

# رسانایی تونلی در اتصال گرافینی نرمال- عایق- ابررسانا با

## ساختار قرص کاربینو

حسنيه خاتمی<sup>۱</sup>، الهام مومیوند<sup>۱</sup>، بابک عبداللهی پور<sup>۲</sup>، رامین محمدخانی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان

<sup>۲</sup>گروه فیزیک حالت جامد، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

پست الکترونیکی:

*rmkhani@znu.ac.ir*

*b-abdollahi@tabrizu.ac.ir*

---

### چکیده:

ما رسانایی تونلی اتصال گرافینی نرمال-عایق-ابرسانا با ساختار کاربینو را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با حل معادله دیراک-بوگولیوبوف-دژن در نواحی مختلف اتصال و بکار بردن نظریه پراکندگی ضرایب بازتاب معمولی و اندریو برای اتصال به دست می‌آیند. با کمک فرمول بلوندر-تینخام-کلاپویک رسانایی تونلی اتصال به شکل تابعی از شدت سد پتانسیل ناحیه عایق محاسبه می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که رسانایی تونلی این اتصال مانند اتصال مشابه تخت به صورت تابعی از شدت سد پتانسیل نوسان می‌کند. رسانایی تونلی در نقاط تشدیدی که نسبت به اتصال تخت به اندازه  $\pi/2$  اختلاف فاز دارند بیشینه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** گرافین؛ رسانایی تونلی؛ ابررسانا؛ قرص کاربینو، بازتاب اندریو، سد پتانسیل باریک

---

# Tunneling conductance in a graphene based normal-insulator-superconductor junction with Corbino disk structure

Hossnieh Khatami<sup>1</sup>, Elham Moomivand<sup>1</sup>, Babak Abdollahipour<sup>2</sup>, Ramin Mohammadkhani<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan

<sup>2</sup> Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz

---

## Abstract

We study tunneling conductance of a graphene based normal metal-insulator-superconductor (NIS) junction with Corbino disk structure. Solving Dirac-Bogolioubov- De Gennes (DBdG) equation in different regions of the junction and employing scattering approach we obtain normal and Andreev reflection coefficients of the junction. Using Blonder-Tinkham-Klapwijk (BTK) formula we calculate tunneling conductance of the junction as a function of the barrier strength of insulating region. The obtained results show that tunneling conductance of the junction oscillates as a function of the barrier strength as in the planar structure case. The tunneling conductance shows maximums at resonances which have a  $\pi/2$  phase shift with respect to the planar structure.

**Keywords:** Graphene; Tunneling conductance; Superconductor; Corbino disk; Andreev reflection; Thin Barrier

*PACS No.* 72, 74, 81

---

## ۱. مقدمه

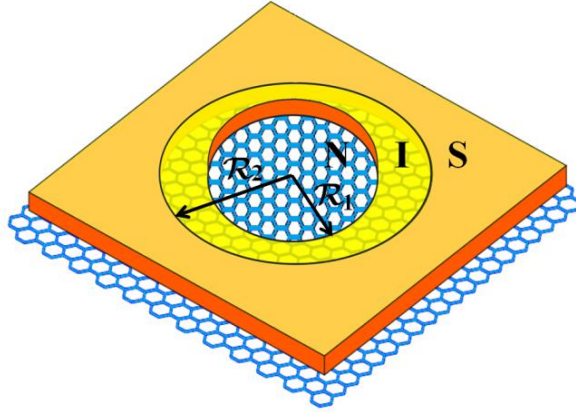
گرافین یک تک لایه از اتم های کربن با آرایش شش گوشه لانه زنبوری است که اتم های کربن در آن در دو زیرشبکه (A و B) قرار گرفته اند [۱]. گرافین یک نیم رسانای بدون گاف و دارای رابطه پاشندگی خطی در حد برانگیختگی های کوچک است که منجر به نوارهای رسانش و ظرفیت مخروطی شکلی می شود. این نوارها در گوشه های شش گوشه منطقه اول بریلوئن که نقاط دیراک خوانده می شوند با یکدیگر در تماس هستند. ساختار الکترونی گرافین توسط هامیلتونی دیراک برای ذرات بدون جرم بیان خواهد شد [۲]. وجود شبه ذرات دیراک را می توانیم بوسیله مطالعه رسانایی تونلی یک اتصال گرافینی فلز نرمال - ابررسانا درک نمائیم. هر چند گرافین یک ابررسانای طبیعی نمی باشد، اما ویژگی ابررسانایی می تواند در اثر مجاورت یک الکتروود ابررسانا

با لایه‌ی گرافین در آن القا شود [۳، ۴]. رسانایی در اتصال‌های فلز نرمال و ابررسانا بر پایه‌ی بازتاب آندریو بسیار مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در سال‌های اخیر رسانایی در اتصال‌های مشابه گرافینی توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۱۱-۵]. بینکر نشان داده است که در اتصال گرافینی نرمال-ابررسانا علاوه بر بازتاب معمولی آندریو، بازتاب آندریو ویژه یا آینه‌ای نیز می‌تواند رخ دهد که تاثیر بسزایی در رسانایی اتصال دارد [۳]. در مرجع [۱۰] رسانندگی تونلی اتصال گرافینی نرمال-عایق-ابررسانا با ساختار تخت و در حد اتصال بسیار پهن، که در آن شکل لبه‌های عرضی اتصال اهمیت خود را از دست می‌دهند، مطالعه شده است. آنها نشان داده‌اند که در حد سد پتانسیل نازک برای ناحیه نارسانا، رسانایی تونلی به شکل یک تابع نوسانی از شدت پتانسیل ناحیه نارسانا با دوره تناوب  $\pi$  است.

در این مقاله ما رسانایی تونلی یک اتصال گرافینی نرمال-عایق-ابررسانا با ساختار قرص کاربینو را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برتری اتصال با ساختار قرص کاربینو بر اتصال تخت در نداشتن لبه است. نتایج ما نشان می‌دهند که در حد سد پتانسیل نازک، رسانندگی تونلی این ساختار همانند ساختار مشابه تخت [۱۰] بر حسب شدت سد پتانسیل نارسانا یک رفتار نوسانی با دوره تناوب  $\pi$  دارد که نسبت به ساختار تخت درازی اختلاف فاز  $\pi/2$  است.

## ۲. مدل و معادلات اساسی

ما یک اتصال گرافینی نرمال-عایق-ابررسانا با ساختار قرص کاربینو را در نظر می‌گیریم. بخش نرمال قرصی به شعاع  $R_1$  است که توسط یک ناحیه‌ی عایق به شعاع  $R_2$  احاطه شده است و ناحیه‌ی ابررسانا باقی فضا را اشغال می‌کند. نمایی از ساختار مورد بررسی در شکل یک نشان داده شده است.



شکل یک: نمای اتصال گرافینی نرمال-عایق-ابرسانا با ساختار قرص کاربینو

برانگیختگی‌های با انرژی‌های کم الکترون و حفره در گرافین توسط معادله‌ی دیراک-بوگولیوبوف-دژن داده می‌شوند [۳]:

$$\begin{pmatrix} H-E_F & \Delta(r) \\ \Delta^*(r) & E_F-H \end{pmatrix} \psi = \varepsilon \psi \quad (1)$$

در رابطه‌ی بالا  $\Delta$  پتانسیل زوج ابرسانایی است که شبه ذرات الکترون گونه  $y_e$  و حفره گونه  $y_h$  را با یکدیگر جفت می‌کند و  $\varepsilon$  انرژی برانگیختگی شبه ذرات نسبت به انرژی فرمی است.  $\psi$  در معادله (۱) به شکل یک اسپینور چهار مولفه‌ای به صورت  $(Y_{A+}, Y_{B+}, Y_{A-}, Y_{B-})$  است که در آن زیر نوشت  $A, B$  مربوط به دو زیر شبکه گرافین هستند و علامت‌های  $\pm$  درجه آزادی وادی (valley) را نشان می‌دهند. بنابراین برانگیختگی‌های الکترونی در یک وادی با برانگیختگی‌های حفره در وادی دیگر با هم جفت می‌شوند. هامیلتونی دیراک برای فرمیون‌های دیراک بدون جرم  $H$ ، در مختصات قطبی به شکل زیر است [۱۲]:

$$H(r, \varphi) = -i \hbar v_F (\cos \varphi \sigma_x + \sin \varphi \sigma_y) \partial_r - i \hbar v_F (\cos \varphi \sigma_y - \sin \varphi \sigma_x) \frac{1}{r} \partial_\varphi + U(r) \quad (2)$$

که در آن ماتریس‌های پائولی هستند و پتانسیل الکتروستاتیک به شکل زیر است:

$$U(r) = -U_0 \theta(r-R_2) + V_0 \theta(-r+R_2) \theta(r-R_1)$$

که  $\theta$  در آن تابع پله‌ای است،  $U_0$  و  $V_0$  به ترتیب اندازه شدت پتانسیل در ناحیه‌های ابررسانا و نارسانا هستند. با حل معادله‌ی دیراک-بوگولیوبوف-دژن در هر یک از سه ناحیه‌ی موجود در اتصال، ویژه توابع مربوط به هر ناحیه به دست می‌آیند. توابع موج در ناحیه‌ی نرمال یا عایق، با در نظر گرفتن پتانسیل مربوط به آن ناحیه، به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \psi^{e^{+(-)}} &= e^{j(m-1/2)\varphi} \begin{pmatrix} H_{m-1/2}^{(2)}(k_e r) \\ ie^{j\varphi} \text{sign}[\varepsilon + \mu - U(r)] H_{m+1/2}^{(2)}(k_e r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi^{h^{+(-)}} &= e^{j(m-1/2)\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{m-1/2}^{(1)}(k_h r) \\ ie^{j\varphi} \text{sign}[-\varepsilon + \mu - U(r)] H_{m+1/2}^{(1)}(k_h r) \end{pmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

که در آن بردارهای موج شبه ذرات الکترون گونه و حفره گونه به شکل  $k_{e(h)} = \frac{|(-)\varepsilon + \mu - U(r)|}{\hbar v_F}$  تعریف می‌شوند.

توابع موج در ناحیه ابررسانا با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\psi_S^{+(-)} = e^{i(m-1/2)\varphi} \begin{pmatrix} e^{(-)i\beta} H_{m-1/2}^{(2)}(k_{e(h)}^S r) \\ ie^{(-)i\beta} H_{m+1/2}^{(2)}(k_{e(h)}^S r) e^{i\varphi} \\ e^{-i\Phi} H_{m-1/2}^{(2)}(k_{e(h)}^S r) \\ e^{-i\Phi} H_{m+1/2}^{(2)}(k_{e(h)}^S r) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

که در آن  $\Phi$  فاز ابررسانایی،  $k_{e(h)}^S = \frac{(\mu + U_0) + (-)i\Delta_0 \sin\beta}{\hbar v_F}$  و  $m$  دارای مقادیر نیمه صحیح است. توابع موج کلی در

سه ناحیه‌ی مورد بررسی با در نظر گرفتن فرایندهای بازتاب نرمال و اندریو، به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} \psi_N(r, \varphi) &= \psi_N^+ + r_{ee} \psi_N^- + r_{eh} \psi_N^{h-} \\ \psi_I(r, \varphi) &= p \psi_I^+ + q \psi_I^- + m \psi_I^{h+} + n \psi_I^{h-} \\ \psi_S(r, \varphi) &= t_{ee} \psi_S^+ + t_{eh} \psi_S^- \end{aligned} \quad (5)$$

با اعمال شرایط مرزی زیر که عبارت از پیوستگی توابع موج در مرزهای ناحیه‌های مختلف هستند ضریب‌های بازتاب نرمال ( $r_{ee}$ ) و اندریو ( $r_{eh}$ ) به دست می‌آیند [۱۳]:

$$\begin{aligned}\psi_N(r=R_1) &= \psi_I(r=R_1), \\ \psi_I(r=R_2) &= \psi_S(r=R_2)\end{aligned}\quad (7)$$

شدت سد پتانسیل ناحیه‌ی عایق به شکل کمیت بدون بعد  $\chi$  تعریف می‌شود [۱۰]:

$$\chi = \frac{V_0 d}{\hbar v_F} \quad (6)$$

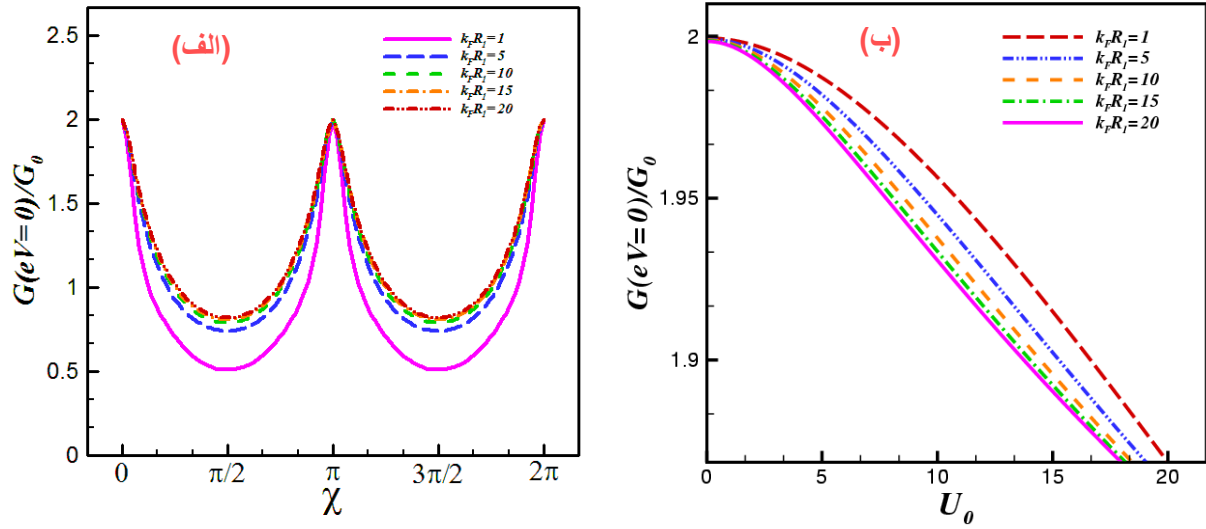
حد سد پتانسیل باریک را با در نظر گرفتن  $V_0 \rightarrow \infty$  و  $d \rightarrow 0$  معرفی می‌کنیم، طوریکه شدت سد پتانسیل ( $\chi$ ) مقداری متناهی داشته باشد. با اعمال حد سد پتانسیل باریک ضرایب بازتاب در این حد به دست می‌آیند که توابع متناوبی بر حسب  $\chi$  هستند. با در دست داشتن ضرایب بازتاب، رسانایی تونلی اتصال از فرمول بلوندر-تینخام-کلاپویک به دست می‌آید [۱۰].

$$G = G_0 \sum_m \left( 1 - |r_{ee}|^2 + |r_{eh}|^2 \frac{K e^N R_1}{K_h^N R_1} \right) \quad (8)$$

در این رابطه  $G_0 = \frac{4e^2}{h}$  است که ضریب  $\epsilon$  از تبهگنی درجه‌های آزادی اسپین و وادی حاصل می‌شوند. با محاسبه عددی و انجام جمع بر روی مقادیر مختلف  $m$  رسانایی تونلی بر حسب پارامترهای اتصال به دست می‌آید.

### ۳. نتایج و بحث

رسانایی تونلی اتصال گرافینی NIS با ساختار قرص کاربید با در نظر گرفتن سطح فرمی یکسان در نواحی ابررسانا و نرمال،  $U_0 = 0$  و  $\Delta_0 = 0.01 E_F$ ، برای مقادیر مختلف غلظت حامل‌های بار  $k_F R_1$ ، در شکل دو (الف) نشان داده شده است. در این نمودارها،  $G/G_0$  بر حسب کمیت بدون بعد شدت سد پتانسیل ناحیه‌ی عایق  $\chi$  رسم شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که رسانایی تونلی در اتصال NIS با ساختار قرص کاربید رفتاری نوسانی بر حسب شدت سد پتانسیل ناحیه عایق با دوره تناوب  $\pi$  دارد. رسانایی تونلی به ازای مقادیر  $\chi = n\pi$  برای شدت سد پتانسیل، که در آن  $n$  یک عدد صحیح است، به بیشترین مقدار خود



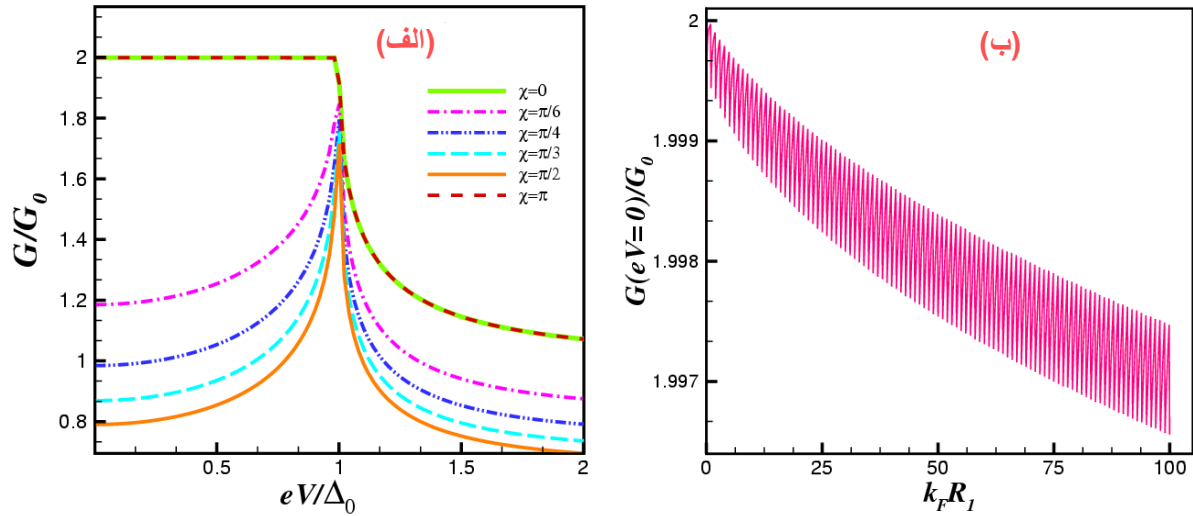
شکل دو: (الف) رسانایی تونلی بر حسب شدت سد پتانسیل در بایاس صفر برای  $\Delta_0 = 0.01 E_F$  و  $k_F R_I = 1, 5, 10, 15, 20$ ,  $U_0 = 0$

(ب) رسانایی تونلی بر حسب پتانسیل ناحیه ابررسانا برای مقادیر مختلف  $k_F R_I$  و  $\chi = 0$ ،  $\Delta_0 = 0.01 E_F$

می‌رسد. این نتیجه نشان می‌دهد که در قیاس با اتصال گرافینی NIS با ساختار تخت [۱۰]، تشدید رسانایی بر حسب شدت سد پتانسیل دارای اختلاف فاز  $\pi / 2$  است. علاوه بر این افزایش غلظت حامل‌های بار منجر به افزایش رسانایی اتصال برای همهی مقادیر شدت سد پتانسیل به جز نقاط تشدید می‌شود.

در شکل دو(ب) رفتار رسانایی تونلی بر حسب پتانسیل ناحیه ابررسانا برای مقادیر مختلف  $k_F R_I$  و برای  $\chi = 0$  نشان داده شده است. بررسی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که رسانایی با افزایش  $U_0$  کاهش می‌یابد. افزایش  $U_0$  سبب افزایش اختلاف در سطح فرمی نواحی ابررسانا و نرمال شده و منجر به کاهش رسانایی سیستم می‌شود. رفتار رسانایی تونلی بر حسب ولتاژ بایاس  $eV/\Delta_0$ ، برای مقادیر مختلف  $\chi$  در شکل سه(الف) نشان داده شده است. رفتار نوسانی رسانایی تونلی با دوره تناوب  $\pi$  در این شکل نیز قابل مشاهده است. در این جا حالتی که سطوح انرژی فرمی ناحیه نرمال و ابررسانا هم تراز هستند، در نظر گرفته شده است. همان گونه که دیده می‌شود در لبه گاف ( $eV = \Delta_0$ ) رسانایی تونلی به بیشترین مقدار خود ( $2G_0$ ) می‌رسد که این مقدار مستقل از شدت سد پتانسیل ناحیه عایق است. همچنین به ازای ولتاژهای زیر گاف ( $eV < \Delta_0$ ) رسانایی تونلی برای

$$\chi = n\pi$$



شکل سه: (الف) رسانایی تونلی بر حسب ولتاژ بایاس ( $eV = \Delta_0$ ) برای مقادیر مختلف  $\chi$ ، برای  $k_F R_1 = 10$  و  $U_0 = 0$ .

(ب) رسانایی تونلی در ولتاژ بایاس صفر بر حسب غلظت حاملین بار ( $k_F R_1$ ) برای  $U_0 = 0$  و  $\chi = 0$ .

دارای بیشترین مقدار  $2G_0$  است. این نقاط، همان نقاطی هستند که به ازای آن‌ها عبور تشدید رخ می‌دهد ( $r_{ee} = 0$ ) و رسانندگی سیستم دارای قله‌ی تیز است.

همان طور که در شکل سه (ب) مشاهده می‌شود رسانایی اتصال در نقاط تشدید با افزایش سطح اتصال و یا افزایش غلظت حاملین بار ( $k_F R_1$ ) به صورت نوسانی و به میزان بسیار کم کاهش می‌یابد. بنابراین ملاحظه می‌شود که رفتار رسانایی بر حسب غلظت حاملین بار در نقاط تشدید برخلاف سایر مقادیر شدت سد پتانسیل می‌باشد.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مطالعه رسانایی تونلی اتصال گرافینی نرمال-عایق-ابرسانا با ساختار قرص کاربینه مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از معادله بلوند-تینخام-کلاپویک رسانایی تونلی این اتصال بر حسب شدت سد پتانسیل ناحیه عایق محاسبه شده است. نتایج این محاسبات نشان دادند که در حد سد پتانسیل باریک رسانایی تونلی این اتصال همانند اتصال مشابه تخت یک رفتار نوسانی بر حسب شدت سد پتانسیل ناحیه عایق از خود نشان می‌دهد. رسانایی اتصال در نقاط تشدید که نسبت به حالت تخت دارای اختلاف فاز  $\pi / 2$  هستند بیشینه می‌شود. افزایش غلظت الکترونی در ناحیه نرمال سبب کاهش اندک رسانایی در نقاط



تشدید شده و در سایر نقاط باعث افزایش رسانایی تونلی می‌شود. نتایج به دست آمده در این مطالعه اجازه می‌دهند که درک بهتری از اتصال‌های نرمال-ابررسانای گرافینی داشته باشیم.

## مرجع‌ها

1. K.S. Novoselov et al., “Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films”; *Science* **306**, 666-669 (2004).
2. K.S. Novoselov et al., “Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene”; *Nature* **438**, 197 (2005).
3. C.W.J. Beenakker, “Specular Andreev reflection in graphene” *Phys. Rev. Lett* **97**, 067007 (2006).
4. M. Titov and C.W.J. Beenakker, “Josephson effect in ballistic graphene” *Phys. Rev. B* **74**, 041401(R) (2006).
5. Ali G. Moghaddam, M. Zareyan, “Josephson effect in mesoscopic graphene strips with finite width” *Phys. Rev. B* **74**, 241403(R) (2006).
6. Ali. G. Moghaddam and M. Zareyan “Graphene based superconducting quantum point contacts” *Appl. Phys. A* **89**, 579-585 (2007).
7. J. Gonzalez, and E. Perfetto, “Critical currents in graphene Josephson junctions” *J. Phys.: Condens. Matter* **20**, (2008).
8. Xu Du, Ivan Skachko, and Eva Y. Andrei, “Josephson current and multiple andreev reflections in graphene junctions” *Phys. Rev. B* **77**, 184507 (2008).
9. F. Miao, S. Wijeratne, Y. Zhang, et al., “Phase-Coherent Transport in Graphene Quantum Billiards” *Science* **317**, 1530 (2007).
10. Subhro Bhattacharjee and K.Sengupta, “Tunneling conductance of graphene junctions” *Phys. Rev. Lett* **97**, 217001 (2006).
11. Babak Abdollahipour and Elham Moomivand “Magnetopumping current in graphene Corbino pump” *Physica E* **86**, 204–209 (2017).
12. P. Recher, B. Trauzettel, A. Rycerz, M. Blanter, C.W.J. Beenakker and A.F. Morpurgo, “Aharonov-Bohm effect and broken valley degeneracy in graphene rings” *Phys. Rev. B* **76**, 235404 (2007).
13. G.E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, “Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion” *Phys. Rev. B* **25**, 4515 (1982).