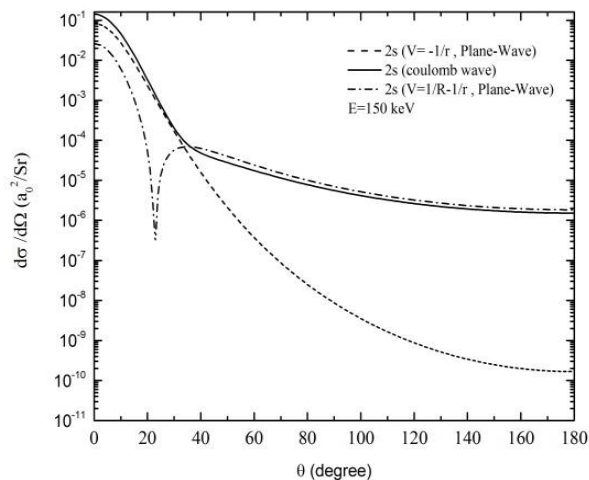
شکل (۳) همان نتایج قبلی را با در نظر گرفتن پتانسیل الکترونی به علاوه‌ی **برهم‌کنش الکترون-پادپروتون** مشخص می‌سازد. همان طور که مشاهده می‌شود، با افزایش زاویای پراکندگی سطح مقطع‌های جزئی بزرگ‌تر شده است و این امر ناشی از افزودن پتانسیل **الکترون-پادپروتون** می‌باشد که بیشترین نقش را در زوایای بزرگ پراکندگی ایفا می‌نماید. در زوایای کوچک پراکندگی سطح مقطع‌های جزئی کمی کوچک‌تر از شکل (۲) می‌باشند که دلیل آن وجود فاز مخرب بین دامنه‌های الکترونی و **الکترون-پادپروتون** (علامت برهم‌کنش‌ها با هم متفاوت هستند) است. نتیجه‌ی

دیگری که از نتایج به دست آمده حاصل می‌شود این است که برای گذارهای بالاتر زاویه‌ی تاریک در زوایای کوچک‌تر پراکندگی اتفاق می‌افتد. زاویه‌ی تاریک به زاویه‌ای گفته می‌شود که دامنه‌های مربوط به اندرکنش‌های الکترونی و الکترون-پادپروتون به یکدیگر نزدیک می‌شوند و بنا به فاز مخربی که دارند اثر یکدیگر را از بین می‌برند.



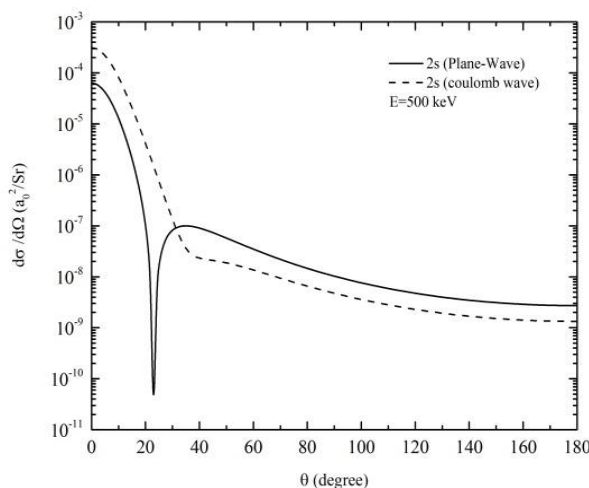
شکل (۳). مقایسه‌ی سطح مقطع جزئی حالت پایه و حالت‌های برانگیخته با پتانسیل الکترونی و الکترون-پادپروتون در انرژی 500 keV

شکل (۴) مقایسه‌ی بین سطح مقطع جزئی گذار  $1s \rightarrow 2s$  در تقریب بورن موج تخت و تقریب بورن موج واپیچیده‌ی کولنی را نشان می‌دهد. در تقریب بورن موج کولنی سهم برهم‌کنش الکترون-پادپروتون به علت وجود جمله لگاریتمی در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که در حالت حدی موج کولنی با موج تخت توسط یک فاز، که در این کار به واسطه‌ی برهم‌کنش الکترون-پادپروتون ظاهر می‌گردد متمایز می‌شود. با مقایسه‌ی منحنی تقریب بورن موج تخت با پتانسیل اختلالی الکترونی و منحنی تقریب بورن موج واپیچیده‌ی کولنی مشاهده می‌شود که در زوایای بزرگ پراکندگی تاثیر سهم هسته بیشتر است و سطح مقطع‌های جزئی موج کولنی بزرگ‌تر از سطح مقطع‌های جزئی موج تخت می‌باشند.



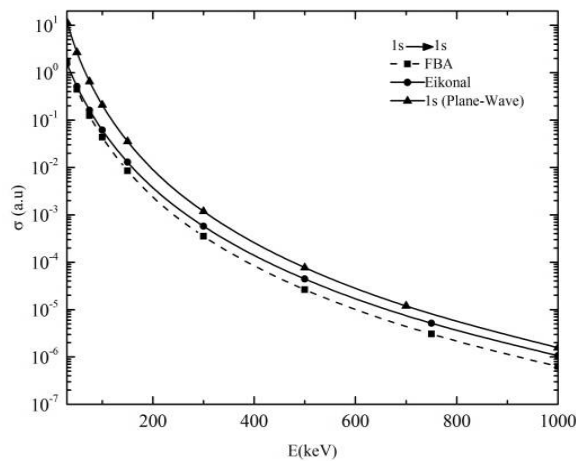
شکل (۴). مقایسه‌ی سطح مقطع جزئی موج کولنی و موج تخت با پتانسیل اختلالی الکترونی و پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترون-پادپروتون در انرژی  $150\text{keV}$  برای گذار  $1s \rightarrow 2s$ .

با در نظر گرفتن سهم **برهم‌کنش الکترون-پادپروتون** سطح مقطع‌های این دو تقریب در زوایای بزرگ‌تر پراکندگی و با افزایش انرژی، به هم نزدیک می‌شوند، و در انرژی‌های بالاتر سطح مقطع‌های جزئی موج کولنی در زوایای بزرگ‌تر، کم‌تر از سطح مقطع‌های جزئی موج تخت با در نظر گرفتن پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترون-پادپروتون است. تقریب موج کولنی در انرژی‌های کوچک برخورد نقش **برهم‌کنش الکترون-پادپروتون** را به خوبی در مسأله وارد می‌نماید ولی با توجه به شکل (۵) در انرژی‌های بزرگ برخورد تقریب موج تخت به همراه پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترون-پادپروتون است که دینامیک درست‌تری از این مسأله را بیان می‌کند.

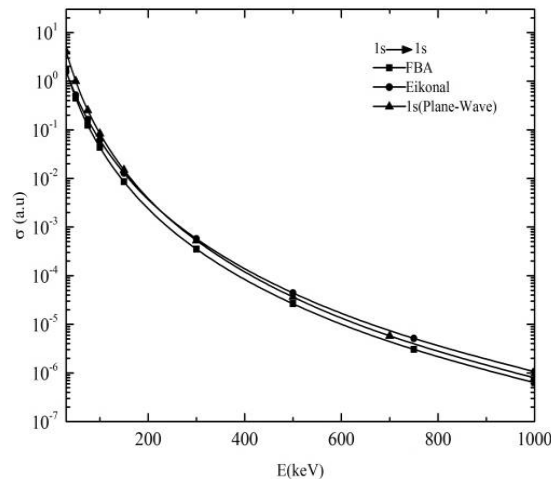


شکل (۵) مقایسه‌ی سطح مقطع جزئی موج کولنی و موج تخت با پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترون-پادپروتون در انرژی  $500\text{keV}$  برای گذار  $1s \rightarrow 2s$ .

شکل‌های (۶) و (۷) تغییرات سطح مقطع کل با انرژی ذره‌ی فرودی را برای تقریب موج تخت در دو پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترونی به علاوه‌ی برهم‌کنش الکترون-پادپروتون<sup>۷</sup> برای گذار  $1s \rightarrow 1s$  نشان می‌دهند. در این نمودارها نتایج به‌دست آمده از محاسبات، با نتایج تئوری حاصل از تقریب مرتبه اول بورن<sup>۸</sup> و تقریب آیکونال<sup>۹</sup> [۱۷] مقایسه شده‌اند. در شکل (۶) مشخص است که سطح مقطع کل به‌دست آمده در پتانسیل اختلالی الکترونی بزرگ‌تر از سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب آیکونال و تقریب مرتبه اول بورن می‌باشد این امر منطقی به نظر می‌رسد زیرا در این تقریب هنوز فاز مخرب برهم‌کنش الکترون-پادپروتون<sup>۷</sup> وارد نگردیده است. شکل (۷) نشان می‌دهد که نتایج حاصل شده با افزودن پتانسیل الکترون-پادپروتون<sup>۷</sup> و با افزایش انرژی برخورد به تقریب FBA نزدیک می‌شود.



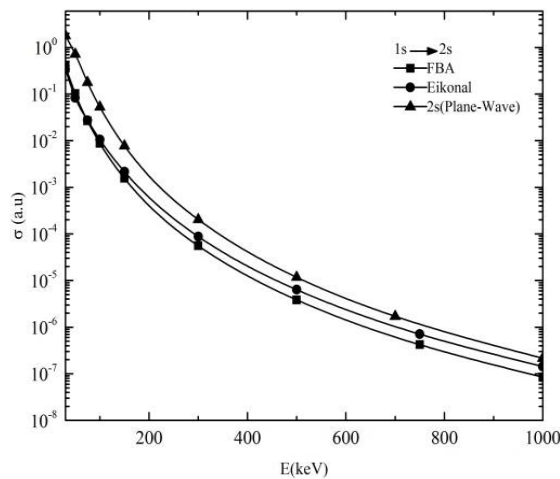
شکل (۶). مقایسه‌ی سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب موج تخت با پتانسیل الکترونی با تقریب FBA و Eikonal برای گذار  $1s \rightarrow 1s$ .



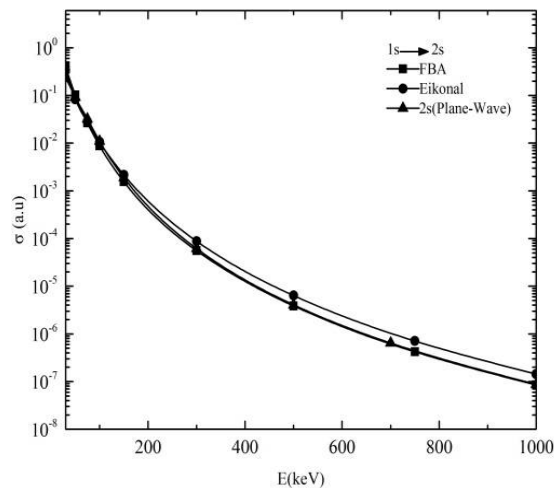
شکل (۷). مقایسه‌ی سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب موج تخت با پتانسیل الکترونی و الکترون-پادپروتون<sup>۷</sup> با تقریب FBA و Eikonal برای گذار  $1s \rightarrow 1s$

<sup>۷</sup> FBA  
<sup>۸</sup> Eikonal

در شکل‌های (۸) و (۹) نتایج به دست آمده از محاسبات برای تقریب موج تخت در دو پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترونی به علاوه‌ی پتانسیل الکترون-پادپروتون برای گذار  $1s \rightarrow 2s$  با نتایج تئوری حاصل از تقریب مرتبه اول بورن و تقریب آیکنال مقایسه شده است. با توجه به شکل (۸) سطح مقطع کل محاسبه شده توسط پتانسیل اختلالی الکترونی، بالاتر از تقریب آیکنال قرار دارد و با افزایش انرژی به این تقریب نزدیک می‌شود. با در نظر گرفتن سهم برهم‌کنش الکترون-پادپروتون، چنان‌که شکل (۹) نشان می‌دهد، نتایج این کار تا انرژی  $100\text{keV}$  بر هر دو تقریب منطبق است و در زوایای بزرگ‌تر بر تقریب مرتبه اول بورن منطبق می‌باشد.

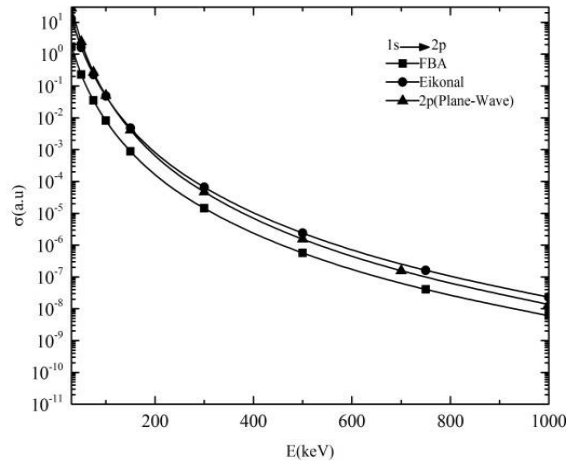


شکل (۸). مقایسه‌ی سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب موج تخت با پتانسیل الکترونی با تقریب FBA و Eikonal برای گذار  $1s \rightarrow 2s$ .

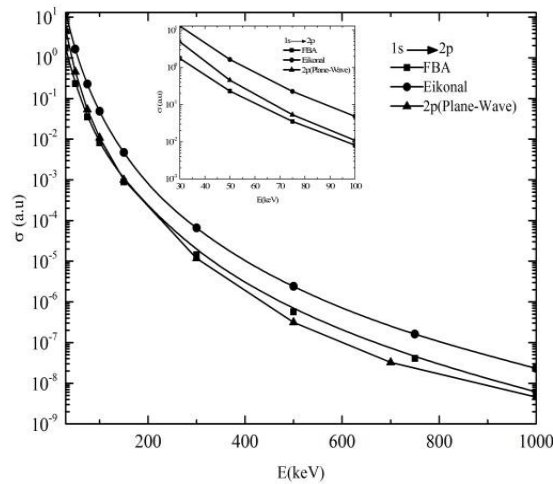


شکل (۹). مقایسه‌ی سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب موج تخت با پتانسیل الکترونی و الکترون-پادپروتون با تقریب FBA و Eikonal برای گذار  $1s \rightarrow 2s$ .

در گذار  $1s \rightarrow 2p$  نیز این مقایسه درباره محاسبات مربوط به سطح مقطع کل در هر دو پتانسیل با نتایج تئوری انجام گردیده است. در شکل (۱۰) نتایج محاسبات حاصل از نادیده گرفتن پتانسیل الکترون-پادپروتون، به تقریب آیکونال نزدیک است و همانطور که در شکل (۱۱) مشاهده می شود با در نظر گرفتن این پتانسیل، نتایج به تقریب مرتبه اول بورن نزدیک تر می باشد.



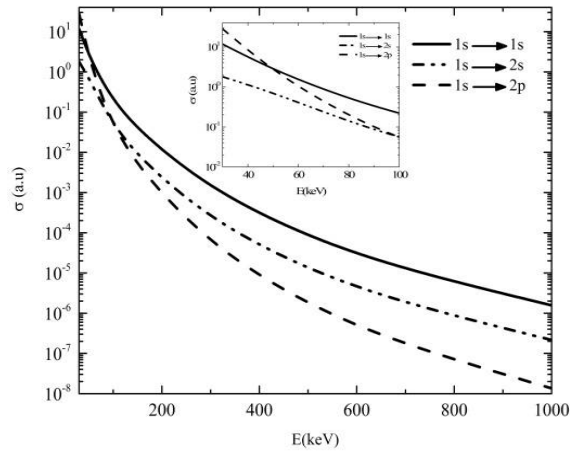
شکل (۱۰). مقایسه‌ی سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب موج تخت با پتانسیل الکترونی با تقریب FBA و Eikonal برای گذار  $1s \rightarrow 2p$ .



شکل (۱۱). مقایسه‌ی سطح مقطع کل محاسبه شده در تقریب موج تخت با پتانسیل الکترونی و الکترون-پادپروتون با تقریب FBA و Eikonal برای گذار  $1s \rightarrow 2p$ .

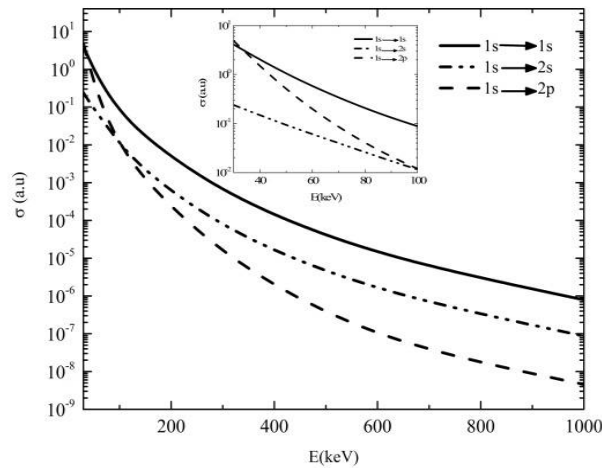
شکل (۱۲) سطح مقطع کل محاسبه شده در گذارهای  $1s \rightarrow 1s$ ،  $1s \rightarrow 2s$  و  $1s \rightarrow 2p$  با پتانسیل اختلالی الکترونی را با هم مقایسه می کند. منحنی‌ها نشان می دهند که در انرژی‌های کمتر از  $40keV$  سطح مقطع کل حالت  $2p$  بزرگتر از حالت  $1s$  است و با افزایش انرژی تا  $100keV$  سطح مقطع کل حالت برانگیخته  $2p$

از سطح مقطع کل حالت  $2s$  بزرگ‌تر است و در انرژی‌های بزرگ‌تر، سطح مقطع کل حالت برانگیخته  $2p$  کمتر از سطح مقطع کل سایر حالات محاسبه شده می‌باشد و از آن جایی که تقریب به کار گرفته شده تقریب انرژی‌های بالا می‌باشد به نظر می‌رسد که محاسبات در این انرژی‌ها منطقی باشند.



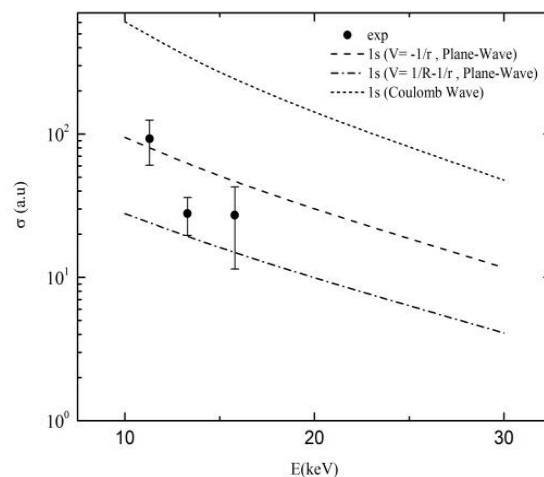
شکل (۱۲). مقایسه‌ی سطح مقطع کل در حالت‌های برانگیخته  $1s$ ،  $2s$  و  $2p$  با پتانسیل اختلالی الکترونی

با دقت به شکل (۱۳) مشخص می‌شود که حضور پتانسیل الکترون-پادپروتون در محاسبات باعث شده که سطح مقطع‌های محاسبه شده در انرژی‌های بالا که در تقریب به کار رفته معتبر هستند کمی کوچک‌تر از حالت فقط پتانسیل الکترونی باشند و این امر با توجه به منحنی‌های سطح مقطع‌های جزئی منطقی به نظر می‌رسد. هرچند روند نزولی منحنی‌ها در انرژی‌های پائین و بالا از یک الگو تبعیت می‌کنند.



شکل (۱۳). مقایسه‌ی سطح مقطع کل در حالت‌های برانگیخته  $1s$ ،  $2s$  و  $2p$  با پتانسیل اختلالی الکترونی و الکترون-پادپروتون.

با توجه به این که داده‌های تجربی اندکی یافت شده در شکل (۱۴) مقایسه‌ای بین محاسبات مربوط به سطح مقطع کل باداده‌های تجربی سطح مقطع کل مرجع [۱۸] انجام گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که سطح مقطع کل محاسبه شده توسط پتانسیل اختلالی الکترونی به علاوه پتانسیل الکترون-پادپروتون مطابقت بیشتری در این محدوده انرژی با نتایج تجربی دارد. لازم به ذکر است که نویسندگان این مقاله معتقدند که نتایج کار حاضر مربوط به این محدوده از انرژی نبوده و مقایسه باید در انرژی‌های بالاتر صورت پذیرد که متأسفانه به دلیل نبود نتیجه‌ی تجربی در محدوده‌ی انرژی مورد بحث این امر میسر نشد.



شکل (۱۴). مقایسه‌ی سطح مقطع کل نتایج به دست آمده با داده‌های تجربی سطح مقطع کل [۱۸].

در نهایت نتایج نشان می‌دهند که برخلاف کانال تهیج که موج کولنی به نتایج بهتری منجر می‌گردد در این کانال و در انرژی‌های مورد بحث تابع موج تخت به همراه در نظر گرفتن اندرکنش الکترون-پادپروتون منجر به جواب‌های بهتری خواهد شد. در این تقریب پدیده‌ی مرتبه اول برخورد رودررو قابل مشاهده است و دینامیک برخورد در زوایای کوچک و بزرگ پراکندگی قابل بحث می‌باشد. همچنین از محاسبات چنین استنباط می‌شود که تقریب موج کولنی در زوایای کوچک پراکندگی که بیشترین سهم را در سطح مقطع کل دارد می‌باشند در کانال انتقال بار قابل استناد نمی‌باشد. از محاسبات سطح مقطع جزئی مشخص است که در زوایای بزرگ پراکندگی و انرژی‌های بالای برخورد تقریب موج کولنی اثر برهم‌کنش الکترون-پادپروتون را کم رنگ‌تر از تقریب موج تخت به همراه در نظر گرفتن این پتانسیل در محاسبات وارد می‌سازد. برای فرمول‌بندی و درک بهتر دینامیک برخورد این فرآیند می‌بایست از تئوری‌های جامع‌تر موج واپیچیده که شرایط مرزی مطلوب را برآورده می‌سازند استفاده نمود. همچنین به‌کارگیری تئوری‌های چندکاناله می‌تواند نتایج را در مقایسه با کارهای تجربی بهبود بخشد. برای بررسی بیشتر دقت محاسبات انجام شده در این کار نیاز به نتایج تجربی و تئوری بیشتری در این محدوده‌ی انرژی می‌باشد.

## مراجع

[۱] M. Charlton and et al., *Phys. Rep.* ۲۴۱ (۱۹۹۴) ۶۵.



- [٢] M. H. Holzscheiter, M. Charlton, *Rep. Prog. Phys.* ٦٢ (١٩٩٩) ١.
- [٣] J. Eades, F. J. Hartmann, *Rev. Mod. Phys.* ٧١ (١٩٩٩) ٣٧٣.
- [٤] M. H. Holzscheiter and et al., *Hyp. Int.* ١٠٩ (١٩٩٧) ١.
- [٥] G. Baur and et al., *Phys. Lett. B.* ٣٦٨ (١٩٩٦) ٢٥١.
- [٦] M. Amoretti and et al., *Phys. Lett. B.* ٥٨٣ (٢٠٠٤) ٥٩.
- [٧] G. Gabriels and et al., *Phys. Rev. Lett.* ١٠٠ (٢٠٠٨) ١١٣٠٠١ (٤pp).
- [٨] A. Chattopadhyay and C. Sinha, *Phys. Rev. A.* ٧٤ (٢٠٠٦) ٠٢٢٥٠١ (١١pp).
- [٩] D. B. Cassidy, J. P. Merrison, M. Charlton, J. Mitroy and G. Ryzhikh, *J. Phys. B.* ٣٢ (١٩٩٩) ١٩٢٣.
- [١٠] J. Mitroy and G. Ryzhikh, *J. Phys. B.* ٣٠ (١٩٩٧) L٣٧١.
- [١١] N. Yamanaka and Y. Kino, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B.* ٢١٤ (٢٠٠٤) ٤٠.
- [١٢] H. C. Brinkman and H. A. Kramers, *Proc. Acad. Sci.* ٣٣ (١٩٣٠) ٩٧٣.
- [١٣] J. D. Jackson and H. Schiff, *Phys. Rev.* ٨٩ (١٩٥٣) ٣٥٩.
- [١٤] S. Geltman, *J. Phys. B.* ٤ (١٩٧١) ١٢٨٨.
- [١٥] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* ٧٦ (١٩٤٩) ٧٦٩.
- [١٦] A. Nordsieck, *Phys. Rev.* ٩٣ (١٩٥٤) ٧٨٥.
- [١٧] S. Tripathi, R. Biswas and C. Sinha, *Phys. Rev. A.* ٥١ (١٩٩٥) ٣٥٨٤.
- [١٨] J. P. Merrison and et al., *Phys. Rev. Lett.* ٧٨ (١٩٩٧) ٢٧٢٨.