تبدیلات دوگانگی آبلی استاندارد در گرانش f(T)

عطازاده، محمد[۱]؛ اقبالی، علی[۲]

[۱و۲] گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده

با توجه به مرتبه اختلال، معادلات حرکت مربوط به کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین در واقع نوعی تعمیم معادلات انیشتین می‌باشند. بنابراین با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(T)$ تصویر می‌شود که ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش $f(T)$ نشان می‌دهیم که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. در نهایت با استفاده از لاگرانژی دوگان یافته و همچنین ناوردایی اسکالر پیچش T تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t) \to 1/a(t)$ شکل دقیق $f(T)$ بدست آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات دوگانگی آبلی، کنش موثر ریسمان، گرانش $f(T)$

Standard Abelian duality transformations in f(T) gravity

Atazadeh, M.; Eghbali, A.

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Abstract

According to the perturbation order, the equations of motion of low-energy string effective action are the generalized Einstein equations. Thus, by making use of the conformal transformation of the metric tensor, it is possible to map the low-energy string effective action into $f(T)$ gravity, relating the dilaton field to the torsion scalar. Considering a homogeneous and isotropic universe and writing the canonical Lagrangian for $f(T)$ gravity, we show that the invariance under the duality transformation holds for the cosmic scale factor $a(t)$ at the level of the Lagrangian. Finally, by use of the dualized Lagrangian and also the invariance of torsion scalar under the scale factor duality $a(t) \to 1/a(t)$, the specific form of the $f(T)$ function is obtained.

Keywords: Abelian duality transformations, String effective action, $f(T)$ gravity

PACS No. (04, 10)

۱.مقدمه

در اواخر دهه هشتاد میلادی مطالعه تقارن دوگانگی در فیزیک انرژی‌های بالا توجه اکثر فیزیک‌دانان نظری را به خود جلب کرده بود. تقارن دوگانگی در نظریه ریسمان به صورت دوگانگی $R \leftrightarrow \alpha'/R$ در فشرده-سازی چنبره‌ای[1] برای اولین بار خود را نشان داد[1]. بعدها درک این دوگانگی با مطالعه دوگانگی در مدل-های سیگمای دو بعدی بیشتر فهمیده شد [2]. به این نوع دوگانگی، دوگانگی از نوع-T[2] می‌گویند[3]. تقارن دوگانگی-T در نظریه ریسمان درک ما را از هندسه فضا-زمان از دیدگاه نظریه ریسمان عمیق‌تر می-کند، چرا که تبدیل دوگان-T دو مدل سیگما با فضاهای هدفی را که کاملاً از لحاظ هندسی تفاوت دارند به هم ربط می‌دهد، به‌طوریکه این دو مدل از نظر فیزیکی کاملاً معادل هستند. بوشر[3][2] نشان داد که تقارن $O(d,d,z)$ می‌تواند خاصیت مربوط به تمام ریسمان‌های منتشر شده در فضا-زمان‌های خمیده نیز باشد، به شرطی که فضای پس‌زمینه این ریسمان‌ها دارای تقارن ایزومتری آبلی باشد. بعدها این تقارن به حالتی که فضای پس‌زمینه دارای گروه تقارن ایزومتری آبلی d- بعدی باشد تعمیم یافت و نشان داده شد که فضای مدولی $O(d,d,z)$ همان گروه تقارن مربوط به کنش موثر ریسمان می‌باشد[4]. دو مدل سیگما که توسط دوگانگی آبلی به هم مربوط می‌شوند کاملاً از لحاظ فیزیکی معادل‌اند، زیرا نشان داده شده است که در حالت کلاسیک این دو مدل تبدیل کانونیک یکدیگر می‌باشند[5]. از دیدگاه نظریه سیگما برای داشتن دوگانگی آبلی استاندارد شرط وجود تقارن ایزومتری الزامی می‌باشد [2]. در حالت آبلی برای به‌دست آوردن مدل دوگان از روی مدل اصلی ابتدا تقارن ایزومتری را پیمانه‌ای می‌کنند، سپس شدت میدان مربوط به این میدان پیمانه‌ای A_α همراه با ضریب لاگرانژ را به کنش اضافه می‌کنند ($\tilde{\theta}F_{\mu\nu}$)، به‌طوریکه با کار در پیمانه خالص اگر نسبت به ضریب لاگرانژ انتگرال‌گیری شود، با تثبیت پیمانه خود مدل اصلی به‌دست می-آید. اما اگر روی میدان‌های پیمانه‌ای A_αانتگرال‌گیری شود در آن صورت پس از تثبیت پیمانه کنش مدل دوگان به دست می‌آید [6] به‌طوریکه ضریب لاگرانژ نقش یک بعد هندسی فضای دوگان را بازی می‌کند.

مدل‌های گرانش تعمیم‌یافته[4] به عنوان یکی از مدل‌های جایگزین ثابت کیهان‌شناسی برای توصیف انبساط شتابدار کیهان پیشنهاد می‌شود [7]. در این مدل‌ها فرض می‌شود که گرانش در مقیاس‌های کیهانی و

[1] Torodial compactification
[2] Target
[3] Buscher
[4] Modified gravity theories

چگالی‌های کم رفتار متفاوتی از گرانش اینشتینی دارد که یکی از این مدل‌های موفق گرانش $f(R)$ است [8]. مدل‌های گرانشی تعمیم‌یافته از اهمیت بسزایی برخوردارند، زیرا مدل‌هایی از این نظریه می‌توانند دینامیک انبساط شتابدار کیهان را توصیف کنند. بر خلاف این نظریه، گرانش اینشتینی در مقیاس‌های کیهانی خوب کار نمی‌کند.

نظریه گرانش تعمیم‌یافته جدیدی به نام نظریه $f(T)$ در سال‌های اخیر مطرح شده است [9] که نسخه تعمیم‌یافته گرانش تله‌پارالل[5] است. در واقع گرانش تله‌پارالل برای متحد کردن نظریه‌های گرانش و الکترومغناطیس اولین بار توسط اینشتین پیشنهاد شده بود که در این رهیافت به جای انحنای فضا زمان، پیچش[6] فضا زمان در نظر گرفته می‌شود [10].

در تعدادی از مقالات نظیر [11] نشان داده شده است که مدل‌های گرانشی $f(R)$ تحت تبدیلات دوگانگی ناوردا هستند که این می‌تواند برای ارتباط بین نظریه‌های گرانش تعمیم‌یافته و نظریه ابرریسمان در حد انرژی های پایین مفید باشد. نتیجه مهم رویکرد بالا تفسیر هندسی میدان دیلتون[7] است که این میدان در نظریه ریسمان نقش مهمی را ایفاء می‌کند. اخیراً با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(R)$ تصویر داده شده که ارتباطی بین میدان دیلتون و انحنای اسکالر ریچی[8] برقرار می‌کند [12]. در مرجع [12] با استفاده از تبدیل همدیس متریک، دوگانگی ضریب مقیاس[9] و همچنین با استفاده از تقارن نوتر جواب‌های دقیق کیهان‌شناسی در نظریه $f(R)$ بدست آورده شده است. در این مقاله با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(T)$ تصویر می‌شود که ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. سپس با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش $f(R)$ نشان می‌دهیم که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. در نهایت با استفاده از لاگرانژی دوگان‌یافته و همچنین با استفاده از ناوردایی اسکالر پیچش T تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t)\rightarrow 1/a(t)$ شکل دقیقی برای $f(T)$ بدست آورده می‌شود.

[5] Teleparallel gravity
[6] Torsion
[7] Dilaton field
[8] Ricci
[9] Scale factor duality

۲. تبدیلات دوگانگی آبلی استاندارد

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد در حالت آبلی برای به‌دست آوردن مدل دوگان از روی مدل اصلی ابتدا تقارن ایزومتری را پیمانه‌ای می‌کنند.در زیر روش به‌دست آوردن تبدیلات دوگانگی آبلی استاندارد که به تبدیلات بوشر [2] مشهورند شرح داده می‌شود (برای مرور دقیق‌تر به مرجع [3] مراجعه کنید). کنش توصیف‌کننده یک مدل سیگمای دو بعدی بر روی یک خمینه d- بعدی $\mathcal{M}$ با مختصات‌های $\{X^A\}$، $(A=0,1,...,d-1)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\, \mathrm{d}\sigma\ \sqrt{-h}\left(\mathrm{h}^{\alpha\beta}G_{AB}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X^B+\varepsilon^{\alpha\beta}B_{AB}\partial_\alpha X^A\partial_\beta X^B+\alpha' R^{(2)}\varphi(x)\right), \qquad (۱)$$

به‌طوریکه $\sigma^\alpha=(\tau,\sigma)$ مختصات جهان‌رویه، $\varepsilon^{\alpha\beta}$ میدان تانسوری پادمتقارن روی جهان‌رویه، $h_{\alpha\beta}$متریک ذاتی جهان رویه و h دترمینان آن می‌باشد. G_{AB} و B_{AB} به ترتیب متریک و پتانسیل پیچش مربوط به فضای هدف $\mathcal{M}$ هستند. ضریب α'دارای بعد طول به توان دو است. $\varphi(x)$ میدان دیلتون جفت شده به انحنای اسکالر $R^{(2)}$ از متریک جهان رویه $h_{\alpha\beta}$ می‌باشد. حال اگر کنش (۱) دارای تقارن ایزومتری باشد، در آن صورت می‌توان با در نظر گرفتن مختصات مناسب، تقارن مزبور را به صورت انتقال در امتداد مختصه مربوطه نشان داد، به‌طوریکه متریک G_{AB} ، میدان تانسوری پادمتقارن B_{AB} و میدان دیلتون $\varphi(x)$ مستقل از مختصه مربوط به ایزومتری باشند. حال اگر مختصه ایزومتری را با θ نمایش دهیم در آن صورت می‌توان با نوشتن مختصات‌های فضای هدف $\mathcal{M}$ به صورت $\{X^A\}=\{\theta,x^\mu\}$ ،$(\mu=1,...,d-1)$ کنش (۱) را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\, \mathrm{d}\sigma\ \sqrt{-h}[\mathrm{h}^{\alpha\beta}(G_{00}\partial_\alpha\theta\,\partial_\beta\theta+2G_{0\mu}\partial_\alpha\theta\,\partial_\beta x^\mu+G_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\,\partial_\beta x^\nu)\\ +\varepsilon^{\alpha\beta}(2B_{0\mu}\partial_\alpha\theta\,\partial_\beta x^\mu+B_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\,\partial_\beta x^\nu)+\alpha' R^{(2)}\varphi(x)].\end{aligned} \qquad (۲)$$

همان‌طور که در ابتدای این بخش توضیح داده شد برای به‌دست آوردن مدل سیگمای دوگان کافی است که تقارن ایزومتری را پیمانه‌ای کنیم و شدت میدان مربوط به میدان پیمانه‌ای A_αرا همراه با ضریب لاگرانژ $\tilde{\theta}$ به کنش اضافه کنیم. در آن صورت کنش (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\ \sqrt{-h}\{h^{\alpha\beta}[G_{00}(\partial_\alpha\theta+A_\alpha)(\partial_\beta\theta+A_\beta)+2G_{0\mu}(\partial_\alpha\theta+A_\alpha)\partial_\beta x^\mu$$
$$+G_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu]+\varepsilon^{\alpha\beta}[2B_{0\mu}(\partial_\alpha\theta+A_\alpha)\partial_\beta x^\mu+B_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu] \quad (۳)$$
$$+2\varepsilon^{\alpha\beta}\tilde{\theta}\ \partial_\alpha A_\beta+\alpha' R^{(2)}\varphi(x)\}.$$

با انتگرال‌گیری روی میدان‌های پیمانه‌ای و سپس با تثبیت پیمانه به صورت $\theta=0$ خواهیم داشت:

$$A_\alpha=-\frac{1}{G_{00}}\Big[G_{0\mu}\partial_\alpha x^\mu+\varepsilon_\alpha{}^\beta(B_{0\mu}\ \partial_\beta x^\mu+\partial_\beta\tilde{\theta})\Big], \quad (۴)$$

با جایگذاری میدان‌های پیمانه‌ای A_α بالا در کنش (۳) و سپس با تثبیت پیمانه مدل دوگان به شکل زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$\tilde{S}=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\ \sqrt{-h}[h^{\alpha\beta}(\tilde{G}_{00}\partial_\alpha\tilde{\theta}\ \partial_\beta\tilde{\theta}+2\tilde{G}_{0\mu}\partial_\alpha\tilde{\theta}\ \partial_\beta x^\mu+\tilde{G}_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu)$$
$$+\varepsilon^{\alpha\beta}(2\tilde{B}_{0\mu}\partial_\alpha\tilde{\theta}\ \partial_\beta x^\mu+\tilde{B}_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\ \partial_\beta x^\nu)+\alpha' R^{(2)}\varphi(x)], \quad (۵)$$

به‌طوریکه

$$\tilde{G}_{00}=\frac{1}{G_{00}},\quad \tilde{G}_{0\mu}=\frac{B_{0\mu}}{G_{00}},\qquad \tilde{G}_{\mu\nu}=G_{\mu\nu}-\frac{G_{0\mu}G_{0\nu}-B_{0\mu}B_{0\nu}}{G_{00}},$$
$$\tilde{B}_{0\mu}=\frac{G_{0\mu}}{G_{00}},\qquad \tilde{B}_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}-\frac{G_{0\mu}B_{0\nu}-G_{0\nu}B_{0\mu}}{G_{00}}. \quad (۶)$$

تبدیلات بالا نشان می‌دهند که دوگانگی، هندسه‌های مختلف را به هم مربوط می‌کنند. این تبدیلات دوگانگی به تبدیلات بوشر مشهورند[2]. مدل دوگان که با کنش (۵) نمایش داده می‌شود، نیز دارای همان تقارن ایزومتری آبلی هست که در اینجا مختصه ایزومتری همان ضریب لاگرانژ $\tilde{\theta}$ است. بعلاوه اینجا فرض شده است که مختصه‌های خمینه دوگان به صورت $\{\tilde{X}^A\}=\{\tilde{\theta},x^\mu\}$هستند. زمانی که روی میدان-های پیمانه‌ای انتگرال‌گیری می‌شود تبدیل دوگانگی از ژاکوبی تبدیل، تصحیحات کوانتومی دریافت می‌کند به‌طوریکه در حد یک حلقه این تصحیحات یک انتقال در میدان دیلتون به صورت زیر ایجاد می‌کنند [2].

$$\tilde{\varphi}=\varphi-\frac{1}{2}\ln G_{00}. \quad (۷)$$

به عبارت دیگر اگر مدل سیگمای اصلی (۱) شرایط ناوردایی همدیس تا حد یک حلقه را برآورده کند، سپس مدل دوگان (۵) نیز با شرط انتقال در میدان دیلتون به صورت (۷) شرایط ناوردایی همدیس تا مرتبه یک حلقه را برآورده خواهد کرد. شرط همدیس بودن ریسمان نوع فضاهایی که ریسمان در آن منتشر می شود را محدود می‌کند. در واقع این شرط الزام می‌کند که متریک فضای پس‌زمینه G، میدان تانسوری پادمتقارن B و نیز میدان دیلتون φ در یک سری معادلات صدق کنند. این معادلات، در ارتباط با صفر شدن توابع بتای مربوط به کنش مدل سیگمای (۱) می‌باشند که به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\beta^{(G)}_{\mu\nu}: \;\; \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\rho\sigma} H^{\rho\sigma}{}_{\nu} + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi = 0, \\ &\beta^{(B)}_{\mu\nu}: \;\; \nabla^{\lambda}\left(e^{-2\varphi} H_{\lambda\mu\nu}\right) = 0, \\ &\beta^{(\varphi)}: \;\; -R + \frac{1}{12} H_{\mu\rho\sigma} H^{\mu\rho\sigma} + 4\nabla_{\mu}\varphi\, \nabla^{\mu}\varphi - 4\nabla^{2}\varphi - \Lambda = 0, \end{aligned} \tag{۸}$$

در معادلات بالا $R = R_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ انحنای اسکالر مربوط به متریک $G_{\mu\nu}$ و $H_{\mu\nu\rho}$ پیچش مربوط به پتانسیل $B_{\mu\nu}$ می‌باشد که به صورت $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu}B_{\nu\rho} + \partial_{\nu}B_{\rho\mu} + \partial_{\rho}B_{\mu\nu}$ تعریف می‌شود. از طرف دیگر معادلات بالا معادلات حرکت مربوط به کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین می‌باشند که این کنش در $n+1$ –بعد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathrm{S} = \int d^{\,n+1}x\; \sqrt{-G}\; \mathrm{e}^{-2\varphi}\left(R - \frac{1}{12} H_{\mu\rho\sigma} H^{\mu\rho\sigma} + 4\nabla_{\mu}\varphi\, \nabla^{\mu}\varphi + \Lambda\right). \tag{۹}$$

در کنش بالا G دترمینان متریک $G_{\mu\nu}$ و n تعداد ابعاد فضایی را مشخص می‌کند و جمله ثابت کیهان‌شناسی به صورت $\Lambda = \dfrac{25-n}{3\alpha'}$ داده می‌شود که برای ابعاد بحرانی($n=25$) در نظریه ریسمان بوزونی این ثابت معادل صفر است. ما همچنین می‌بایست توجه داشته باشیم که کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین تبدیل به نوعی نظریه اسکالر–تانسوری (برنز–دیکی گونه) می‌شود. برای تفسیر جهان قابل مشاهده نیازمند جواب‌های کیهان‌شناسی هستیم. بدین ترتیب حالتی را مطالعه می‌کنیم که در آن ابعاد فضا–زمانی $n+1=4$ باشد که در این حالت ریسمان‌ها بحرانی نیستند و $\Lambda \neq 0$ است. همچنین در چهار بعد تانسور متریک را با $g_{\mu\nu}$و دترمینان آن را با g نمایش می‌دهیم. همان‌طور که در بالا توضیح داده شد معادلات حرکت مربوط به کنش (۹) با وردش کنش نسبت به تانسور متریک، میدان پادمتقارن $B_{\mu\nu}$ و میدان دیلتون بدست می‌آیند.

در چهار بعد و در غیاب پیچش $H_{\mu\nu\rho}$، تنها اولین و سومین معادله از (۸) را خواهیم داشت. با ضرب $g^{\mu\nu}$ در اولین معادله از (۸) و سپس با استفاده از سومین معادله نتیجه‌گیری می‌شود که

$$\nabla_\mu\varphi\, \nabla^\mu\varphi = \tfrac{1}{4}(\Lambda - R). \qquad (۱۰)$$

این معادله در بخش بعدی مفید خواهد بود.

۳. گرانش $f(T)$ برای مدل ریسمان- دیلتون

برای بررسی گرانش تله‌پارالل از دولنگه‌ای‌ها[10] در هر نقطه روی خمینه استفاده می‌شود($e_A(x^\mu)$) که اندیس A از ۰ تا ۳ روی فضای مماسی از خمینه تغییر می‌کند. رابطه بین دولنگه ها با متریک از معادله زیر پیروی می‌کند

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB}\; e^{\mathrm{A}}_{\mu} e^{\mathrm{B}}_{\nu}, \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا ν, μ اندیس‌های مختصات روی خمینه هستند که از ۰ تا ۳ تغییر می‌کنند و $e_A^{\ \mu}$ تشکیل میدان برداری مماس روی فضای مماسی می‌دهد به‌طوریکه روی آن فضا متریک تخت η_{AB} تعریف می‌شود.

در نسبیت عام از هم‌وستارهای[11] بدون پیچش لویی–چی‌ویتا استفاده می‌شود در حالیکه در گرانش تله-پارالل از هم‌وستارهای بدون انحنای ویتزنباخ[12] استفاده می‌شود. بنابراین پیچش $T^{\rho}_{\ \mu\nu}$ و هم‌پیچش $K^{\rho}_{\ \mu\nu}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [13]:

$$T^{\ \rho}_{\ \mu\nu} = e^{\rho}_{\ \mathrm{A}}(\partial_\mu e_\nu^{\ A} - \partial_\nu e_\mu^{\ A}), \qquad (۱۲)$$

$$K^{\rho}_{\ \mu\nu} = \tfrac{1}{2}(T_{\mu\ \nu}^{\ \rho} + T_{\nu\ \mu}^{\ \rho} - T^{\rho}_{\ \mu\nu}). \qquad (۱۳)$$

برای نوشتن چگالی لاگرانژی در کنش نسبیت عام از انحنای ریچی Rاستفاده می‌شود در حالیکه برای نوشتن چگالی لاگرانژی تله‌پارالل به جای انحنای اسکالر ریچی از اسکالر پیچش T استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

---

10 Veilbeins
11 Connections
12 Weitzenbock

$$T \equiv S_{\rho}^{\ \mu\nu}\ T^{\rho}_{\ \mu\nu}, \tag{۱۴}$$

به‌طوریکه در این رابطه

$$S_{\rho}^{\ \mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(K^{\mu\nu}_{\ \ \ \rho} + \delta^{\mu}_{\rho} T^{\alpha\nu}_{\ \ \ \alpha} - \delta^{\nu}_{\rho} T^{\alpha\mu}_{\ \ \ \alpha}). \tag{۱۵}$$

کنش تعمیم‌یافته تله‌پارالل برای گرانش $f(T)$ به صورت زیر معرفی می‌شود

$$I = \int d^4x\ |e|\ f(T), \tag{۱۶}$$

در کنش بالا $|e| = \det(e^{A}_{\ \mu}) = \sqrt{-g}$ و $c = \hbar = 16\pi G = 1$. همچنین ما می‌بایست توجه کنیم که در کنش بالا سهم کنش ماده کنار گذاشته شده است. با وردش از کنش بالا نسبت به دولنگه‌ای‌های $e^{A}_{\ \mu}$ معادله حرکت به صورت زیر نتیجه گرفته می‌شود

$$\frac{1}{e}\partial_{\mu}(eS_{A}^{\ \mu\nu})\, f_{T} - e_{A}^{\ \lambda}\ T^{\rho}_{\ \mu\lambda}\ S_{\rho}^{\ \nu\mu} f_{T} + S_{A}^{\ \mu\nu}\ \partial_{\mu}T\ f_{TT} + \frac{1}{4}e_{A}^{\nu}\ f = 0, \tag{۱۷}$$

به‌طوریکه در این رابطه اندیس T مشتق نسبت به T را نمایش می‌دهد. همانطور که در مقدمه اشاره شد می‌توان با استفاده از تبدیل همدیس متریک، کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین را به گرانش $f(T)$ نگاشت داد که در این راستا ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار می‌شود. بنابراین از طریق تبدیلات همدیس زیر لاگرانژی موثر ریسمان- دیلتون می‌تواند به لاگرانژی گرانش $f(T)$ مرتبط شود.

$$\begin{gathered} g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^{2}(x)\ g_{\mu\nu}(x), \\ \bar{e}^{A}_{\ \mu} = \Omega e^{A}_{\ \mu}\ , \quad \bar{e}_{A}^{\ \mu} = \Omega^{-1} e_{A}^{\ \mu}. \end{gathered} \tag{۱۸}$$

بنابراین دو کنش می‌توانند به صورت زیر به همدیگر تصویر شوند

$$\sqrt{-g}\, e^{-2\varphi}(R + 4\nabla_{\mu}\varphi\ \nabla^{\mu}\varphi + \Lambda) = |\bar{e}|\, f(\bar{T}). \tag{۱۹}$$

با استفاده از این واقعیت که $|\bar{e}| = \Omega^{4}\ |e|$ می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$e^{-2\varphi}(R + 4\nabla_{\mu}\varphi\ \nabla^{\mu}\varphi + \Lambda) = \Omega^{4} f(\bar{T}). \tag{۲۰}$$

با جایگذاری معادله (۱۰) در رابطه بالا خواهیم داشت

$$f(\bar{T}) = 2\Lambda\Omega^{-4}e^{-2\varphi}. \qquad (۲۱)$$

در نهایت با انتخاب مناسب $\Omega = e^{-\varphi}$ نتیجه‌گیری می‌شود که

$$f(\bar{T}) = 2\Lambda e^{2\varphi}. \qquad (۲۲)$$

رابطه بالا نتیجه تصویر لاگرانژی موثر ریسمان- دیلتون تحت تبدیل همدیس متریک به لاگرانژی گرانش $f(T)$ را نمایش می‌دهد. بنابراین در صورت برقرار بودن معادلات حرکت (معادلات (۸)) که معادلاتی بر لاک[۱۳] حرکت هستند می‌توان دو نظریه را به صورت روابط (۱۹) و (۲۲) به همدیگر تصویر کرد. رابطه (۲۲) در بخش بعدی برای به‌دست آوردن لاگرانژی کانونیک تحت تبدیل همدیس متریک و همچنین دوگانگی ضریب مقیاس مفید خواهد بود.

۴. دوگانگی ضریب مقیاس در کیهان‌شناسی $f(T)$

دوگانگی ضریب مقیاس برای مدل‌های بیان شده در بالا می‌تواند در کیهان شناسی مشخص شود. بنابراین یک جهان همگن و همسانگرد که از متریک تخت فریدمن- رابرتسون- واکر زیر تبعیت می‌کند

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (۲۳)$$

را در نظر می‌گیریم، به‌طوریکه در این متریک $a(t)$ عامل ضریب مقیاس نامیده می‌شود. اسکالر پیچش مربوط به این متریک با استفاده از رابطه (۱۴) به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$T = -6\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \qquad (۲۴)$$

برای بدست آوردن معادلات کیهان‌شناسی مدل می‌توان از رویکرد لاگرانژی کانونیک $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(a, \dot{a}, T, \dot{T}\right)$ همراه با فضای آرایش $\mathcal{Q} = \{a, T\}$ استفاده کرد، به‌طوریکه توابع $T\mathcal{Q} = \{a, \dot{a}, T, \dot{T}\}$ وابسته به کلاف‌های مماسی تعریف شده روی $\mathcal{L}$ هستند. به این ترتیب، کنش نقطه‌گونه[۱۴] متناظر با این لاگرانژی به صورت زیر بیان می‌شود:

[13] On-shell

[14] Point-like

$$\mathcal{I}=4\pi\int dt\ \ \mathcal{L}\left(a,\dot{a},T,\dot{T}\right), \qquad (۲۵)$$

که در آن $a(t)$ و T متغیرهای مستقل از هم هستند. با در نظر گرفتن رابطه (۲۴) به عنوان یک قید و سپس با معرفی یک ضریب نامعین لاگرانژ λ می‌توان کنش بالا را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{I}=4\pi\int dt\ \ \left\{a^3 f\,(T)-\lambda(T+6\frac{\dot{a}^2}{a^2})\right\}. \qquad (۲۶)$$

با وردش از کنش بالا نسبت به T ضریب نامعین لاگرانژ λ به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\lambda=a^3 f_T\,(T). \qquad (۲۷)$$

حال می‌توان با استفاده از رابطه بالا چگالی لاگرانژی را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L}=a^3(f-Tf_T)-6f_T a\,\dot{a}^2. \qquad (۲۸)$$

با استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ زیر می‌توان معادلات حرکت مربوط به کمیت‌های $a(t)$ و T را بدست آورد.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{T}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial T}. \qquad (۲۹)$$

علاوه بر معادلات فوق می‌توان از قید هامیلتونی $\mathcal{H}=0$ به صورت زیر نیز استفاده کرد.

$$\mathcal{H}=\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\dot{a}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{T}}\dot{T}-\mathcal{L}=0. \qquad (۳۰)$$

برای بررسی گرانش $f(T)$ تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس می‌بایست از لاگرانژی نقطه‌گونه استفاده کرد، بنابراین لاگرانژی (۲۸) را دوباره بازنویسی می‌کنیم.

$$\mathcal{L}=a^3\left[f-Tf_T-6f_T\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right]. \qquad (۳۱)$$

با استفاده از معادله (۲۲) لاگرانژی بالا تحت تبدیل همدیس متریک به صورت زیر در می‌آید.

$$\bar{\mathcal{L}} = a^3\left[2\Lambda e^{2\varphi} - 4\Lambda \bar{T} e^{2\varphi}\varphi'(\bar{T}) - 24\Lambda e^{2\varphi}\varphi'(\bar{T})\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right]. \quad (۳۲)$$

همچنین با استفاده از این واقعیت که $a^3 = e^{3\ln a}$ می‌توان معادله بالا را به صورت زیر نوشت

$$\bar{\mathcal{L}} = e^{2(\varphi+\frac{3}{2}\ln a)}\left(2\Lambda - 4\Lambda \bar{T}\varphi'(\bar{T}) - 24\Lambda\varphi'(\bar{T})\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right). \quad (۳۳)$$

با بکارگیری انتقال در میدان دیلتون مشابه با معادله (۷) داریم

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = \varphi + \tfrac{3}{2}\ln a. \quad (۳۴)$$

در نهایت لاگرانژی نقطه‌گونه (۲۸) تحت تبدیل همدیس متریک و انتقال در میدان دیلتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\tilde{\bar{\mathcal{L}}} = 2\Lambda e^{2\tilde{\varphi}} - 4\Lambda \bar{T} e^{2\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}'(\bar{T}) - 24\Lambda e^{2\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}'(\bar{T})\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \quad (۳۵)$$

با در نظرگرفتن نسخه تبدیل یافته (تحت دوگانگی) معادله (۲۲) برای لاگرانژی بالا خواهیم داشت

$$\tilde{\bar{\mathcal{L}}} = (\tilde{f}(\bar{T}) - \tilde{f}_{\bar{T}}\bar{T}) - 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\tilde{f}_{\bar{T}}. \quad (۳۶)$$

به سادگی می‌توان دید که لاگرانژی بالا تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t) \to 1/a(t)$ ناوردا باقی می‌ماند. بنابراین از لحاظ دینامیکی با لاگرانژی (۳۱) معادل خواهد بود.

۵. شکل تابعی $f(T)$ تحت تبدیل $a(t) \to 1/a(t)$

برای تعیین شکل تابعی $f(T)$ بر حسب T تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس از لاگرانژی دوگان یافته (۳۶) نسبت به $\bar{T}$ و $a(t)$ وردش می‌گیریم. به این ترتیب معادلات حرکت برای $\bar{T}$ و $a(t)$ به ترتیب به صورت زیر حاصل می‌گردند.

$$\bar{T} = -6\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (۳۷)$$

و

$$(a\ddot{a}-\dot{a}^2)\tilde{f}_{\bar{T}}+a\dot{a}\dot{\bar{T}}\ \tilde{f}_{\bar{T}\bar{T}}=0. \qquad (۳۸)$$

با جایگذاری معادله (۳۷) در معادله (۳۸) نتیجه گیری می‌شود که

$$\tilde{f}_{\bar{T}}+2\bar{T}\ \tilde{f}_{\bar{T}\bar{T}}=0. \qquad (۳۹)$$

علاوه بر معادله بالا قید هامیلتونی (۳۰) نیز معادله زیر را نتیجه می‌دهد

$$f(T)-2T\ f_T=0. \qquad (۴۰)$$

طبق معادلات (۲۴) و (۳۷) به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که $T=\bar{T}$. از طرفی تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس $a(t)\rightarrow 1/a(t)$ معادله (۳۷) ناوردا باقی می‌ماند، به این معنی که $\bar{T}=\tilde{T}$. چون $\tilde{f}(\tilde{T})$ تنها تابعی از $\tilde{T}$ است بنابراین می‌توان معادله (۳۹) را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f_T+2T\ f_{TT}=0. \qquad (۴۱)$$

حال با حل دو معادله (۴۰) و (۴۱) به طور همزمان شکل تابعی $f(T)$ به صورت زیر مشخص می‌شود

$$f(T)=f_0\sqrt{T}. \qquad (۴۲)$$

در اینجا f_0 ثابت انتگرال‌گیری است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تبدیل همدیس متریک کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین به گرانش $f(T)$ تصویر شد به‌طوریکه در این راستا ارتباطی بین میدان دیلتون و اسکالر پیچش برقرار شد. سپس با در نظر گرفتن یک جهان همگن و همسانگرد برای لاگرانژی کانونیک گرانش $f(T)$ نشان داده شد که این لاگرانژی تحت تبدیلات همدیس متریک و دوگانگی آبلی (دوگانگی ضریب مقیاس) ناوردا باقی می‌ماند. علاوه بر این با استفاده از لاگرانژی دوگان‌یافته و با استفاده از این واقعیت که اسکالر پیچش تحت تبدیل همدیس متریک و همچنین تحت دوگانگی ضریب مقیاس $a(t)\rightarrow 1/a(t)$ ناوردا باقی می‌ماند، شکل دقیقی برای تابع $f(T)$ بدست آورده شد. در مرجع [12] با استفاده از لاگرانژی دوگان‌یافته تحت تبدیل دوگانگی ضریب مقیاس و همچنین با کمک از تقارن نوتر شکل دقیقی برای $f(R)$ به دست آورده شده است، در

حالیکه در مقاله حاضر با استفاده از لاگرانژی دوگان‌یافته گرانش $f(T)$ شکل دقیق تابعی $f(T)$ بدون استفاده از تقارن نوتر بدست آمده که این نتیجه سازگاری کنش گرانش $f(T)$ را با کنش موثر ریسمان در حد انرژی‌های پایین می‌رساند. به نظر می‌آید که بتوان رهیافت دنبال شده در این مقاله را برای نظریه‌های تعمیم‌یافته گرانشی دیگری نظیر $f(G)$، $f(R,T)$ و غیره مورد بررسی قرار داد.

مراجع

[1] J.M. Drouffe and C. Itzykson, *"Quantum Field Theory and Statistical Mechanics"*, Cambridge University Press, 1990.

[2] T.H. Buscher, *Phys. Lett.* B **194** (1987) 51; B **201** (1988) 466.

[3] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, *Phys. Rep*. **244** (1994) 77.

[4] A. Giveon and M. Rocek, *Nucl. Phys*. B **380** (1992) 128.

[5] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano, *Phys. Lett*. B **336** (1994) 183.

[6] M. Rocek and E. Verlinde, *Nucl. Phys*. B **373** (1992) 630.

[7] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, *Phys. Rev*. D **70** (2004) 043528.

[8] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev*. D **74** (2006) 086005, hep-th/0608008;
S. Nojiri and S. D. Odintsov, *J. Phys. Conf. Ser*. **66** (2007) 012005 ,hep-th/0611071;
K. Bamba, C. Q. Geng, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev.* D **79** (2009) 083014;
K. Bamba and C. Q. Geng, *Prog. Theor. Phys*. **122** (2009) 1267, arXiv:0909.1249.

[9] P. Wu and H.W. Yu, *Phys. Lett*. B **693** (2010) 415; G.R. Bengochea, *Phys. Lett*. B **695** (2011) 405; S. Basilakos, *Phys. Rev.* D **93** (2016) 083007; K. Atazadeh and F. Darabi, *Eur. Phys. J.* C **72** (2012) 2016; S. Basilakos, S. Capozziello, M. De Laurentis, A. Paliathanasis and M. Tsamparlis, *Phys. Rev.* D **88** (2013) 103526; A. Paliathanasis, S. Basilakos, E.N. Saridakis, S. Capozziello, K. Atazadeh, F. Darabi and M. Tsamparlis, *Phys. Rev*. D **89** (2014) 104042; F. Darabi M. Mousavi and K. Atazadeh, *Phys. Rev*. D **91** (2015) 084023; K. Atazadeh and A. Eghbali, *Phys. Scr*. **90** (2015) 045001; K. Atazadeh and Misha Mousavi, *Eur. Phys. J.* C **73** (2013) 2272; S. Capozziello, P. A. Gonzalez, E.N. Saridakis and Y. Vasquez, *JHEP* **02** (2013) 039; G. Contopoulos, B. Grammaticos and A. Ramani, *J. Phys.* A **25** (1993) 5795; J. Demaret and C. Scheen, *J. Phys*. A **29** (1996) 59; S. Cotsakis, J. Demaret, Y. De Rop and L. Querella, *Phys. Rev.* D **48** (1993) 4595.

[10] A. Einstein 1928, Sitz. Preuss. Akad.Wiss. p. 217; ibid p. 224 [Translated by A. Unzicker and T. Case, (preprint: arXivphysics/0503046)].

[11] S. Capozziello and R. de Ritis, *Int. J. Mod. Phys*. D **2** (1993) 367; B. J. Broy, F. G. Pedro, A. Westphal , *JCAP* **03** (2015) 029.

[12] S. Capozziello, S. J. G. Gionti and D. Vernieri , *JCAP* **01** (2016) 015.

[13] M. Wright , *Phys. Rev*. D **93** (2016) 103002.