

Trace of energy-momentum tensor and gravitational backreaction of Schwinger scalars in 3D de Sitter spacetime

Ehsan Bavarsad and Mahjubeh Mortezaazadeh

Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract

In this paper, we consider a massive charged scalar field coupled to a uniform electric field background in a 3 dimensional de Sitter spacetime. **We consider the value of the dimensionless coupling constant of the scalar field to the scalar curvature of a 3 dimensional de Sitter spacetime equal to $1/8$.** We compute the expectation value of the trace of the energy-momentum tensor in the in-vacuum state and we show that using adiabatic subtraction regularization method the linear ultraviolet divergence is removed and a finite expression obtain. We investigate the behavior of the regularized trace for different intensities of the scalar field mass and the electric field. We show that the trace as a function of the electric field has a discontinuity at which it changes the sign. We show that for the case of a conformally coupled scalar field to the de Sitter spacetime the trace vanishes, and there is no trace anomaly. We discuss the gravitational backreaction effect of the created Schwinger pairs.

Keywords: de Sitter spacetime, Scalar field, Schwinger effect, trace of energy-momentum tensor, Adiabatic subtraction regularization

PACS No. 04,10,98

تریس تانسور انرژی-تکانه و پسزنی گرانشی اسکالره‌های شوینگر در فضا زمان

دوسیه ۳ بُعدی

احسان باورساد و محجوبه مرتضی‌زاده

دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان

پست الکترونیکی: bavarsad@kashanu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، یک میدان اسکالر جرم‌دار و باردار جفت‌شده به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در فضا زمان دوسیه^۱ ۳ بُعدی را در نظر می‌گیریم. ما مقدار ثابت جفت‌شدگی بی‌بعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا زمان دوسیه^۳ بُعدی را برابر با $\frac{1}{8}$ در نظر می‌گیریم. چشم‌داشتی تریس تانسور انرژی-تکانه را در حالت خلأ ورودی حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با استفاده از روش بهسازی^۲ کم کردن بی‌دررو^۳ و اگرایی فرابنفش^۴ خطی حذف می‌شود و عبارتی متناهی به دست می‌آید. رفتار تریس بهسازی شده را در قلمروهای حدی گوناگون جرم میدان اسکالر و میدان الکتریکی مطالعه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که تریس به‌عنوان تابعی از میدان الکتریکی دارای یک ناپیوستگی است که در آن تغییر علامت می‌دهد. برای مورد جفت‌شدگی همدیس^۵ میدان اسکالر به فضا زمان دوسیه، نشان می‌دهیم که تریس صفر می‌شود و ناهنجاری^۶ تریس وجود ندارد. درباره اثر پسزنی گرانشی زوج‌های شوینگر^۷ خلق شده بحث می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضا زمان دوسیه، میدان اسکالر، اثر شوینگر، تریس تانسور انرژی-تکانه، بهسازی کم کردن بی‌دررو

۱. مقدمه

در فضا زمان تخت به پدیده تولید زوج از خلأ در یک میدان الکترومغناطیسی زمینه قوی، اثر شوینگر می‌گویند که یک پدیده غیراختلالی در نظریه میدان‌های کوانتومی است. مطالعه‌ی این پدیده با کارهای پیشگام [۱،۲،۳] آغاز شد؛ برای مرور [۴] را ببینید. هر چند که مطالعه‌ی این پدیده برای شناخت بهتر رفتار میدان‌های کوانتومی در حد جفت‌شدگی قوی مفید است اما با وجود تلاش‌های فراوان هنوز در آزمایشگاه‌های زمینی دیده نشده است. دلیل اصلی، این است که آهنگ تولید زوج در میدان‌های الکتریکی ضعیف‌تر از یک مقدار بحرانی $E_{critical} \approx 1.3 \times 10^{18} \text{ V/m}$ به طور نمایی کاهش می‌یابد [۵]. به همین دلیل در سال‌های اخیر مطالعه این پدیده در سامانه‌های اختزینی و کیهانشناسی که در آنها میدان‌های گرانشی و الکترومغناطیسی قوی به‌طور طبیعی وجود دارد، مورد توجه قرار گرفته است. بدون نیاز به در نظر گرفتن یک میدان الکتریکی زمینه، حالت خلأ میدان‌های مادی^۸ در فضا زمان دوسیه، به دلیل

¹ de Sitter

² Regularization

³ Adiabatic subtraction

⁴ Ultraviolet

⁵ Conformal

⁶ Anomaly

⁷ Schwinger

⁸ Matter

وجود افق کیهانشناسی، ناپایدار است و از راه تابش واپاشی می‌کند [۶] که به آن تابش گیبونز-هاوکیگ^۹ گفته می‌شود. مطالعه هر دو اثر با هم، یعنی مطالعه اثر شوینگر در فضا زمان دوسپته، با کار پیشگام [۷] آغاز شد که چگالی تعداد زوج‌های خلق شده در آن به دست آمد. در فضا زمان‌های خمیده به طور کلی و دوسپته به طور خاص، مفهوم ذره خوش تعریف نیست مگر اینکه شرایط شبه-کلاسیک در نظر گرفته شود. شرایط شبه-کلاسیک برای یک میدان اسکالر به جرم m و بار الکتریکی e که به یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه E در یک فضا زمان دوسپته با ثابت هابل H ، جفت شده است به صورت

$$\frac{m^2}{H^2} + \frac{(eE)^2}{H^2} \gg 1, \quad (1)$$

بیان می‌شود. در کار [۸] نشان داده شده است که چون جریان الکتریکی را می‌توان بدون در نظر گرفتن شرایط شبه-کلاسیک برای تعریف حالت‌های ذره‌ای، به دست آورد بنابراین کمیت مناسبی برای مطالعه اثر شوینگر در فضا زمان دوسپته است. در کارهای [۸،۹،۱۰] اثر شوینگر و جریان رسانندگی الکتریکی میدان اسکالر در فضا زمان‌های دوسپته به ترتیب ۲، ۳ و ۴ بُعدی مطالعه شده‌اند. در کارهای [۱۱،۱۲] اثر شوینگر و جریان رسانندگی الکتریکی میدان دیراک در فضا زمان‌های دوسپته به ترتیب ۲ و ۴ بُعدی مطالعه شده‌اند. برای مورد میدان اسکالر نشان داده شده است [۸،۹،۱۰] که در قلمرو فرسوخ، با کاهش میدان الکتریکی، جریان افزایش پیدا می‌کند که به آن پدیده فرارسانندگی فرسوخ^{۱۱} گفته شده است و اولین بار در کار [۸] گزارش شد. برای مورد میدان دیراک فرارسانندگی فرسوخ گزارش نشده است اما در فضا زمان دوسپته ۴ بُعدی، نویسندگان [۱۲] یافته‌اند که جریان رسانندگی الکتریکی به‌عنوان تابعی از میدان الکتریکی تغییر علامت می‌دهد. مشاهده این پدیده‌ها، انگیزه می‌دهد که افزودن بر جریان الکتریکی، کمیت‌های دیگری را نیز در فضا زمان دوسپته مطالعه کنیم، برای نمونه تانسور انرژی-تکانه. جریان الکتریکی برای مطالعه اثر پسزنی الکترومغناطیسی و تانسور انرژی-تکانه برای مطالعه اثر پسزنی گرانشی زوج‌های شوینگر خلق شده، نیاز هستند. در مرجع [۱۰] تولید میدان مغناطیسی برآمده از پسزنی اسکالره‌های شوینگر در فضا زمان دوسپته ۴ بُعدی و در مرجع [۱۳] اثر پسزنی زوج‌های فرمیونی شوینگر روی میدان الکتریکی در فضا زمان دوسپته ۲ بُعدی مطالعه شده است.

بدون در نظر گرفتن یک میدان الکترومغناطیسی زمینه، به دیگر سخن، در میدان گرانشی خالص یک فضا زمان از نوع جهان‌های فریدمان-لومتر-رابرتسون-واکر^{۱۱} به‌طور فضایی تخت، تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر [۲۰-۱۴] و میدان دیراک [۲۴-۲۱] محاسبه شده است. در کارهای [۶،۱۴،۱۵] نویسندگان اثر پسزنی گرانشی تولید ذره را در فضا زمان دوسپته ۴ بُعدی مطالعه کرده‌اند. در حالی که در کارهای [۲۴-۱۶] بیشتر نظریه بازبهنجارش توسعه داده شده است. اثر پسزنی گرانشی زوج‌های اسکالر شوینگر به یک روش شبه-کلاسیک در مرجع [۹] مطالعه شده است و نشان داده شده که ثابت هابل واپاشی می‌کند. نویسندگان [۹] یافته‌اند، برای مورد یک میدان اسکالر سنگین^۱ $m/H \gg 1$ ، مقیاس زمان برای واپاشی ثابت هابل به‌طور نمایی با افزایش جرم میدان اسکالر بزرگ می‌شود. در مرجع [۲۵] اثر پسزنی گرانشی زوج‌های اسکالر شوینگر به یک روش شبه-کلاسیک در قلمرو میدان الکتریکی قوی $(eE)/H^2 \gg 1$ مطالعه شده و نشان داده شده است که مقیاس زمان واپاشی ثابت هابل با افزایش میدان الکتریکی به‌صورت توانی کاهش می‌یابد.

در همه کارهای [۷-۱۲] تولید زوج شوینگر در فضا زمان دوسپته مطالعه شده است. در کار [۹] درباره اثر پسزنی گرانشی زوج‌های شبه-کلاسیک شوینگر نیز بحث شده است. در این پژوهش ما می‌خواهیم یک قدم بیشتر به جلو برداریم و بیشتر درباره پیامدهای فیزیکی تولید زوج شوینگر در فضا زمان دوسپته مطالعه کنیم. اثر تولید زوج روی میدان گرانشی دوسپته یکی از این پیامدها

⁹ Gibbons-Hawking

¹⁰ Infrared hyperconductivity

¹¹ Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

است که به‌راستی پاسخ به این پرسش است که تولید زوج چه تاثیری بر سرنوشت جهان دوسویه دارد. بدون در نظر گرفتن اثر پسزنی گرانشی تولید زوج، هندسه کلاسیک جهان دوسویه یک انبساط آبدی را برای آن تعیین می‌کند. در کار [۹] نشان داده شده است که تولید زوج‌های شبه کلاسیک شوینگر به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد و بنابراین پیش‌بینی می‌کند که سرنوشت جهان دوسویه یک جهان تخت باشد. انگیزه ما از این پژوهش این است که در ادامه کار [۹] و با تعمیم آن، بدون در نظر گرفتن شرط شبه کلاسیک بودن زوج‌ها، اثر پسزنی گرانشی تولید زوج شوینگر در فضا زمان دوسویه را مطالعه کنیم. برای مطالعه پسزنی گرانشی به تانسور انرژی-تکانه زوج‌های خلق شده نیاز است. برای سادگی ما فرض می‌کنیم که زوج‌های خلق شده یک شاره کامل با معادله حالت خلأ تشکیل دهند. بنابراین تانسور انرژی-تکانه آنها تنها با داشتن تریس تانسور به دست می‌آید. به‌طور مشخص، در این مقاله ما می‌خواهیم رفتار تریس تانسور انرژی-تکانه زوج‌های اسکالر شوینگر را در تکه پوانکاره^{۱۲} فضا زمان دوسویه^۳ بُعدی مطالعه کرده و درباره پیامدهای فیزیکی پسزنی گرانشی آن بحث کنیم. برای سادگی، مقدار ثابت جفت‌شدگی بی‌بُعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا زمان دوسویه^۳ بُعدی را $\frac{1}{8}$ در نظر می‌گیریم. چون^۳ بُعد، پایین‌ترین بُعدی است که در آن گرانش انیشتین وجود دارد و تریس یک کمیت اسکالر ناوردای پیمان‌های است، از این رو برای سادگی این کمیت را در^۳ بُعد مطالعه کرده‌ایم. در مرجع [۲۶] رفتار تریس تانسور انرژی-تکانه زوج‌های اسکالر شوینگر در تکه پوانکاره فضا زمان دوسویه^۲ بُعدی مطالعه شده است.

۲. عملگر تریس تانسور انرژی-تکانه

برای محاسبه چشم‌داشتی خلأ عملگر تریس تانسور انرژی-تکانه به عملگر میدان اسکالر و تعریف حالت خلأ نیاز داریم. برای به دست آوردن عملگر میدان، از کنش یک میدان اسکالر مختلط ϕ جفت‌شده به یک میدان الکترومغناطیسی در فضا زمان دوسویه^۳ بُعدی، شروع می‌کنیم

$$S = \int d^3x \sqrt{g} \left\{ g^{\mu\nu} (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi (\partial_\nu - ieA_\nu) \phi^* - (m^2 + \xi R) \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}, \quad (2)$$

به‌گونه‌ای که m جرم میدان اسکالر، e بار الکتریکی آن و ξ یک ثابت جفت‌شدگی بی‌بُعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا زمان دوسویه^۳ بُعدی

$$R = \epsilon H^2, \quad (3)$$

است. متریک فضا زمان دوسویه^۳ بُعدی در تکه پوانکاره از عنصر خط زیر خوانده می‌شود

$$ds^2 = \Omega^2(\tau) (d\tau^2 - d\mathbf{x}^2), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \tau \in (-\infty, 0), \quad \Omega(\tau) = \frac{-1}{\tau H}. \quad (4)$$

برای توصیف یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه، پتانسیل برداری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A_\mu = -\frac{E}{H^2 \tau} \delta'_\mu, \quad (5)$$

به‌گونه‌ای که E یک مقدار ثابت است. با این انتخاب برای پتانسیل برداری، تنها مولفه‌های غیر صفر تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی داده می‌شوند با

$$F_{,1} = -F'_{,1} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = \Omega^2(\tau) E. \quad (6)$$

معادله کلاین-گوردن میدان اسکالر از کنش (۲) خوانده می‌شود

¹² Poincaré patch

$$\left[\partial_t^\gamma + H\Omega(\tau)\partial_t - \partial_t^\gamma - \frac{\gamma ieE}{H}\Omega(\tau)\partial_t + \left(\frac{e^\gamma E^\gamma}{H^\gamma} + m_{ds}^\gamma \right) \Omega^\gamma(\tau) \right] \varphi(x) = 0, \quad (7)$$

به گونه ای که تعریف کرده ایم

$$m_{ds}^\gamma = m^\gamma + \xi R. \quad (8)$$

با جای گذاری

$$\varphi(x) = \Omega^\gamma(\tau) e^{+ik \cdot x} f^\pm(\tau), \quad (9)$$

در معادله کلاین-گوردن (7) خواهیم داشت

$$\frac{d^\gamma f^\pm}{dz_\pm^\gamma} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z_\pm} + \frac{\frac{1}{4} - \gamma^\gamma}{z_\pm^\gamma} \right) f^\pm = 0, \quad (10)$$

به گونه ای که نماد \pm به ترتیب نشان دهنده جواب های فرکانس مثبت و منفی معادله کلاین-گوردن و متغیرهای z_+, z_- به صورت زیر

تعریف می شوند

$$z_+ = +\gamma ik\tau, \quad z_- = e^{i\pi} z_+ = -\gamma ik\tau, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (11)$$

برحسب کمیت های بی بُعد

$$\mu = \frac{m}{H}, \quad \lambda = -\frac{eE}{H^\gamma}, \quad r = \frac{k_x}{k}, \quad (12)$$

ضریب های κ, γ تعریف می شوند

$$\kappa = -i\lambda r, \quad (13)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - 6\xi - \mu^\gamma - \lambda^\gamma}. \quad (14)$$

در مرجع [9] نشان داده شده است جواب های معادله کلاین-گوردن (7) که در زمان های آغازی ($\tau \rightarrow -\infty$) دارای رفتار مجانبی

$f^\pm \sim e^{\mp ik\tau}$ موج تخت در فضا زمان مینکوفسکی هستند به ترتیب برای جواب های فرکانس مثبت و منفی داده می شوند

$$U_{in,k}(x) = (\gamma k)^\gamma e^{\frac{i\pi\kappa}{\gamma}} \Omega^\gamma(\tau) e^{+ik \cdot x} W_{\kappa,\gamma}(z_+), \quad (15)$$

$$V_{in,k}(x) = (\gamma k)^\gamma e^{\frac{-i\pi\kappa}{\gamma}} \Omega^\gamma(\tau) e^{-ik \cdot x} W_{\kappa,-\gamma}(z_-),$$

به گونه ای که W تابع ویتاکر¹³ [27] است و زیرنویس in نشان دهنده رفتار مجانبی دلخواه توابع مُد در زمان های آغازی است.

با استفاده از مجموعه کامل توابع مُد راست هنجار داده شده در معادله (15) می توان بسط عملگر میدان اسکالر را به صورت

زیر نوشت

$$\varphi(x) = \int \frac{d^\gamma k}{(\gamma\pi)^\gamma} [U_{in,k} a_{in,k} + V_{in,k} b_{in,k}^\dagger], \quad (16)$$

به گونه ای که عملگر $a_{in,k}$ یک ذره با تکانه همراه \mathbf{k} ¹⁴ را نابود و عملگر $b_{in,k}^\dagger$ یک پادذره با تکانه همراه \mathbf{k} را خلق می کند. کوانتیش

کانونیک میدان اسکالر با در نظر گرفتن روابط جابه جایی زیر، انجام می شود

$$[a_{in,k}, a_{in,k'}^\dagger] = [b_{in,k}, b_{in,k'}^\dagger] = (\gamma\pi)^\gamma \delta^{(\gamma)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (17)$$

¹³ Whittaker

¹⁴ Comoving

و حالت خلأ ورودی به صورت زیر تعریف می شود

$$a_{\text{in},\mathbf{k}}|\text{in}\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}. \quad (18)$$

۳. چشم‌داشتی تریس تانسور انرژی-تکانه

تانسور انرژی-تکانه از وردش کنش (۲) به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{tot}} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{em}}, \end{aligned} \quad (19)$$

به گونه‌ای که $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر است و از وردش جمله‌های شامل φ در کنش (۲) به دست می آید، $T_{\mu\nu}^{\text{em}}$ تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس است و از وردش جمله آخر در سمت راست معادله (۲) به دست می آید. با استفاده از معادلات حرکت میدان اسکالر و میدان الکترومغناطیس به سادگی می توان نشان داد که تانسور انرژی-تکانه کل پایسته است

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{tot}} = \nabla^\mu T_{\mu\nu} + \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{em}} = 0. \quad (20)$$

چون هدف ما در این مقاله مطالعه رفتار تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر $T_{\mu\nu}$ است، از این رو دیگر تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس $T_{\mu\nu}^{\text{em}}$ را نادیده می گیریم. پس از کمی محاسبه جبری و استفاده از معادله کلاین-گورڈن (۷) می توان نشان داد که تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر داده می شود با

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \Lambda (\xi - \xi_r) (g^{\mu\nu} (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi^* (\partial_\nu + ieA_\nu) \varphi - m_{\text{ds}}^2 \varphi^* \varphi) + 2m^\dagger \varphi^* \varphi, \quad (21)$$

به گونه‌ای که

$$\xi_r = \frac{1}{\Lambda}, \quad (22)$$

مقدار ξ برای جفت شدگی هم‌دیس میدان اسکالر به میدان گرانشی زمینه در ۳ بُعد است. ما برای سادگی مقدار ξ را برابر با ξ_r در نظر می گیریم، پس تنها جمله آخر در عبارت سمت راست معادله (۲۱) باقی می ماند و بنابر معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} - \mu^\dagger - \lambda^\dagger}. \quad (23)$$

با استفاده از عملگر میدان اسکالر (۱۶) و حالت خلأ (۱۸) خواهیم داشت

$$g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle = \frac{m^\dagger}{2\pi^\dagger} \int d^4 k U_{\text{in},\mathbf{k}}^* U_{\text{in},\mathbf{k}}. \quad (24)$$

با جای گذاری توابع مُد از معادله (۱۵) و استفاده از متغیر $r = k_x / k$ ، انتگرال داده شده در سمت راست معادله (۲۴) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle = \frac{Hm^\dagger}{2\pi^\dagger} \int_{-1}^{+1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \int_{\Lambda}^{\Lambda} dp e^{\pi\lambda r} |W_{-i\lambda r, \gamma}(-2ip)|^2, \quad (25)$$

به گونه‌ای که تعریف کرده ایم $p = -k\tau$ و Λ یک قطع بالا^{۱۵} تکانه است که به دلیل مناسب بودن تعریف شده است. در مرجع [۹] تانسور انرژی-تکانه در شرایط شبه کلاسیک (۱) محاسبه شده است. در این شرایط پارامتر γ موهومی محض است $\gamma = +i|\gamma|$ و $|\gamma| \gg 1$. در این مقاله، ما قید (۱) روی پارامترهای جرم و میدان الکتریکی را در نظر نمی گیریم، بنابراین وابسته به مقدار پارامترهای

¹⁵ Cutoff

μ, λ پارامتر γ می‌تواند حقیقی یا موهومی محض باشد. محاسبه تریس (۲۵) در پیوست آ مرور شده است، برای جزئیات بیشتر مرجع [۲۸] را ببینید. جواب نهایی داده می‌شود با [۲۸]

$$g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle = \frac{H^\nu \mu^\nu \Lambda}{2\pi} + \frac{H^\nu \mu^\nu}{2\pi \sin(2\pi\gamma)} [-\gamma I. (2\pi\lambda) - \gamma \cos(2\pi\gamma)] \quad (26)$$

$$+ \frac{i\lambda}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} \left\{ (e^{\gamma\pi i\gamma} + e^{\gamma\pi\lambda r}) \psi \left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r \right) - (e^{-\gamma\pi i\gamma} + e^{\gamma\pi\lambda r}) \psi \left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r \right) \right\},$$

به‌گونه‌ای که I و ψ به ترتیب توابع بسل تعدیل یافته مرتبه صفر و پُلی گاما هستند.

چون حالت خلأ ورودی هادامارد^{۱۶} است [۷۸] درجه واگرایی فرابنفش چشم‌داشتی خلأ ورودی کمیت‌های فیزیکی مشابه فضازمان تخت خواهد بود. بنابراین ما انتظار داشتیم که در چشم‌داشتی خلأ ورودی تریس تانسور انرژی-تکانه یک واگرایی فرابنفش خطی رخ دهد. برای بهسازی چشم‌داشتی تریس از روش کم‌کردن بی‌دررو استفاده می‌کنیم. برای یافتن پادجمله^{۱۷} مناسب، با بازنویسی معادله کلاین-گوردن (۱۰) برای مورد فرکانس‌های مثبت، آغاز می‌کنیم

$$\frac{d^\nu f_\Lambda}{d\tau^\nu} + \omega^\nu(\tau) f_\Lambda = 0, \quad (27)$$

به‌گونه‌ای که فرکانس وابسته به زمان خوانده می‌شود

$$\omega(\tau) = +\sqrt{k^\nu + 2\lambda r k + \mu^\nu + \lambda^\nu}. \quad (28)$$

برای معادله مُد (۲۷) یک جواب به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f_\Lambda(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2W(\tau)}} \exp\left(-i \int^\tau W(\tau') d\tau'\right), \quad (29)$$

به شرط اینکه تابع W جواب معادله زیر باشد

$$W^\nu(\tau) = \omega^\nu(\tau) + \frac{3}{4} \frac{\dot{W}^\nu}{W^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\ddot{W}}{W}, \quad (30)$$

به‌گونه‌ای که نقطه نشان دهنده مشتق نسبت به زمان همدیس τ است. بسط بی‌دررو، یک بسط برحسب تعداد مشتق‌های متریک است [۲۹،۳۰]. در مرتبه صفرم بسط بی‌دررو از جمله‌های دارای مشتق در سمت راست معادله (۳۰) در مقایسه با جمله بدون مشتق، چشم‌پوشی می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$W^{(0)}(\tau) = \omega(\tau). \quad (31)$$

با استفاده از معادله‌های (۹)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۱) توابع مُد راست‌هنجار مرتبه صفرم بسط بی‌دررو، به ترتیب برای جواب‌های فرکانس مثبت و منفی به صورت زیر داده می‌شوند

$$U_{\Lambda, \mathbf{k}}(x) = (2\omega(\tau))^{-\frac{1}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i \int^\tau \omega(\tau') d\tau'\right), \quad (32)$$

$$V_{\Lambda, \mathbf{k}}(x) = (2\omega(\tau))^{-\frac{1}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i \int^\tau \omega(\tau') d\tau'\right).$$

¹⁶ Hadamard

¹⁷ Counterterm

با استفاده از مجموعه کامل توابع مُد راست هنجار (۳۲) می توان چشم داشتی خلأ عملگر تریس تانسور انرژی-تکانه را تا مرتبه صفرم بسط بی دررو به دست آورد

$$T_A = \frac{m^\gamma}{2\pi^\gamma} \int d^\gamma k U_{\Lambda,k} U_{\Lambda,k}^* = \frac{H^\gamma \mu^\gamma}{2\pi} (\Lambda - \mu). \quad (33)$$

بنابر روش بهسازی کم کردن بی دررو باید پادجمله (۳۳) را از عبارت چشم داشتی تریس (۲۶) کم کنیم

$$T = g^{\mu\nu} \langle \text{in} | T_{\mu\nu} | \text{in} \rangle - T_A, \quad (34)$$

سرانجام به دست می آوریم

$$T = \frac{H^\gamma \mu^\gamma}{2\pi \sin(\gamma\pi)} [\mu \sin(\gamma\pi) - \gamma I(\gamma\pi) - \gamma \cos(\gamma\pi)] + \frac{i\lambda}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} \left\{ (e^{\gamma\pi i\gamma} + e^{\gamma\pi\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r\right) - (e^{-\gamma\pi i\gamma} + e^{\gamma\pi\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r\right) \right\}. \quad (35)$$

بنابراین بسط بی دررو پادجمله تریس تانسور انرژی-تکانه تا مرتبه صفر، برای حذف واگرایی فرابنفش و به دست آوردن یک عبارت متناهی، کافی است.

۴. مطالعه رفتار تریس بهسازی شده ی تانسور انرژی-تکانه

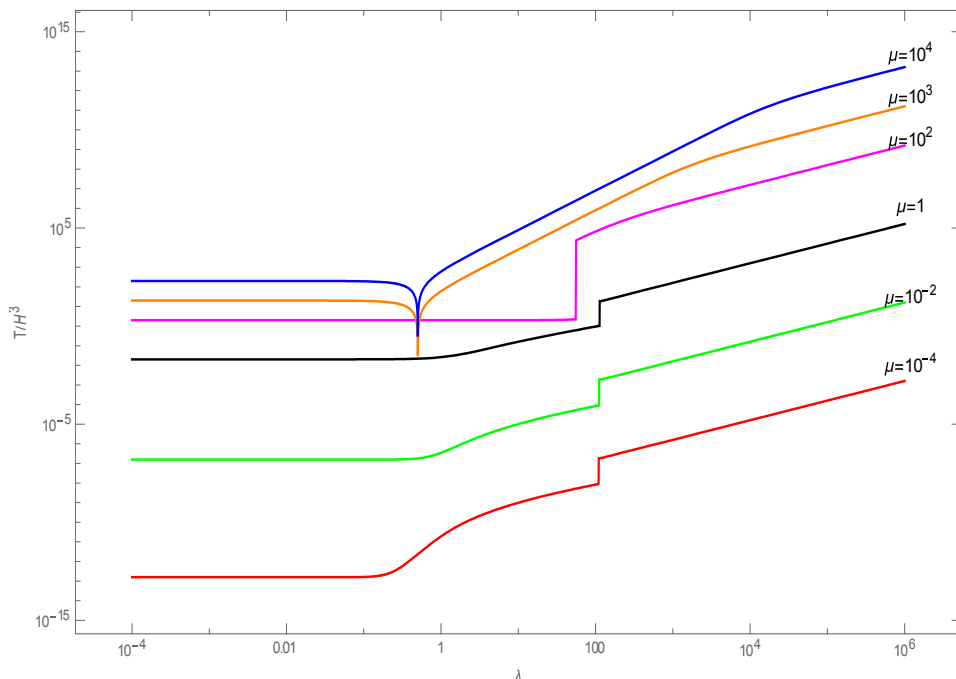
در شکل ۱ تریس بهسازی شده تانسور انرژی-تکانه که در معادله (۳۵) داده شده است به صورت تابعی از میدان الکتریکی رسم شده است. این شکل نشان می دهد که با افزایش میدان الکتریکی و جرم اسکالر، تریس افزایش پیدا می کند. ویژگی مشترک همه نمودارهای شکل ۱ این است که دارای یک ناپیوستگی هستند که در آن تریس تغییر علامت می دهد. در شکل ۲ مقدار میدان الکتریکی L که در آن تریس تغییر علامت می دهد به صورت تابعی از جرم میدان اسکالر رسم شده است. این شکل نشان می دهد که برای اسکالره های سنگین تر، L کوچک تر است، به گونه ای که در نقطه تغییر علامت $\gamma \approx 113i$ است. در مرجع [۱۲] پدیده تغییر علامت برای جریان رسانندگی الکتریکی میدان دیراک در فضا زمان دوسویه ۴ بُعدی گزارش شده است. در ادامه این بخش رفتار تریس (۳۵) را به طور تحلیلی، در قلمروهای حدی گوناگون میدان الکتریکی و جرم میدان اسکالر، مطالعه می کنیم.

در قلمرو میدان الکتریکی قوی رابطه $\lambda \gg \max(1, \mu)$ برقرار است. رفتار تریس (۳۵) در این قلمرو با گرفتن حد $\lambda \rightarrow \infty$ و ثابت نگه داشتن μ به دست می آید. می توان نشان داد که جمله پیشتناز^{۱۸} تریس در این قلمرو به صورت زیر داده می شود

$$T \approx \frac{H^\gamma \mu^\gamma}{2\pi} \left(\mu + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} \log(\lambda\pi\lambda)}{2^{\frac{\gamma}{2}} \pi e^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (36)$$

در قلمرو میدان الکتریکی ضعیف رابطه $\lambda \ll \min(1, \mu)$ برقرار است. رفتار تریس (۳۵) در این قلمرو با گرفتن حد $\lambda \rightarrow 0$ به دست می آید. می توان نشان داد که جمله پیشتناز تریس برای مورد میدان اسکالر سنگین $\mu \gg 1$ به صورت

¹⁸ Leading



شکل ۱: برای مقادیر گوناگون μ ، تریس بهسازی شده تانسور انرژی-تکانه T/H^3 به صورت تابعی از λ رسم شده است. در ناپیوستگی‌ها تغییر علامت رخ می‌دهد.

$$T \approx \frac{H^3 \mu}{16\pi} \left(1 + 2\lambda^\gamma + \mathcal{O}(e^{-2\pi\mu}) \right), \quad (37)$$

و برای مورد میدان اسکالر سبک $\mu \ll 1$ با عبارت زیر داده می‌شود

$$T \approx \frac{H^3 \mu}{4\pi} (\mu^\gamma + \lambda^\gamma). \quad (38)$$

رفتار تریس برای مورد میدان الکتریکی صفر، با جای‌گذاری $\lambda = 0$ در عبارت (۳۵) به دست می‌آید. پس از کمی ساده‌سازی خواهیم داشت

$$T = \frac{H^3 \mu^\gamma}{2\pi} (\mu - \gamma \cot(\pi\gamma)), \quad (39)$$

به گونه‌ای که $\gamma = \sqrt{(1/4) - \mu^2}$. برای میدان اسکالر سنگین $\mu \gg 1$ ، جمله پیش‌تاز تریس (۳۹) داده می‌شود با

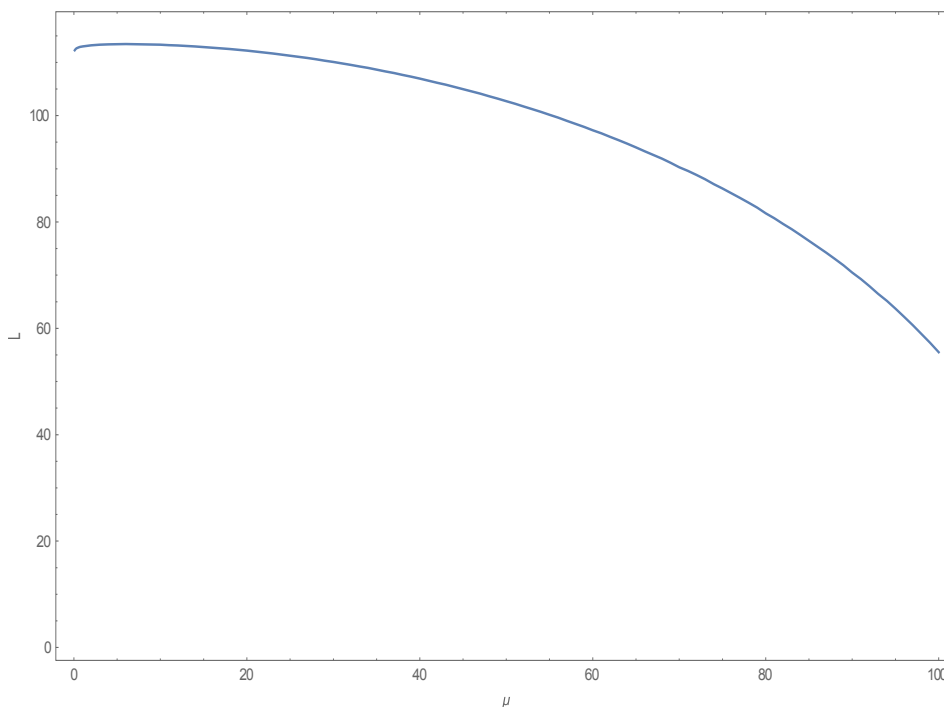
$$T \approx \frac{H^3 \mu}{16\pi}. \quad (40)$$

در کارهای [۹، ۱۴] تانسور انرژی-تکانه به روش‌های شبه‌کلاسیک محاسبه شده و نشان داده شده است که برای مورد میدان الکتریکی صفر و میدان اسکالر سنگین، تانسور به‌طور نمایی با افزایش جرم میدان اسکالر، صفر می‌شود. بنابراین نتیجه (۴۰) با محاسبه‌های شبه‌کلاسیک ناسازگار است. این ناسازگاری با نتیجه‌های شبه‌کلاسیک، برای رفتار جریان الکتریکی در قلمرو میدان اسکالر سنگین در فضا‌زمان‌های دوسته ۳ بُعدی [۹] و ۴ بُعدی [۱۰] نیز گزارش شده است.

برای مورد میدان اسکالر سبک $\mu \ll 1$ ، جمله پیش‌تاز تریس (۳۹) به صورت زیر داده می‌شود

$$T \approx \frac{m^3}{4\pi}. \quad (41)$$

نتیجه (۴۱) نشان می‌دهد که برای مورد میدان الکتریکی صفر و میدان اسکالر با جرم صفر، یعنی مورد جفت‌شدگی همدیس میدان



شکل ۲: میدان الکتریکی L که در آن تریس تغییر علامت می‌دهد به صورت تابعی از جرم میدان اسکالر μ رسم شده است. اسکالر به فضا زمان دوسپتیه ۳ بُعدی، تریس تانسور انرژی-تکانه صفر می‌شود. این نتیجه با وجود نداشتن ناهنجاری تریس در فضا زمان‌های با بُعد فرد سازگار است [۳۱].

۵. بحث درباره پسزنی گرانشی تولید زوج شوینگر

در این بخش بحث کوتاهی درباره اثر پسزنی گرانشی تریس تانسور انرژی-تکانه که در این مقاله مطالعه شده است ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم که اثر تولید زوج در معادله انیشتین تنها به یک ثابت کیهانشناسی مؤثر Λ_{eff} به انجامد. از این رو معادله انیشتین را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff}}g_{\mu\nu} = -\lambda\pi HGT_{\mu\nu}^{\text{reg}}, \quad (42)$$

به گونه‌ای که G ثابت گرانش نیوتون است. ما برای سادگی فرض می‌کنیم که زوج‌های شوینگر تولید شده یک شاره کامل با معادله حالت خلأ تشکیل دهند بنابراین تانسور انرژی-تکانه در سمت راست معادله (۴۲) با استفاده از تریس (۳۵) داده می‌شود

$$T_{\mu\nu}^{\text{reg}} = \frac{1}{3}Tg_{\mu\nu}. \quad (43)$$

مشابه با مرجع [۶] استدلال می‌کنیم که از معادله انیشتین (۴۲) می‌توان نتیجه گرفت که تانسور انرژی-تکانه زوج‌های خلق شده، چشمه‌ای برای تحول ثابت کیهانشناسی از مقدار اولیه Λ_{initial} به ثابت کیهانشناسی مؤثر Λ_{eff} است

$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda_{\text{initial}} - \frac{\lambda\pi}{3}HGT. \quad (44)$$

بنابراین، بسته به علامت تریس (۳۵) ثابت کیهانشناسی مؤثر می‌تواند افزایش یا کاهش پیدا کند. برای این که تحول زمانی ثابت کیهانشناسی را دقیق‌تر مطالعه کنیم مناسب است که فضا زمان دوسپتیه را به صورت یک جهان فریدمان-لومتر-رابرتسون-واکر در نظر بگیریم

$$ds^\dagger = dt^\dagger - a^\dagger(t)dx^\dagger, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (45)$$

به گونه‌ای که پارامتر هابل وابسته به زمان برحسب عامل مقیاس کیهانشناسی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(t) := \frac{da(t)}{dt}. \quad (46)$$

با توجه به معادله حالت خلأ شماره کامل که در معادله (۴۳) برای زوج‌های خلق شده در نظر گرفتیم، تقارن دوسویه شکسته نمی‌شود و مشابه با مرجع [۶] می‌توان فرض کرد که ثابت کیهانشناسی مؤثر به صورت زیر به پارامتر وابسته به زمان هابل مربوط شود

$$\Lambda_{\text{eff}} = H^\dagger(t), \quad (47)$$

و معادله تحول زمانی برای پارامتر وابسته به زمان هابل را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dH^\dagger(t)}{dt} = -\frac{8\pi HGT}{3H^{-1}}, \quad (48)$$

پس از کمی ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{4\pi HGT}{3}. \quad (49)$$

در کارهای [۶،۹] چون علامت تانسور انرژی-تکانه یافته شده تغییر نمی‌کند بنابراین نویسندگان نشان داده‌اند که تولید ذره به واپاشی ثابت هابل می‌انجامد. اما ما در این مقاله بنابر معادله (۴۹) نتیجه می‌گیریم که بسته به علامت T ثابت هابل می‌تواند افزایش یا کاهش پیدا کند. در مرجع [۱۴] نشان داده شده است که اثرات کوانتمی می‌توانند به یک دوره ابرشتاب^{۱۹} $\dot{H} > 0$ به انجامند. مطالعه عددی تریس (۳۵) نشان می‌دهد که برای $\lambda < L$ علامت تریس مثبت و برای $\lambda > L$ علامت تریس منفی است. بنابراین برای مورد $\lambda < L$ ثابت هابل واپاشی می‌کند و مقیاس زمان واپاشی آن به صورت زیر تعریف می‌شود [۶،۹]

$$t_B := -\frac{H}{\frac{dH(t)}{dt}} = \frac{3T^{-1}}{4\pi G}. \quad (50)$$

در قلمرو میدان الکتریکی ضعیف و میدان اسکالر سنگین که رفتار تریس با معادله (۳۷) داده می‌شود، مقیاس زمان واپاشی (۵۰) با وارون جرم میدان اسکالر متناسب است بنابراین با افزایش آن کاهش پیدا می‌کند. این نتیجه با مقیاس زمان به دست آمده در مرجع [۹] ناسازگار است زیرا محاسبه شبه کلاسیک پیش‌بینی می‌کند که تانسور انرژی-تکانه برای اسکالره‌های سنگین با عامل بولتزمن $\exp(-2\pi m/H)$ متناسب باشد که به افزایش نمایی مقیاس زمان با افزایش جرم می‌انجامد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، چشم‌داشتی خلأ ورودی عملگر تریس تانسور انرژی-تکانه یک میدان اسکالر جرم‌دار باردار را در یک میدان الکتریکی یکنواخت زمینه در تکه پوانکاره فضا-زمان دوسویه^۳ بُعدی محاسبه کردیم. ما برای سادگی مقدار ثابت جفت‌شدگی بی‌بُعد میدان اسکالر به خمش اسکالر فضا-زمان دوسویه^۳ بُعدی را $\xi = \frac{1}{8}$ در نظر گرفتیم. مقایسه معادله (۲۱) با معادله (۲۴) گویای ارزش انتخاب چنین پیمانانه‌ای است. در این پیمانانه، برای مورد یک میدان اسکالر بی‌جرم و میدان الکترومغناطیسی صفر که جفت‌شدگی همدیس نامیده می‌شود، مساله مورد بحث از فضا-زمان دوسویه^۳ به فضا-زمان تخت نگاشته می‌شود. با استفاده از روش بهسازی بی‌دررو

¹⁹ Superacceleration

واگرایی خطی تریس حذف شد و یک عبارت متناهی به دست آمد، معادله (۳۵) را ببینید. تریس با افزایش میدان الکتریکی و افزایش جرم میدان اسکالر افزایش پیدا می کند، شکل ۱ را ببینید. ما یافتیم که تریس دارای یک ناپیوستگی است که در آن تغییر علامت رخ می دهد. اندازه میدان الکتریکی L که در آن ناپیوستگی رخ می دهد با افزایش جرم میدان اسکالر کاهش می یابد، شکل ۲ را ببینید. اگر جمله واگرا در عبارت داده شده برای تریس بهسازی نشده در معادله (۲۶) را نادیده بگیریم، آنگاه مطالعه عددی تریس (۲۶) نشان می دهد که وجود این ناپیوستگی به پادجمله بستگی ندارد و برآمده از مقدار چشم‌داشتی خلأ ورودی تریس است. قضاوت درباره اینکه آیا این ناپیوستگی فیزیکی است یا خیر به نتیجه مشاهده‌های تجربی بستگی دارد. اما پیش از آن مشاهده‌ها می توان استدلال کرد که اگر این ناپیوستگی یک رفتار واقعی میدان اسکالر باشد آنگاه باید از روش بازهنجارش مستقل باشد. یعنی اگر به جای روش کم کردن بی دررو که ما در این مقاله استفاده کردیم از هر روش بازهنجارش دیگری [۲۹،۳۰] که در فضا زمان خمیده توسعه داده شده است نیز استفاده می کردیم باید این پدیده به همین شکل مشاهده می شد. اما حتی در این صورت هم، این ناپیوستگی می تواند برآمده از رفتار غیرعادی میدان اسکالر باشد. همان طور که در مقدمه نیز اشاره شد برای مورد میدان اسکالر سبک $m/H \ll 1$ در قلمرو میدان الکتریکی ضعیف جریان رسانندگی با کاهش میدان الکتریکی افزایش می یابد $J \sim E^{-1}$ ، که نمونه‌ای از رفتار غیرعادی میدان اسکالر است [۸،۹،۱۰]. درحالی که میدان فرمیونی چنین رفتاری ندارد و در این قلمرو با کاهش میدان الکتریکی، جریان رسانندگی به طور خطی صفر می شود [۱۱،۱۲]. مشاهده این ناپیوستگی انگیزه می دهد که برای نتیجه‌گیری‌های کیهانشناسی، در یک پژوهش دیگر در آینده، رفتار تانسور انرژی-تکانه فرمیون‌های شونینگر را نیز مطالعه کنیم. ما یافته‌ایم که برای مورد میدان اسکالر بی جرم، میدان الکتریکی هرچقدر که باشد تریس صفر می شود. برای مورد جفت شدگی همدیس میدان اسکالر به فضا زمان دوسیتنه ۳ بُعدی، تریس تانسور انرژی-تکانه صفر می شود، این نتیجه با وجود نداشتن ناهنجاری تریس در فضا زمان‌های با بُعد فرد سازگار است. ما نشان دادیم که بسته به علامت تریس، ثابت هابل وابسته به زمان می تواند افزایش یا کاهش یابد. مطالعه عددی تریس (۳۵) نشان می دهد که برای $L < \lambda$ تریس مثبت و برای $L > \lambda$ تریس منفی است. بنابراین برای مورد $L < \lambda$ ثابت هابل واپاشی می کند.

پیوست آ. محاسبه تریس تانسور انرژی-تکانه پیش از بهسازی

در این پیوست محاسبه انتگرال تکانه توابع ویتاکر برای به دست آوردن مقدار چشم‌داشتی تریس (۲۵) پیش از بهسازی مرور می شود. برای محاسبه انتگرال‌های تکانه در معادله (۲۵) فرآیندی را پیش می گیریم که در مرجع‌های [۸،۱۰] برای محاسبه انتگرال‌های مشابه از توابع ویتاکر استفاده شده است.

انتگرالی را که می خواهیم محاسبه کنیم به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathcal{I} = e^{\pi\lambda r} \int_{-\infty}^{\infty} dp |W_{-i\lambda r, \gamma}(-\nu ip)|^2. \quad (51)$$

نمایش انتگرالی ملین-برنز [۲۷] تابع ویتاکر به صورت زیر نوشته می شود

$$W_{-i\lambda r, \gamma}(-\nu ip) = e^{ip} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \gamma + s)\Gamma(\frac{1}{2} - \gamma + s)\Gamma(i\lambda r - s)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \gamma + i\lambda r)\Gamma(\frac{1}{2} - \gamma + i\lambda r)} (-\nu ip)^{-s}, \quad (52)$$

به گونه‌ای که پربند انتگرال گیری، قطب‌های $\Gamma(\frac{1}{2} + \gamma + s)\Gamma(\frac{1}{2} - \gamma + s)$ را از قطب‌های $\Gamma(i\lambda r - s)$ جدا می کند. پارامتر γ حقیقی یا موهومی محض است بنابراین $\gamma^* = \pm\gamma$. با توجه به خاصیت متقارن بودن تابع ویتاکر نسبت به علامت γ ، همیوغ مختلط آن به صورت زیر داده می شود

$$(W_{-i\lambda r, \gamma}(-\nu ip))^* = W_{i\lambda r, \gamma}(\nu ip) = W_{i\lambda r, \gamma}(\nu ip). \quad (53)$$

با جای گذاری نمایش انتگرالی تابع ویتاکر و همیوگ مختلط آن در انتگرال (51) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \gamma + s\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \gamma + s\right) \Gamma(i\lambda r - s) \\ &\times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dt}{\nu i\pi} e^{i\frac{\pi}{\nu}(s-t)} \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \gamma + t\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \gamma + t\right) \Gamma(-i\lambda r - t) \times \nu \int_{\cdot}^{\Lambda} dp (\nu p)^{-s-t}, \end{aligned} \quad (54)$$

به گونه ای که ضریب C_r تعریف می شود

$$C_r = \frac{e^{\pi\lambda r}}{\nu} \left(\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \gamma + i\lambda r\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \gamma + i\lambda r\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \gamma - i\lambda r\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \gamma - i\lambda r\right) \right)^{-1}. \quad (55)$$

در معادله (54) انتگرال مقدماتی p به سادگی محاسبه می شود

$$\nu \int_{\cdot}^{\Lambda} dp (\nu p)^{-s-t} = \frac{(\nu\Lambda)^{1-s-t}}{1-s-t}, \quad (56)$$

به گونه ای که مانند مرجع [10] برای صفر شدن جواب انتگرال در حد $p \rightarrow 0$ فرض کرده ایم

$$\Re(-s-t) + 1 > 0, \quad (57)$$

برای این که شرط بالا برقرار باشد، ما پربند انتگرال گیری های s و t را به گونه ای انتخاب می کنیم که همواره داشته باشیم

$$\Re(s) < \frac{1}{\nu}, \quad \Re(t) < \frac{1}{\nu}. \quad (58)$$

برای محاسبه ی انتگرال t در معادله (54) آن را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathcal{I}_{r,s} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dt}{\nu i\pi} f_{r,s}(t), \quad (59)$$

به گونه ای که

$$f_{r,s}(t) = \Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \gamma + t\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \gamma + t\right) \Gamma(-i\lambda r - t) \frac{(\nu\Lambda)^{1-s-t}}{1-s-t} e^{i\frac{\pi}{\nu}(s-t)}. \quad (60)$$

برای مقدار ثابتی از متغیرهای r و s ، قطب های تابع $f_{r,s}(t)$ به صورت زیر داده می شوند

$$t_R = 1 - s, -i\lambda r + n, \quad t_L = +\gamma - \frac{1}{\nu} - n, -\gamma - \frac{1}{\nu} - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (61)$$

به گونه ای که t_L قطب های $\Gamma\left(\frac{1}{\nu} + \gamma + t\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \gamma + t\right)$ هستند و در سمت چپ پربند انتگرال گیری قرار دارند. در حالی که t_R

قطب های $\Gamma(-i\lambda r - t)$ و مخرج کسر (60) هستند که در سمت راست پربند انتگرال گیری قرار دارند. ما مشابه با مرجع [10] پربند

انتگرال s را به گونه ای انتخاب می کنیم که افزون بر شرط (58) هم زمان شرط زیر نیز برقرار باشد

$$\Re(s) > -1. \quad (62)$$

برای محاسبه انتگرال (59) پربند انتگرال t را در نیم صفحه راست می بندیم. بنابراین قطب هایی که باید در نظر گرفته شوند با t_R در معادله (61) داده شده اند. با در نظر گرفتن شرط (62) می توان نشان داد که تنها قطب های ساده

$$t_R = -i\lambda r, 1 - i\lambda r, 1 - s, \quad (63)$$

در حد $\Lambda \rightarrow \infty$ دارای مانده غیر صفر هستند. اینکه تنها تعداد انگشت شماری قطب با مانده غیر صفر برای محاسبه باقی می ماند کمک بزرگی به ساده تر و کوتاه تر شدن محاسبه انتگرال تریس می کند و ارزش انتخاب پربند، با شرط داده شده در معادله (62)، را نشان می دهد. راهنمای ما برای رسیدن به این که پربند با شرایط (58) و (62) محاسبه را ساده تر می کند مطالعه رفتار مجانبی تابع ویتاکر [27] است. رفتار مجانبی $|W_{-i\lambda r, \gamma}(-\nu ip)|$ نشان می دهد در حد $p \rightarrow 0$ انتگرال (51) صفر و در حد $p \rightarrow \infty$ دست بالا به طور خطی واگرا می شود. پربند با شرایط (58) و (62) آسان تر به این نتیجه ها برای انتگرال (51) می انجامد. به همین دلیل پربند انتگرال گیری را مشابه با مرجع [10] در نظر گرفته ایم. با استفاده از قضیه مانده ها و در نظر گرفتن قطب های ساده (63)، انتگرال (59) محاسبه می شود

$$\mathcal{I}_{r,s} = h_1(r,s) + h_2(r,s) + h_{\text{ind}}(r,s), \quad (64)$$

به گونه ای که h_1 و h_2 به Λ بستگی دارند اما h_{ind} مستقل از Λ است و داده می شوند با

$$h_1(r,s) = i\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} + \gamma - i\lambda r\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} - \gamma - i\lambda r\right)\frac{(\nu\Lambda)^{-s+i\lambda r}}{-s+i\lambda r}e^{i\frac{\pi}{\nu}(s+i\lambda r)}, \quad (65)$$

$$h_2(r,s) = \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} + \gamma - i\lambda r\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} - \gamma - i\lambda r\right)\frac{(\nu\Lambda)^{-s+i\lambda r}}{1-s+i\lambda r}e^{i\frac{\pi}{\nu}(s+i\lambda r)}, \quad (66)$$

$$h_{\text{ind}}(r,s) = -i\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} + \gamma - s\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} - \gamma - s\right)\Gamma(-1+s-i\lambda r)e^{i\pi s}. \quad (67)$$

پس می توان نوشت

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{\text{ind}}, \quad (68)$$

به گونه ای که

$$\mathcal{I}_1 = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} + \gamma + s\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} - \gamma + s\right)\Gamma(-s+i\lambda r)h_1(r,s), \quad (69)$$

$$\mathcal{I}_2 = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} + \gamma + s\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} - \gamma + s\right)\Gamma(-s+i\lambda r)h_2(r,s), \quad (70)$$

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} + \gamma + s\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu} - \gamma + s\right)\Gamma(-s+i\lambda r)h_{\text{ind}}(r,s). \quad (71)$$

برای محاسبه انتگرال s در \mathcal{I}_1 و \mathcal{I}_2 می توان نشان داد که قطب ها به صورت زیر داده می شوند

$$s_R = i\lambda r + n, \quad s_L = +\gamma - \frac{1}{\nu} - n, -\gamma - \frac{1}{\nu} - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (72)$$

به گونه‌ای که $i\lambda r$ قطب h ، $1+i\lambda r$ قطب h_1 ، s_R قطب‌های $\Gamma(-s+i\lambda r)$ ، s_L قطب‌های $\Gamma(\frac{1}{\nu}-\gamma+s)\Gamma(\frac{1}{\nu}+\gamma+s)$ هستند. پربند انتگرال s را در نیم صفحه راست می‌بندیم. بنابراین قطب‌هایی که باید در نظر گرفته شوند با s_R در معادله (72) داده شده‌اند. در محاسبه \mathcal{I} تنها قطب مرتبه دو $i\lambda r$ دارای مانده غیرصفر در حد $\Lambda \rightarrow \infty$ است. به طور مشابه، در محاسبه \mathcal{I}_1 قطب‌های ساده $i\lambda r$ و مرتبه دو $1+i\lambda r$ دارای مانده غیرصفر هستند. با استفاده از قضیه مانده‌ها و کمی محاسبات جبری خواهیم داشت

$$\mathcal{I} = -\frac{i}{\nu} \left(\frac{1}{\nu} + \gamma - i\lambda r \right) \left(\frac{1}{\nu} - \gamma - i\lambda r \right) \left\{ \psi \left(\frac{1}{\nu} + \gamma + i\lambda r \right) + \psi \left(\frac{1}{\nu} - \gamma + i\lambda r \right) - \log(\nu\Lambda) + \gamma_E + \frac{i\pi}{\nu} \right\}, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \Lambda - \lambda r + \frac{i}{\nu} \\ &+ \frac{i}{\nu} \left(\frac{1}{\nu} + \gamma + i\lambda r \right) \left(\frac{1}{\nu} - \gamma + i\lambda r \right) \left\{ \psi \left(\frac{1}{\nu} + \gamma + i\lambda r \right) + \psi \left(\frac{1}{\nu} - \gamma + i\lambda r \right) - \log(\nu\Lambda) + \gamma_E - 1 + \frac{i\pi}{\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (74)$$

به گونه‌ای که $\gamma_E = 0.5772\dots$ ثابت اولر است. اکنون به محاسبه انتگرال \mathcal{I}_{ind} می‌پردازیم. پس از جای‌گذاری عبارت h_{ind} از (67) در معادله (71) و کمی ساده‌سازی می‌توان نشان داد

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = i\pi^\nu C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi \sin \pi(s-i\lambda r) \cos \pi(\gamma-s) \cos \pi(\gamma+s)} \frac{e^{i\pi s} F_r(s)}{\nu i\pi \sin \pi(s-i\lambda r) \cos \pi(\gamma-s) \cos \pi(\gamma+s)}, \quad (75)$$

به گونه‌ای که تعریف کرده‌ایم

$$F_r(s) = \frac{(s-\gamma-\frac{1}{\nu})(s+\gamma-\frac{1}{\nu})}{(s-i\lambda r)(s-i\lambda r-1)}. \quad (76)$$

با استفاده از اتحاد

$$\frac{1}{(s-i\lambda r)(s-i\lambda r-1)} = -\frac{1}{(s-i\lambda r)} + \frac{1}{(s-i\lambda r-1)}, \quad (77)$$

می‌توان نشان داد که معادله (76) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} F_r(s) &= g_r(s) - g_r(s-1) + \frac{\nu i\lambda r}{(s-i\lambda r)}, \\ g_r(s) &= (s-i\lambda r) - \frac{(-\lambda^\nu r^\nu + i\lambda r - \gamma^\nu + \frac{1}{\nu})}{(s-i\lambda r)}. \end{aligned} \quad (78)$$

با جای‌گذاری از (78) در معادله (75) خواهیم داشت

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = i\pi^\nu C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\nu i\pi \sin \pi(s-i\lambda r) \cos \pi(\gamma-s) \cos \pi(\gamma+s)} \frac{e^{i\pi s}}{\nu i\pi \sin \pi(s-i\lambda r) \cos \pi(\gamma-s) \cos \pi(\gamma+s)} \left\{ g_r(s) - g_r(s-1) + \frac{\nu i\lambda r}{(s-i\lambda r)} \right\}. \quad (79)$$

برای سادگی محاسبه \mathcal{I}_{ind} ، آن را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathcal{I}_{\text{ind}} = \mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{g}} + \mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}}, \quad (80)$$

به گونه ای که $\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{g}}$ و $\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}}$ از معادله های زیر خوانده می شوند

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{g}} = i\pi^r C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\sqrt{i\pi} \sin \pi(s - i\lambda r) \cos \pi(\gamma - s) \cos \pi(\gamma + s)} \frac{e^{i\pi s} (g_r(s) - g_r(s-1))}{}, \quad (81)$$

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}} = i\pi^r C_r \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{\sqrt{i\pi} \sin \pi(s - i\lambda r) \cos \pi(\gamma - s) \cos \pi(\gamma + s)} \frac{\imath i\lambda r}{(s - i\lambda r)}. \quad (82)$$

برای محاسبه $\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{g}}$ ابتدا قطب های انتگرالده آن را مشخص می کنیم

$$s_R = \pm\gamma + \frac{1}{\imath} + n, i\lambda r + n, \quad s_L = \pm\gamma - \frac{1}{\imath} - n, -1 + i\lambda r - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (83)$$

به گونه ای که قطب های s_R در سمت راست و قطب های s_L در سمت چپ پربند انتگرال گیری قرار گرفته اند. پربند انتگرال را در نیم صفحه چپ می بندیم، بنابراین قطب های s_L درون پربند انتگرال گیری قرار می گیرند. چون در محاسبه انتگرال (81) سهم مانده قطب داده شده با $n+1$ در جمله شامل $g_r(s)$ توسط سهم مانده قطب داده شده با n در جمله شامل $g_r(s-1)$ حذف می شود، بنابراین به غیر از قطب های زیر سهم مانده سایر قطب ها حذف خواهد شد

$$s_L = +\gamma - \frac{1}{\imath}, -\gamma - \frac{1}{\imath}, -1 + i\lambda r. \quad (84)$$

بنابراین به دست می آوریم

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{g}} = -\frac{i\lambda^r r^r}{\imath} - \frac{\lambda r}{\imath} - \frac{i\gamma^r}{\imath} - \frac{\imath i}{\lambda} - \frac{\gamma}{\sin(\imath\pi\gamma)} (e^{\imath\pi\lambda r} + \cos(\imath\pi\gamma)). \quad (85)$$

شکل انتگرال (82) مانند انتگرالی است که در مرجع [10] روش محاسبه آن توضیح داده شده است. با راهنمایی گرفتن از [10] و کمی محاسبه خواهیم داشت

$$\mathcal{I}_{\text{ind}}^{\text{frac}} = \lambda r \gamma_E + \frac{i\lambda r}{\imath \sin(\imath\pi\gamma)} \left\{ (e^{-\imath\pi\gamma} + e^{\imath\pi\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{\imath} + \gamma + i\lambda r\right) - (e^{\imath\pi\gamma} + e^{\imath\pi\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{\imath} - \gamma + i\lambda r\right) \right\}. \quad (86)$$

سرانجام با استفاده از معادله های (68)، (73)، (74)، (80)، (85) و (86) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \Lambda + \lambda r \log(\imath\Lambda) - \lambda r - \frac{i\pi\lambda r}{\imath} - \frac{\gamma}{\sin(\imath\pi\gamma)} (e^{\imath\pi\lambda r} + \cos(\imath\pi\gamma)) \\ &+ \frac{i\lambda r}{\imath \sin(\imath\pi\gamma)} \left\{ (e^{-\imath\pi\gamma} + e^{\imath\pi\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{\imath} + \gamma + i\lambda r\right) - (e^{\imath\pi\gamma} + e^{\imath\pi\lambda r}) \psi\left(\frac{1}{\imath} - \gamma + i\lambda r\right) \right\}. \end{aligned} \quad (87)$$

با استفاده از معادله‌های (۲۵) و (۵۱) تریس تانسور انرژی-تکانه بهسازی نشده به صورت زیر داده می‌شود

$$g^{\mu\nu} \langle in | T_{\mu\nu} | in \rangle = \frac{Hm^{\nu}}{2\pi^{\nu}} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathcal{I} dr}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (88)$$

با جای‌گذاری \mathcal{I} از معادله (۸۷) در معادله (۸۸) و گرفتن انتگرال r سرانجام تریس تانسور انرژی-تکانه بهسازی نشده به دست می‌آید که در معادله (۲۶) داده شده است.

مراجع

1. F. Sauter, Uber das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs, *Z. Phys.* **69**, (1931) 742.
2. W. Heisenberg and H. Euler, Consequences of Dirac's theory of positrons, *Z. Phys.* **98**, (1936) 714.
3. J. S. Schwinger, On gauge invariance and vacuum polarization, *Phys. Rev.* **82**, (1951) 664.
4. F. Gelis and N. Tanji, Schwinger mechanism revisited, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **87**, (2016) 1.
5. A. Di Piazza, C. Muller, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems, *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 1177.
6. E. Mottola, Particle Creation in de Sitter Space, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 754.
7. J. Garriga, Pair production by an electric field in (1+1)-dimensional de Sitter space, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 6343.
8. M. B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, M. Sasaki, J. Soda, T. Tanaka and A. Vilenkin, Schwinger effect in de Sitter space, *JCAP* **1404** (2014) 009.
9. E. Bavarsad, C. Stahl and S.S. Xue, Scalar current of created pairs by Schwinger mechanism in de Sitter spacetime, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 104011.
10. T. Kobayashi, N. Afshordi, Schwinger Effect in 4D de Sitter Space and Constraints on Magnetogenesis in the Early Universe, *JHEP* **1410** (2014) 166.
11. C. Stahl, E. Strobel, S.S. Xue, Fermionic current and Schwinger effect in de Sitter spacetime, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 025004.
12. T. Hayashinaka, T. Fujita, J. Yokoyama, Fermionic Schwinger effect and induced current in de Sitter space, *JCAP* **07** (2016) 010.
13. C. Stahl and S. S. Xue, Schwinger effect and backreaction in de Sitter spacetime, *Phys. Lett. B* **760** (2016) 288.
14. T. Markkanen, A. Rajantie, Massive scalar field evolution in de Sitter, *JHEP* **1701** (2017) 133.
15. T. Markkanen, De Sitter Stability and Coarse Graining, arXiv:1703.06898 [gr-qc].
16. L. Parker, S. A. Fulling, Adiabatic regularization of the energy momentum tensor of a quantized field in homogeneous spaces, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 341.
17. S. A. Fulling, L. Parker, Renormalization in the theory of a quantized scalar field interacting with a robertson-walker spacetime, *Annals Phys.* **87** (1974) 176.
18. J. S. Dowker, R. Critchley, Effective Lagrangian and Energy Momentum Tensor in de Sitter Space, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 3224.
19. S. Habib, C. Molina-Paris, E. Mottola, Energy momentum tensor of particles created in an expanding universe, *Phys. Rev. D* **61** (1999) 024010.
20. D. Lopez Nacir, F. D. Mazzitelli, Backreaction in trans-Planckian cosmology: Renormalization, trace anomaly and selfconsistent solutions, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 024013.
21. A. Landete, J. Navarro-Salas, F. Torrenti, Adiabatic regularization and particle creation for spin one-half fields, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 044030.
22. A. Landete, J. Navarro-Salas, F. Torrenti, Adiabatic regularization for spin-1/2 fields, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 061501.
23. S. Ghosh, Creation of spin 1/2 particles and renormalization in FLRW spacetime, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 124075.
24. S. Ghosh, Spin 1/2 field and regularization in a de Sitter and radiation dominated universe, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 044032.

۲۵. ن. مارگسیان، تانسور شبه کلاسیک انرژی-تکانه ذرات اسکالر شوینگر خلق شده در فضا زمان دوسبیه، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه

کاشان، کاشان (۱۳۹۶).

۲۶. ز. سجادی‌نیا، تریس بازبهنجارشده تانسور انرژی-تکانه اسکالرهای شوینگر در فضا زمان دوسویه ۲-بُعدی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان (۱۳۹۶).
27. F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010).
۲۸. م. مرتضی‌زاده، بررسی تریس تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر در حضور میدان الکتریکی زمینه در فضا زمان دوسویه ۳-بُعدی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه کاشان، کاشان (۱۳۹۶).
29. L. Parker and D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009).
30. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984).
31. M. J. Duff, Twenty Years of the Weyl Anomaly, *Class. Quant. Grav.* **11**, (1994) 1387.