

عامل سویدگی در میدان‌های تصادفی ناهمسانگرد

مجید بهرامی نصر^۲ و سید محمد صادق موحد^{۱ و ۳}

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۲. آزمایشگاه میان‌رشته‌ای ابن سینا، دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۳. پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران

پست الکترونیکی: m.s.movahed@ipm.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۸/۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۸/۰۶/۰۲)

چکیده

معیارهای هندسی و توپولوژیک ما را قادر می‌سازند که ضمن مشخصه‌یابی میدان‌های تصادفی کیهانی، به طور ساختارمند ارتباط بین توابع چند نقطه‌ای وزن‌دار و بی‌وزن فراهم شود. یکی از این ارتباطات در بستر عامل سویدگی داده می‌شود. در این مقاله با تکیه بر آمار قله‌ها، عامل سویدگی در یک میدان تصادفی ناهمسانگرد را بررسی می‌کنیم. بر این اساس توصیف تحلیلی از عامل سویدگی موضعی و خطی بر حسب مدل طیف توان ناهمسانگرد را ارائه می‌دهیم. با انجام شبیه‌سازی صحت رابطه تحلیلی به دست آمده را بررسی می‌کنیم. نتایج ما نشان می‌دهد در حد تراز آستانه بالا و جدایی فضایی بزرگ، همخوانی خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: میدان تصادفی، عامل سویدگی، ناهمسانگردی، خواص هندسی و توپولوژیک

۱. مقدمه

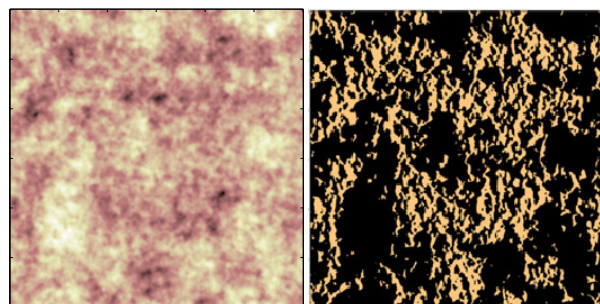
تشکیل می‌دهند، دارای طیف مقیاس ناورد و توزیع گوسی هستند. این میدان‌ها در اثر تحول در رژیم غیرخطی به میدان بسیار ناهمگن و ناهمسانگرد ناگوسی تبدیل می‌شوند. لذا آن دسته از شاخص‌هایی که برای مشخصه‌یابی و تبیین ویژگی‌های فیزیکی میدان‌های همگن و همسانگرد، به کار می‌روند دیگر دقت و کارایی لازم را نخواهند داشت. بنابراین ابداع و بررسی شاخص‌ها برای میدان‌های تصادفی کیهانی ناهمسانگرد مورد توجه است. در میان شاخص‌های ارزیابی می‌توان به معیارهای

فرض همگنی و همسانگردی آماری علاوه بر تبعاتی که در ارائه مدل‌های نظری و پدیده‌شناسی دارد، منجر به وجود ساده‌سازی‌های بسیاری در محاسبه خواص آماری میدان‌های تصادفی کیهانی خواهد شد. افت‌وخیزهای کوانتومی اولیه و یا افت‌وخیزهای ناشی از سلسله گذارهایی که در حین تحول کیهان ایجاد می‌شوند، اختلالات نخستین کیهانی را تشکیل می‌دهند. غالب این اختلالات که یک میدان تصادفی کیهانی را

میدان تصادفی کیهانی شبیه به همان اثری است که در فضای انتقال به سرخ و مبتنی بر رابطه (۱) انتظار داریم.

همچنین لازم به ذکر است که علاوه بر ناهمسانگردی در فضای سرخگرایی، در مطالعات ماده بین ستاره‌ای و بین کهکشانی توزیع هیدورژن خنثی که در مکعب مکان-مکان-سرعت تصویر می‌شود ناهمسانگردی وجود دارد [۴]. آشکارسازی خوشگی ماده در راستای محور اصلی هاله‌ها در شبیه‌سازی‌های بس ذره‌ای نیز بسیاری از محققان را بر آن داشت که ابزارهای آماری همچون تابع همبستگی وزن‌دار ناهمسانگرد را ابداع و به کار ببندند [۵ و ۶]. علاوه بر رصدهای مبتنی بر ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، ناهنجاری‌هایی نیز در CMB رصد شده است [۷]. برخی از این ناهنجاری‌ها در فضای حقیقی ریشه در نامتقارنی CMB دارد. از این رو بررسی میدان‌های ناهمسانگرد و تطبیق آمارهای که برای میدان‌های همسانگرد توسعه داده شده‌اند، ضروری به نظر می‌رسد. ناهمسانگردی در سایر میدان‌های تصادفی همچون سطوح زیر [۸ و ۹] و پراش نور از آنها [۱۰ و ۱۱] و رشد لایه‌های نازک ارگانیك [۱۲] نیز بررسی شده است.

از منظر فیزیک آماری، رابطه بین توابع همبستگی وزن‌دار^۱ و بی‌وزن^۲ به لحاظ معانی فیزیکی که در بررسی ارتباط بین نواحی در آستانه بالا با طول موج کوچک و نواحی با طول موج بلند، خصوصاً در کیهان‌شناسی فراهم می‌کند، مورد توجه بوده است. مفهوم عامل سویدگی^۳ برای اولین بار برای آزمودن رابطه بین تابع توزیع توامان^۴ و تابع توزیع دو نقطه‌های وزن‌دار میدان کاتوره‌ای معرفی شد [۱۳ و ۱۴] و یکی از مطالعات پیشرو نشان داد که عامل سویدگی رابطه همبستگی فضایی بین خوشه‌های غنی را آشکار می‌کند [۱۵]. عامل سویدگی به عنوان رابطه ریاضیاتی بین تابع همبستگی دو نقطه‌ای غیر وزن‌دار و وزن‌دار در رژیم خاصی از مقیاس و آستانه توسط [۱۶-۱۸] نشان داده شد. برای هر ویژگی دلخواه از میدان تصادفی مورد مطالعه



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) سمت چپ: میدان تصادفی شبیه‌سازی شده همسانگرد. سمت راست: نمایشی از مشاهده‌پذیر ناهمسانگرد از همان میدان همسانگرد.

توپولوژیک و هندسی اشاره کرد. این معیارهای توپولوژیک و هندسی برای میدان‌های گوسی و همسانگرد در کیهان‌شناسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱-۳].

همان طور که مطرح شد، حتی اگر شرایط اولیه تولید یک میدان تصادفی کیهانی، همگن، همسانگرد و گوسی باشد اما به سبب تحولات مختلفی که تجربه می‌کند، ناهمگنی، ناهمسانگردی و ناگوسیت ایجاد می‌شود. لذا ناگوسیت و ناهمسانگردی دو ویژگی مهمی خواهند بود که باید از روش‌های قابل اعتماد برای استخراج ویژگی‌های فیزیکی در حضور خاصیت‌های مذکور، استفاده کنیم. برای نمونه، مطالعات اخیر نشان می‌دهد که فرض همسانگردی برای میدان‌های اندازه‌گیری شده در فضای سرخ‌گرایی به هم می‌خورد [۴]. به بیانی دیگر مختصات سرخ‌گرایی در حد تقریب صفحات موازی به صورت زیر است:

$$s = r + H^{-1} \vec{v} \cdot \hat{r} \quad (1)$$

که r اندازه بردار مکان فیزیکی و $\hat{r}$ برداری در جهت مختصات فیزیکی است و $\vec{v}$ سرعت خاصه است که در مقایسه با سرعت هابلی مقدار کوچکی دارد، لذا اعداد در مختصات سرخگرایی متفاوت با مختصات حقیقی است و به خاطر سرشت کاتوره‌ای سرعت خاصه، این تغییر مختصات شکلی تصادفی دارد و در راستای خط دید ناهمسانگرد می‌شود. شکل ۱ یک شبیه‌سازی از میدان کیهانی همسانگرد را نشان می‌دهد؛ بخش سمت راست شکل ۱ مشاهده‌پذیری ناهمسانگرد از همان میدان همسانگرد را نشان می‌دهد. ماهیت ناهمسانگردی در این

۱. Weighted correlation function

۲. Unweighted correlation function

۳. Bias factor

۴. Joint

دیگر ردپای ناهمسانگردی در تعریف عمومی عامل سوییذگی نیز معرفی نشده است. در این مقاله بر اساس انگیزه‌های مطرح شده در مورد میدان‌های تصادفی کیهانی ناهمسانگرد و همچنین امکان معرفی و محاسبه توابع همبستگی بی‌وزن مجموعه‌های گشت و بحرانی، به منظور تحلیل دقیق‌تر خواص فیزیکی و آماری میدان‌ها، تلاش می‌کنیم عامل سوییذگی خطی، تعیینی و موضعی قله‌ها را در یک میدان تصادفی ناهمسانگرد گوسی، محاسبه کنیم. ابتدا در بخش ۲ عامل سوییذگی در کیهان را توصیف می‌کنیم، سپس در بخش ۳ به تفصیل در مورد توزیع قله‌ها در میدان تصادفی گوسی صحبت می‌کنیم و در بخش‌های ۴ و ۵ به محاسبه عامل سوییذگی برای میدان تصادفی دو و سه بعدی می‌پردازیم.

۲. عامل سوییذگی در کیهان

برای مدت مدیدی این سوال مطرح بود که چرا خوشه‌های آبل که به صورت همبسته توزیع شده‌اند، طول همبستگی بزرگ دارند در حالی که مقدار تابع همبستگی فضایی کهکشان‌ها در همان طول مشخصه بسیار کوچک‌تر از مقدار تابع همبستگی خوشه‌های کهکشانی است [۱۶]. به بیانی دیگر اگر کهکشان‌ها توسط سوییذگی غیرخطی از میدان افت‌وخیز چگالی گوسی تشکیل شده باشد در آن صورت انتظار داریم تابع همبستگی کهکشان‌ها در مقایسه با همبستگی افت‌وخیزهای اولیه با یک ضریبی بزرگ‌تر باشد. برای توصیف چنین حالتی کایزر نشان داد که میدان تباین چگالی کهکشان‌ها دقیقاً با یک میزان میدان تباین چگالی خوشه‌ها را دنبال نمی‌کند. برای این منظور او در نظر گرفت که تباین چگالی زمینه به صورت زیر است:

$$\delta_b \equiv \frac{\rho_b - \langle \rho_b \rangle}{\langle \rho_b \rangle}, \quad (2)$$

همچنین میدان تباین چگالی نواحی بلند تر از آستانه $\delta_{\rho \geq \nu \sigma_0}$ در میدان ρ به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta_{\rho \geq \nu \sigma_*} = \frac{\rho_{\rho \geq \nu \sigma_*} - \langle \rho_b \rangle}{\langle \rho_b \rangle}, \quad (3)$$

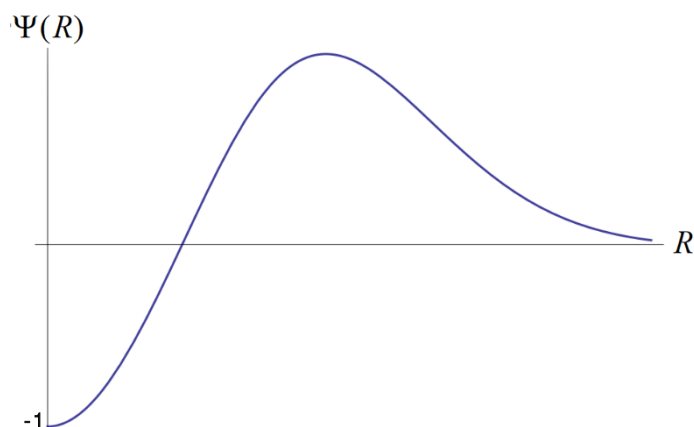
اکنون احتمال یافتن دو ناحیه با تباین چگالی $\delta_{\rho \geq \nu \sigma_*}(r)$ و $\delta_{\rho \geq \nu \sigma_*}(r')$ که در فاصله $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$ از هم قرار گرفته‌اند

رابطه بین تابع غیرخطی آستانه و درجات مختلف تابع همبستگی وزن‌دار در مرجع [۱۹ و ۲۰] به تفصیل بررسی شده است. این مطالعات اثبات می‌کنند که علی‌الاصول وابستگی به مقیاس و غیرخطی بودن عامل سوییذگی، به صورت سیستماتیک برای معیارهای مختلفی قابل استفاده است. ردگیری به کمک ماده تاریک و این که چگونه کهکشان‌ها به کمک عنصر یاد شده تحت تأثیر قرار می‌گیرند به صورت ویژه به وسیله تغییر تعریف سوییذگی در فضای لاگرانژی یا اویلری انجام شده است [۲۱]. مطالعه ردپای ناگوسیت اولیه در عامل سوییذگی لاگرانژی در مرجع [۲۲] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با در نظر گرفتن تورم ناهمسانگرد، تصحیحات ناهمسانگردی در عامل سوییذگی ساختار بزرگ مقیاس کیهانی در مرجع [۲۳] مطالعه شده است.

در مطالعه‌ای که توسط باردین، بوند، کایزر و سالای (از این پس BBKS) انجام داد تابع همبستگی قله‌ها در یک میدان تصادفی گوسی به تابع همبستگی خود میدان ارتباط یافت و در نتیجه عامل سوییذگی مستقل از مقیاس محاسبه و ارایه شد [۱۷]، اما در تحقیقات جدید این محاسبه تکمیل‌تر شد به صورتی که هم وابستگی به مقیاس و هم وابستگی تابع همبستگی قله‌ها به سایر مشتقات میدان، محاسبه شد [۲۴]. پس از آن عامل سوییذگی به عنوان عامل ارتباطی بین اختلالات میدان چگالی ماده و چگالی تعداد هاله‌ها محاسبه شد. از منظر محاسبات آماری داشتن مدلی برای عامل سوییذگی علاوه بر تبعات کیهان‌شناختی یک ساده سازی بزرگی برای محاسبه توابع همبستگی بی‌وزن مجموعه‌های گشت^۱ و بحرانی^۲ فراهم می‌کند به نحوی که با داشتن تابع همبستگی وزن‌دار می‌توان آنها را محاسبه کرد [۲۵]. در مطالعات مذکور اهمیت عامل سوییذگی از منظر کیهان‌شناختی مورد توجه بوده است. از سویی دیگر هر چند که فرمالیزم کلی برای محاسبه عامل سوییذگی برای هر ویژگی دلخواه فراهم است، اما کمتر مورد توجه قرار گرفته است. از سویی

۱. Excursion sets

۲. Critical sets



شکل ۲. اضافه بر احتمال به دلیل صفر بودن تعداد جفت‌ها از ۱- شروع می‌شود.

برابر است با:

$$P(\delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r}); \delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r}')) = \int_{v\sigma_*} d\delta_{\rho}(\vec{r}) \int_{v\sigma_*} d\delta_{\rho}(\vec{r}') P(\delta_{\rho}(\vec{r}); \delta_{\rho}(\vec{r}')), \quad (4)$$

$$P(\delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r})) = \int_{v\sigma_*} d\delta_{\rho}(\vec{r}) P(\delta_{\rho}(\vec{r})),$$

تابع دو متغیره گوسی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P(\delta_i, \delta_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \text{Det}(C)} \exp\left(-\frac{1}{2} \delta^T \cdot C^{-1} \cdot \delta\right), \quad (5)$$

که در آن ماتریس هموردایی^۱ برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \langle \delta^2(r_i) \rangle & \langle \delta(r_i) \delta(r_j) \rangle \\ \langle \delta(r_i) \delta(r_j) \rangle & \langle \delta^2(r_j) \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_*^2 & C_{\delta}(|r_i - r_j|) \\ C_{\delta}(|r_i - r_j|) & \sigma_*^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

و اکنون با توجه به تعریف تابع دونقطه‌ای بی‌وزن یعنی:

$$\Psi(R, v) = \frac{P(\delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r}); \delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r}'))}{P(\delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r})) P(\delta_{\rho \geq v\sigma_*}(\vec{r}'))} - 1, \quad (7)$$

و استفاده از روابط (۳)، (۴) و (۵)، رابطه (۶) در

$\sigma_*^2 \ll C_{\delta}(R)$ و $v \gg \sigma$ خواهیم داشت:

$$\Psi(R, v) \approx \frac{v^2}{\sigma_*^2} C_{\delta\delta}(R), \quad (8)$$

در رابطه بالا ضریب $\frac{v^2}{\sigma_*^2}$ را به عنوان سویدگی تعریف می‌کنیم.

همان طور که واضح است میدان خوشه‌ها میدان زمینه را دقیقاً دنبال نمی‌کند [۱۶]. لازم به ذکر است که با محاسبه مقدار فوق به صورت عددی، شکلی شبیه شکل ۲ به دست می‌آید، همان طور که دیده می‌شود در فواصل نزدیک مقدار منفی دارد، دلیل

شروع نمودار از مقدار ۱-، صفر بودن تعداد جفت‌هاست، برای مثال اگر شرط مربوط به قله‌ها را در نظر بگیریم، قله‌ها در فاصله‌های نزدیک در کنار یک قله یک نقطه پست‌تر قرار دارد تا یک قله دیگر؛ در ضمن این مورد دلیلی است که در محاسبات بایستی حد فاصله‌های بالا را اعمال کنیم.

سویدگی در واقع پارامتری است که تابع همبستگی دو نقطه‌ای^۲ را برای میدان تباین چگالی کهکشان بازمقیاس می‌کند تا تابع همبستگی دو نقطه‌ای ماده مورد انتظار را نتیجه دهد. این بازمقیاس را می‌توان به کمک تبدیل خطی میدان تباین چگالی ماده و کهکشان‌ها به دست آورد، به این معنی که:

$$\begin{aligned} \delta_T(r) &\equiv \rho_T(r) / \bar{\rho}_T - 1, \\ \delta_P(r) &\equiv n_P(r) / \bar{n}_P - 1, \\ \delta_P(r) &= b \delta_T(r), \end{aligned} \quad (9)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Psi_{PP}(|r_i - r_j|) = b^2 C_{TT}(|r_i - r_j|), \quad (10)$$

که با برابر گرفتن $b = \frac{v}{\sigma}$ در تطابق با رابطه (۸) خواهد بود [۲۶]. به طور کلی می‌توان، این مطلب را به صورت کلی با در نظر گرفتن مشتقات اول و دوم به صورت مشتقات اول و دوم در مقایسه با خود میدان تباین چگالی سهم داده شده در حد قله‌های مرتفع سویدگی‌های مربوط به مشتقات اول و دوم در مقایسه با خود میدان تباین چگالی سهم ناچیزتری دارند [۲۴]. این تصویر ساده‌ترین تصویری است که

۲. Two Point Correlation Function

۱. Covariance matrix

$$\delta(x; R) \equiv \int \delta(x') W(x+x'; R) d^3x', \quad (13)$$

از این پس در این بخش میدان هموار شده را همان $\delta(x)$ نشان می‌دهیم مگر این که صریحاً چیزی خلاف آن ذکر شود. میدان تصادفی گوسی بایستی تعدادی قله و دره داشته باشد، توزیع فضای قله‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$n_{peak}(x) = \sum_p \delta_{(D)}(x - x_p), \quad (14)$$

که در آن x_p مکان قله‌ها است. بنابر تعریف، گرادیان میدان هموار شده در قله‌ها صفر است، یعنی:

$$\eta(x_p) \equiv \nabla \delta(x_p) = 0, \quad (15)$$

با بسط $\eta(x)$ حول قله‌ها خواهیم داشت:

$$\eta_i(x) \approx \sum_j \zeta_{ij}(x_p)(x - x_p)_j, \quad (16)$$

که در آن:

$$\zeta_{ij}(x_p) \equiv \nabla_i \nabla_j \delta(x_p) = -\sum_k k_i k_j \delta_k e^{ik \cdot x_p}, \quad (17)$$

در صورتی ζ_{ij} در نقطه x_p تکین^۲ نباشد می‌توان نوشت:

$$(x - x_p)_i \approx \sum_j \zeta_{ij}^{-1}(x_p) \eta_j(x), \quad (18)$$

پس خواهیم داشت:

$$\delta_D(x - x_p) = |\det \zeta(x_p)| \delta_D[\eta(x)], \quad (19)$$

قید فوق صرفاً نقاط اکسترموم را مشخص می‌کند. آزمون مشتق دوم به ما برای تعیین نوع نقطه اکسترموم کمک می‌کند. برای این که نقطه اکسترموم مورد نظر قله باشد بایستی ویژه مقادیر ماتریس مشتق دوم یعنی ζ_{ij} منفی باشند. متداول است که از قرینه ماتریس ζ_{ij} استفاده کنیم که در این حالت می‌بایست ویژه مقادیر ماتریس مثبت باشند یعنی $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ برای زمانی که $\Lambda_3 > 0$. می‌توان قید مربوط به قله‌های بلندتر از ارتفاع خاصی را هم اضافه کرد، یعنی $(\delta/\sigma) \geq \nu$ ؛ در نتیجه متوسط آماری به فرم دیفرانسیلی برای قله‌های مرتفع‌تر از مقدار

می‌توان از سوییذگی ارائه داد که موضعی، خطی و تعینی است. در سال ۱۹۸۵ مارک دیویس و جرج استفانیو، کارلوس فرنک و سایمون وایت با شبیه‌سازی N-ذره‌ای برای خوشگی گرانشی در رژیم غیر خطی در حضور ماده تاریک سرد با برهم کنش ضعیف نشان دادند که رابطه زیر بین همبستگی کپکشان‌ها و همبستگی میدان تباین چگالی جرم زمینه برقرار است:

$$C_{galaxy}(\vec{r}) = b^2 C_{mass}(\vec{r}), \quad (11)$$

و یا برای معادلات در فضای فوریه بر حسب طیف توان داریم:

$$P_{galaxy}(\vec{k}) = b^2 P_{mass}(\vec{k}), \quad (12)$$

که در تطابق با نتیجه کایزر است [۲۷].

۳. توزیع قله‌ها در میدان گوسی

در این قسمت ابتدا تلاش داریم به کمک بررسی آمار میدان تصادفی کیهانی و به کمک فرض‌های معقولی که در مورد آن داریم که ریشه فیزیکی دارند عامل سوییذگی را به دست آوریم. در فرمالیسم قله‌ها فرض می‌شود مواردی را که در نهایت رمبش کرده تا اجرام غیرخطی را تشکیل دهند می‌توان در میدان چگالی اولیه با مشخص کردن تمام قله‌هایی که چگالی فزاتر از آستانه خاص دارند، شناسایی کرد. به همین منظور میدان توسط تابع پنجره‌ای با طول مشخصه مناسب هموارسازی می‌شود. هر چند که فرمالیسم معرفی شده توسط BBKS، از نقطه نظر ریاضیاتی بسیار مستحکم است ولی محدودیت‌های بسیاری دارد؛ اگر چه این فرمالیسم تعداد قله‌ها را به صورت تابعی از ارتفاع مشخص می‌کند ولی نمی‌تواند تابع جرم^۱ اجرام غیر خطی را به دست آورد و یا مدلی برای این که هاله ماده تاریک چگونه تحول می‌یابد ارائه دهد؛ که دو مورد اخیر توسط فرمالیسم پرس-شکتر قابل محاسبه است، هر چند که از نقطه نظر ریاضیاتی قوت فرمالیسم قله‌ها را ندارد [۲۸].

میدان تباین چگالی $\delta(x)$ را در نظر بگیرید که توسط تابع پنجره‌ای با طول مشخصه R یعنی $W(x; R)$ فیلتر شده باشد، آن را $\delta(x; R)$ می‌نامیم که از رابطه زیر به دست می‌آید:

۲. Singular

۱. Mass function

آستانه σv برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{N}_{peak}(v)dv = \langle \delta_D(\delta/\sigma - v) | \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 | \Theta(\Lambda_3) \delta_D(\eta) \rangle dv, \quad (20)$$

مقدار تحلیلی رابطه فوق برای قله‌های بلند ($v \gg 1$) برابر است با [۱۷]:

$$\mathcal{N}_{peak}(v)dv = \frac{(\sigma_2^2 / 3\sigma_1^2)^{3/2}}{(2\pi)^2} (v^3 - 3v) e^{-v^2/2} dv, \quad (21)$$

همان طور که در BBKS نشان داده شد، میدان تباین چگالی را با $\delta(x)$ نشان می‌دهیم، میدان زمینه $\delta_b(x)$ می‌نامیم که با تابع پنجره کروی بزرگی به شعاع R_b هموار شده است. میدان هموار شده‌ای را که قصد داریم قله‌های میدان تباین چگالی را به کمک آنها نشان دهیم $\delta_s(x)$ می‌نامیم که با تابع پنجره ای با طول مشخصه R_s هموار شده است. چگالی تعداد قله‌هایی با ارتفاع $(\delta_s/\sigma_s) = v_s$ در میدان تصادفی δ_s که بر روی زمینه‌ای به ارتفاع $(\delta_b/\sigma_b) = v_b$ قرار دارند برابر است با [۱۷]:

$$\mathcal{N}_{peak}(v_s | v_b) dv_s = \frac{\mathcal{N}_{peak}(v_s, v_b) dv_s dv_b}{P(v_b) dv_b}, \quad (22)$$

و تباین چگالی قله‌هایی که ارتفاع v_s در زمینه v_b دارند با در نظر گرفتن انبساط جهان به این صورت قابل تعریف است:

$$\delta_{peak}(v_s | v_b) = \frac{\mathcal{N}(v_s | v_b) V_L}{\mathcal{N}(v_s) V_E} - 1, \quad (23)$$

که آن $V_L \propto R_b^3$ که حجم زمینه در فضای لاگرانژی است، V_E فضای اویلری است، با توجه به تعریف تباین چگالی می‌توان گفت که $V_L/V_E = (1 + \delta_b)$ در نتیجه تباین چگالی تعداد قله‌ها برابر خواهد شد با:

$$\delta_{peak}(v_s | v_b) = b_{peak}(\delta_s; R_s) \delta_b, \quad (24)$$

$$b(\delta_s; R_s) = 1 + \frac{(v_s^2 - g_1)}{\delta_s},$$

که به ازای $v_s \gg 1$ داریم $v_s/\sigma_s \approx b_{pk}(\delta_s; R_s)$ و در نتیجه تابع همبستگی به ازای $v_s \gg 1$ برابر خواهد بود با [۱۷ و ۲۸]:

$$C_{peak} = b^2 C, \quad b = (v_s/\sigma_s), \quad (25)$$

برای شمارش تعداد نقاط بحرانی که بیش از مقدار خاصی باشد کافی است که قید مربوط به نقطه اکسترموم مربوطه را در $\langle \dots \rangle$ قرار دهیم. برای تعیین نوع نقطه بحرانی بایستی آزمون مشتق اول و دوم را انجام دهیم. مشتق اول بایستی در نقطه بحرانی صفر باشد، نوع نقطه بحرانی با آزمون مشتق دوم مشخص می‌شود. برای این کار بایستی ماتریس هسیان را تشکیل دهیم، در صورتی که ویژه مقادیر این ماتریس Λ_i همه منفی باشند، پیشینه موضعی داریم، برای حالتی که $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ قید مربوط به قله‌ها خواهد بود:

$$n_{max, 3D}(v) = -\langle \det(\nabla_i \nabla_j x) \delta_D(\nabla x) \Theta(-\Lambda_1) \Theta(x-v) \rangle, \quad (26)$$

که در آن Θ تابع پله و δ_D تابع دلتای دیراک است. در صورتی که ویژه مقادیر هم علامت نباشند نقطه بحرانی، نقطه زینی است، باز هم در صورتی که $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ و در صورتی که شاخص ۳ را مربوط به راستای مربوط راستای دید بدانیم برای نقاط زینی رشته‌ای^۱ و دیوارگونه^۲ به ترتیب عبارتند از:

$$n_{sad(filaments), 3D}(v) = +\langle \det(\nabla_i \nabla_j x) \delta_D(\nabla x) \Theta(-\Lambda_1) \Theta(x-v) \rangle, \quad (27)$$

$$n_{sad(wall-like), 3D}(v) = -\langle \det(\nabla_i \nabla_j x) \delta_D(\nabla x) \Theta(-\Lambda_1) \Theta(x-v) \rangle, \quad (28)$$

در مورد نقاط کمینه موضعی بایستی ویژه مقادیر مثبت باشند، و قید کمینه برابر خواهد بود با [۱]:

$$n_{min, 3D}(v) = +\langle \det(\nabla_i \nabla_j x) \delta_D(\nabla x) \Theta(-\Lambda_1) \Theta(x-v) \rangle. \quad (29)$$

تا اینجا فرمالسیم محاسبه اکسترم‌های موضعی در یک میدان تصادفی همگن و همسانگرد تبیین شد. در بخش بعد قصد داریم ارتباط تابع همبستگی دوقطه‌ای بی‌وزن قله‌ها را با تابع همبستگی وزن‌دار برقرار کنیم.

۴. سویدگی دو بُعدی ناهمسانگرد به کمک فرمالیسم قله‌ها

این مفهوم در کیهان‌شناسی در مطالعات مربوط به ساختارهای بزرگ مقیاس متولد شد؛ این میدان‌ها در سه بعد تعریف

۱. Filamentary

۲. Wall-Like

$$\begin{aligned}\zeta_{11} &\rightarrow \gamma_{11} = \zeta_{11} + (\alpha\sigma_1^2)/\sigma^2, \\ \zeta_{22} &\rightarrow \gamma_{22} = \zeta_{22} + (\alpha\sigma_2^2)/\sigma^2, \\ \langle \gamma_{ii} \rangle &= \epsilon_i^2 \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} = \mu_i^2 \quad \text{and } i = 1, 2, \\ \langle \gamma_{ii}\gamma_{jj} \rangle &= \kappa_{ij}^2 - \frac{\sigma_i^2\sigma_j^2}{\sigma^2} = \nu_{ij}^2 \quad \text{and } i, j = 1, 2, \\ x &= \gamma_{11}, \\ y &= \gamma_{22} - \frac{\nu_{12}^2}{\mu_1^2} \gamma_{11},\end{aligned}\quad (43)$$

در این دستگاه جدید تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\langle xy \rangle &= 0, \quad \langle \alpha x \rangle = 0, \quad \langle \alpha y \rangle = 0, \\ \langle x^2 \rangle &= \mu_1^2 \equiv \sigma_x^2, \\ \langle y^2 \rangle &= \mu_1^2 + \frac{\nu_{12}^2\mu_1^2}{\mu_1^4} - \frac{2\nu_{12}^2}{\mu_1^2} \equiv \sigma_y^2,\end{aligned}\quad (44)$$

در این مختصات جدید بردار هموردا برابر است با:

$$\delta = (\alpha, \eta_1, \eta_2, x, y, \zeta_{12}), \quad (45)$$

اکنون می‌توان تابع توزیع چند متغیره را تشکیل داد. برای محاسبه سوییذگی نیازمند تابع توزیع دو نقطه‌ای هستیم. برای این کار باید ماتریس هموردای دو نقطه‌ای را تعریف کنیم. این ماتریس همانند ماتریس تک نقطه‌ای با این تفاوت است که هر درایه ماتریس تک نقطه‌ای، به چهار درایه که حالت‌های مختلف دو نقطه مختلف را نشان می‌دهد، تبدیل می‌شود؛ یعنی داریم:

$$\langle \alpha(r)\alpha(r) \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \langle \alpha(r_1)\alpha(r_1) \rangle & \langle \alpha(r_1)\alpha(r_2) \rangle \\ \langle \alpha(r_2)\alpha(r_1) \rangle & \langle \alpha(r_2)\alpha(r_2) \rangle \end{pmatrix}. \quad (46)$$

۲.۴. سوییذگی

همان طور که دیدیم تابع توزیع وزن‌دار و بی‌وزن در حد فواصل زیاد، به کمک عامل سوییذگی با یکدیگر مرتبط می‌شوند، یعنی:

$$b^2 = \frac{R_1/R_2P-1}{C(r_1, r_2)} \quad \text{for } |r_1 - r_2| \gg 1. \quad (46)$$

توابع توزیع را با داشتن ماتریس هموردا می‌توان محاسبه کرد. کافی است که احتمال تجمعی قله‌هایی که ارتفاع بیش از مقدار آستانه خاصی، برای مثال ν دارند را حساب کنیم. از آنجا که این محاسبه به صورت تحلیلی ممکن نیست بایستی متوسل به روش‌های عددی شویم. البته برای حالتی که قله‌های میدان

می‌شوند. اثرات ناهمسانگردی معمولاً در راستای دید تأثیر خود را نشان می‌دهند. در اینجا ابتدا محاسبات را در دو بعد انجام می‌دهیم؛ این کار از حجم محاسبات می‌کاهد. برای این منظور ابتدا بردار هموردا را تعریف می‌کنیم:

$$\delta = (\alpha, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{12}), \quad (30)$$

در عبارت بالا شاخص‌ها نمایانگر مشتقات معمولی از درایه‌ها در راستاهای مرتبط هستند. درایه‌های ماتریس هموردا عبارتند از:

$$\langle \alpha\alpha_{,i} \rangle = 0, \quad (31)$$

$$\langle \alpha\alpha_{,ij} \rangle \propto \delta_{ij}, \quad (32)$$

$$\langle \alpha_{,i}\alpha_{,j} \rangle = -\langle \alpha\alpha_{,ij} \rangle, \quad (33)$$

$$\langle \alpha_{,i}\alpha_{,kj} \rangle = 0, \quad (34)$$

$$\langle \alpha_{,ij}\alpha_{,kl} \rangle \propto (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (35)$$

از این پس نمایش زیر را برای مشتقات میدان در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_{,i} = \eta_i, \quad \alpha_{,ij} = \zeta_{ij}, \quad (36)$$

ناهمسانگردی از نابرابر قرار دادن مشتقات در راستاهای مختلف مدل ناشی شده است. برای مثال:

$$\langle \alpha\eta_i \rangle \neq \langle \alpha\eta_j \rangle. \quad (37)$$

از آنجا که ناهمسانگردی به صورت کلی فرض شده است بهتر است مقادیر زیر را این گونه تعریف کنیم:

$$\langle \alpha^2 \rangle \equiv \sigma_\alpha^2, \quad (38)$$

$$\langle \eta_1^2 \rangle \equiv \sigma_1^2, \quad (39)$$

$$\langle \eta_2^2 \rangle \equiv \sigma_2^2, \quad (40)$$

با استفاده از معادلات (۳۳)، (۳۹) و (۴۰) تعریف می‌کنیم:

$$\langle \alpha\zeta_{11} \rangle \equiv -\sigma_1^2, \quad \langle \alpha\zeta_{22} \rangle \equiv -\sigma_2^2, \quad (41)$$

سایر مولفه‌های غیر صفر ماتریس هموردا را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\langle \zeta_{11}^2 \rangle &\equiv \epsilon_1^2, \quad \langle \zeta_{22}^2 \rangle \equiv \epsilon_2^2, \\ \langle \zeta_{12}^2 \rangle &\equiv \sigma_{12}^2, \quad \langle \zeta_{11}\zeta_{22} \rangle \equiv \kappa_{12}^2.\end{aligned}\quad (42)$$

۱.۴. قطری سازی

برای محاسبه تابع توزیع به معکوس ماتریس هموردا و دترمینان آن نیاز داریم. برای قطری سازی تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^6 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6^2}} \left[\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2} \times \sqrt{(2\pi)^6 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6^2} \times \frac{\sigma^2}{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\sigma^6} \left[\frac{\nu}{\sigma} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) + \left(\frac{\sigma \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right)}{2\nu} \right) \right] \right] \times \sqrt{(2\pi)^6 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6^2} - \sqrt{(2\pi)^6 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6^2} \times \frac{\sigma^2}{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) \quad (49)$$

و برای حالت دو نقطه‌ای خواهیم داشت:

$$P_2 = \frac{1}{(2\pi)^6 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4^2 \sigma_5^2 \sigma_6^2} \times \left[\frac{\sigma^2}{\nu^2} \exp\left(-\frac{\nu^2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-C\nu^2}{\sigma^2}\right) \times \frac{\nu_1^2}{\mu_1^2} \times \sigma_x^2 \times \left(\frac{2\pi + 4\pi C_x^2}{(1-C_x)^{5/2}} \right) \times \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_1^2}} \right) \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_y^2}} \right) \sigma_y^2 \sigma_1^2 \right] \times \sigma^2 \left[\frac{\nu}{\sigma} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{C\nu}{2\sigma^2}\right) + \left(\frac{\sigma \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{C\nu}{2\sigma^2}\right)}{2\nu} \right) \right] \times \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma^4} + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4^2 \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_x^2}} \right) \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_y^2}} \right) \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_1^2}} \right) - \frac{\sigma^2}{\nu^2} \exp\left(-\frac{\nu^2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-C\nu^2}{\sigma^2}\right) \sigma_1^2 \left(\frac{2\pi + 4\pi C_1^2}{(1-C_1)^{5/2}} \right) + \sigma_x^2 \sigma_y^2 \times \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_x^2}} \right) \left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-C_y^2}} \right) + \dots \right] \quad (50)$$

ضروری است، محاسبه سویدگی در دو بعد به ما نشان داد که جملاتی که مربوط به ابعاد بالاتر می‌شود به صورت ضرایب جمله غالب ظاهر می‌شود که این امر کار ما را برای محاسبه عامل سویدگی در ابعاد بالاتر ساده می‌کند؛ زیرا جملاتی که مربوط به ابعاد بالاتر هستند به صورت ضرایبی در جمله غالب ظاهر می‌شوند. در واقع تنها کافی است تبدیلی را که ماتریس هموردا را قطری می‌کند بیابیم. در این حالت بردار هموردا برابر است با:

$$\delta = (\alpha, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}) \quad (52)$$

همانند حالت دو بعدی خواهیم داشت:

تصادفی بسیار بلند باشند، یعنی داشته باشیم $\nu/\sigma \gg 1$ می‌توان چگالی تعداد قله‌ها را با تابع مشخصه اویلر تقریب زد [۴]، یعنی:

$$n_{peak} \approx \chi_{2D} \quad (47)$$

با متغیرهایی که تعریف کردیم قید تابع مشخصه اویلر به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\chi_{2D} = \left\langle \Theta(\alpha - \nu) \left(x - \frac{\alpha \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(y - \frac{\alpha \sigma_1^2}{\sigma^2} + \frac{\nu_1^2}{\mu_1^2} - \zeta_{12}^2 \right) \delta_D(\eta) \right\rangle \quad (48)$$

حال با محاسبه احتمال‌های تجمعی برای تابع مشخصه اویلر به جای قید قله‌ها، برای حالت تک نقطه‌ای خواهیم داشت:

البته چون محاسبات در حد $\frac{\nu}{\sigma} \gg 1$ انجام می‌شود نیازی نیست که همه جملات را در نظر بگیریم؛ برای مثال در P_1 جمله غالب $\frac{\nu}{\sigma} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) \dots$ است. با این فرض‌ها عامل سویدگی در دو بعد در یک میدان ناهمسانگرد گوسی برابر است با:

$$b^2 = \frac{\nu^2}{\sigma^2 \sqrt{(1-C_x^2/\sigma_x^2)(1-C_y^2/\sigma_y^2)(1-C_{12}^2/\sigma_{12}^2)}} \quad (51)$$

۵. سویدگی سه‌بعدی ناهمسانگرد به کمک

فرمالیسم قله‌ها

تعمیم به سه بعد به خاطر هدف اصلی معرفی سویدگی

$$x = \gamma_{11}, \quad y = \gamma_{22} - \frac{\kappa_{12}^2}{\kappa_{13}^2} \gamma_{33} - \frac{\alpha}{\sigma^2}, \quad (55)$$

$$z = -\frac{\epsilon_1^2}{\kappa_{12}^2} \gamma_{22} + \gamma_{11} + \alpha \left(\frac{\epsilon_1^2 \kappa_{13}^2}{\kappa_{12}^2} - \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2}{\kappa_{12}^2} \right),$$

برای متغیرهای جدید تعریف می‌کنیم:

$$\langle x^2 \rangle \equiv \sigma_x^2, \quad \langle y^2 \rangle \equiv \sigma_y^2, \quad \langle z^2 \rangle \equiv \sigma_z^2 \quad (56)$$

به کمک متغیرهای جدید ماتریس هموردا قطری خواهد شد. با انجام محاسبات مانند حالت دو بُعدی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &\equiv \sigma^2, \quad \langle \eta_1^2 \rangle \equiv \sigma_1^2, \quad \langle \eta_2^2 \rangle \equiv \sigma_2^2, \quad \langle \eta_3^2 \rangle \equiv \sigma_3^2, \\ \zeta_{11} &\rightarrow \gamma_{11} = \zeta_{11} + (\alpha \sigma_1^2) / \sigma^2, \\ \zeta_{22} &\rightarrow \gamma_{22} = \zeta_{22} + (\alpha \sigma_2^2) / \sigma^2, \\ \zeta_{33} &\rightarrow \gamma_{33} = \zeta_{33} + (\alpha \sigma_3^2) / \sigma^2, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{11}^2 \rangle &\equiv \epsilon_1^2, \quad \langle \gamma_{22}^2 \rangle \equiv \epsilon_2^2, \quad \langle \gamma_{33}^2 \rangle \equiv \epsilon_3^2, \\ \langle \zeta_{12}^2 \rangle &\equiv \sigma_{12}^2, \quad \langle \zeta_{13}^2 \rangle \equiv \sigma_{13}^2, \quad \langle \zeta_{23}^2 \rangle \equiv \sigma_{23}^2, \end{aligned}$$

و عناصر غیر قطری غیر صفر عبارتند از:

$$\langle \gamma_{11} \gamma_{22} \rangle \equiv \kappa_{12}^2, \quad \langle \gamma_{11} \gamma_{33} \rangle \equiv \kappa_{13}^2, \quad \langle \gamma_{22} \gamma_{33} \rangle \equiv \kappa_{23}^2, \quad (54)$$

با تبدیلات زیر می‌توانیم عناصر غیر قطری را صفر کنیم:

$$b^2 = \frac{\nu^2}{\sigma^2 \sqrt{(1 - C_x^2 / \sigma_x^2)(1 - C_y^2 / \sigma_y^2)(1 - C_z^2 / \sigma_z^2)(1 - C_{12}^2 / \sigma_{12}^2)(1 - C_{13}^2 / \sigma_{13}^2)(1 - C_{23}^2 / \sigma_{23}^2)}}, \quad (57)$$

راستای w به ازای مقادیر $\xi_w = 50^\circ$ و $\xi_w = 30^\circ$ و $\xi_w = 50^\circ$ را نشان می‌دهد.

۲.۶. تطابق نظریه و شبیه‌سازی

در این قسمت برای طول همبستگی‌های مختلف تطابق محاسبات و شبیه‌سازی را بررسی می‌کنیم. همان طور که دیدیم فرض اصلی در محاسبات $\nu / \sigma \gg 1$ بوده پس انتظار داریم که به ازای ν بزرگ منحنی نظری و عددی بر هم منطبق شود. در ادامه به ازای طول همبستگی‌های مختلف مطابقت نمودارهای نظری و عددی را بررسی می‌کنیم. برای طول‌های همبستگی $\xi_w = 50^\circ$ و $\xi_w = 30^\circ$ و $\xi_w = 50^\circ$ نتیجه در شکل‌های ۴ تا ۷ نمایش داده شده است. همان طور که پیداست به ازای ν بزرگ بین نتایج عددی (نقاط توپُر) و نظری (خط پیوسته) تطابق وجود دارد. خطاها هم در همین حد بزرگ می‌شوند؛ دلیل این موضوع هم کاهش جفت قله‌های مرتفع در نتیجه افزایش خطای آماری مربوطه است.

۷. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله عامل سوییذگی را به صورت تحلیلی به کمک مدل قله‌ها برای یک میدان تصادفی ناهمسانگرد محاسبه کردیم؛ عامل سوییذگی کمیتی بود که خوشگی بیشتر کهکشان‌ها را نسبت به جرم ماده زمینه مدل می‌کند. به بیانی دیگر در مورد

۶. شبیه‌سازی و مطالعه عددی

در این قسمت سعی داریم که روابط به دست آمده را برای یک میدان تصادفی که به صورت مصنوعی شبیه‌سازی شده، با نتایج عددی مقایسه کنیم. در این قسمت میدان‌های تصادفی دو بُعدی هستند. میدان‌های تصادفی ناهمسانگردی که شبیه‌سازی می‌کنیم دارای طیف توان ناهمسانگرد زیر هستند:

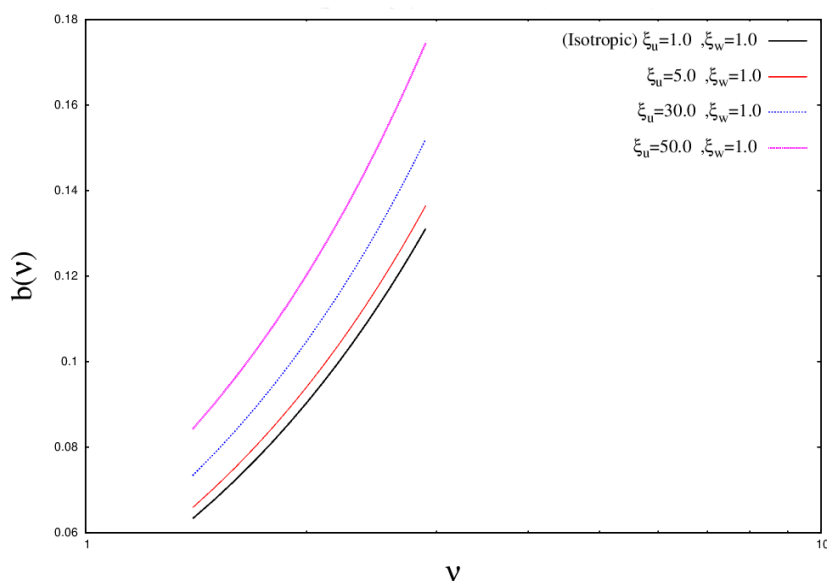
$$S^{(2D)}(k) = \frac{4\pi\gamma\sigma_c^2 k_c^{\gamma} \xi_u \xi_w}{L [k_c^2 + \xi_u^2 k_u^2 + \xi_w^2 k_w^2]^{\gamma+1}}, \quad (58)$$

که در آن ξ_u و ξ_w طول‌های همبستگی در دو راستای عمود بر هم، w ، u ، k_c بردار موج قطع و γ نمای مقیاس^{۱۳} و σ_c واریانس میدان تصادفی و L اندازه میدان است. در اینجا با تغییر طول همبستگی ناهمسانگردی در میدان تصادفی ایجاد می‌شود. همچنین به علت تقارن بین دو طول همبستگی در صورتی که $\xi_u = A$ و $\xi_w = B$ با این که $\xi_w = A$ و $\xi_u = B$ تفاوتی وجود ندارد. در ادامه با تغییر یکی از طول‌های همبستگی ناهمسانگردی ایجاد می‌کنیم [۹]. ابعاد نقشه‌های شبیه‌سازی شده 1024×1024 است، با مقدار بردار موج قطع $k_c = 0.09$ و نمای مقیاس $\gamma = 10$ در نظر گرفته شده است. باقی متغیرها مثل طول‌های همبستگی بعداً طی محاسبه جایگذاری می‌شوند.

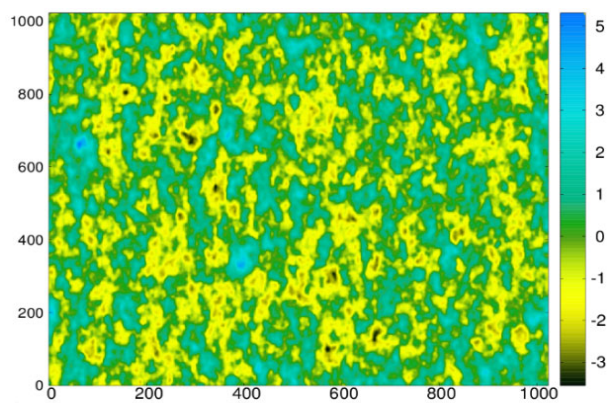
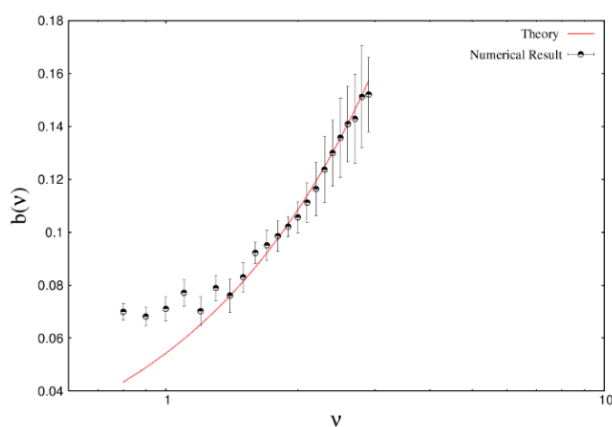
۱.۶. حساسیت رابطه نظری برای ناهمسانگردی‌های مختلف

شکل ۳ حساسیت رابطه نظری با تغییر طول همبستگی در

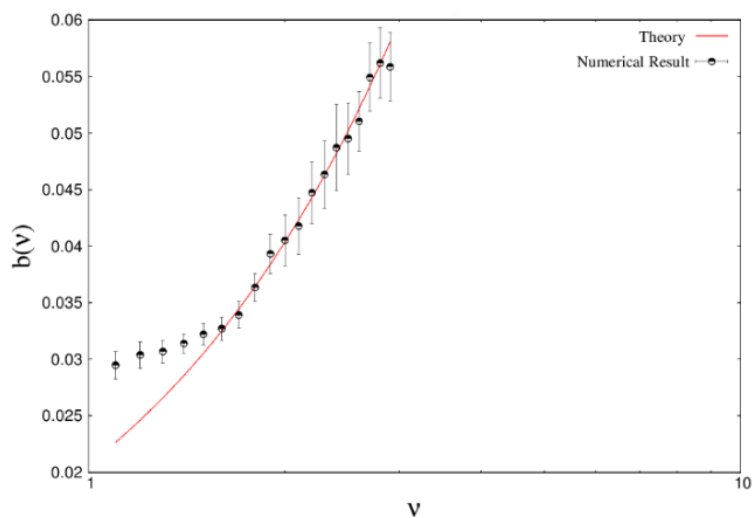
۱. scaling exponent



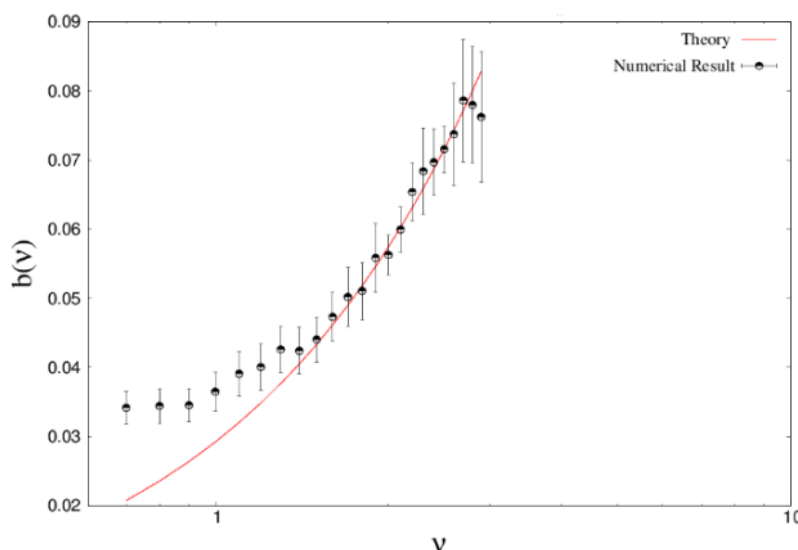
شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) حساسیت عامل سویدگی به تغییر طول همبستگی.



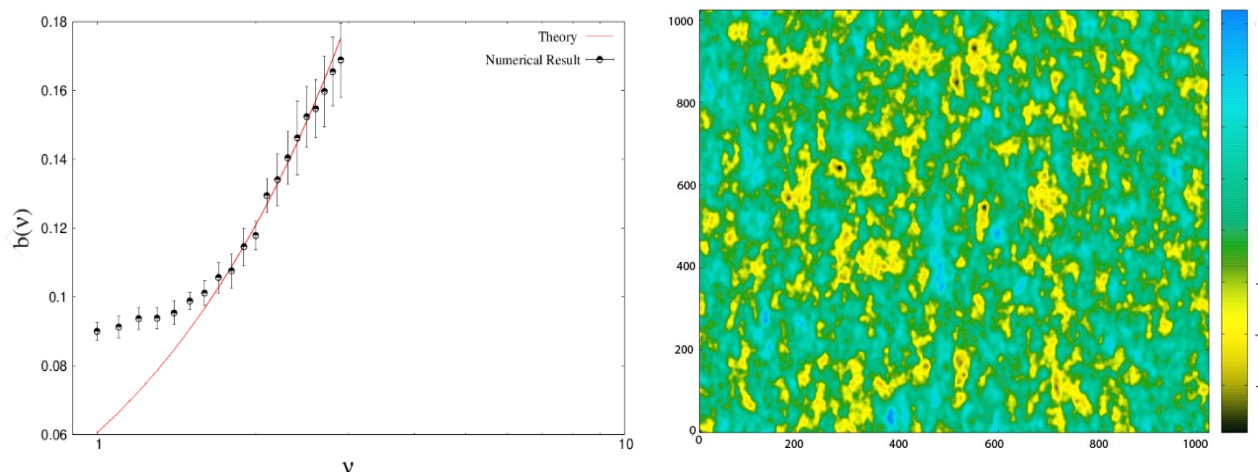
شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تطابق محاسبه تحلیلی و نتایج عددی در میدان همسانگرد با طول همبستگی $\xi_w = 1^\circ$ و $\xi_u = 1^\circ$.



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تطابق محاسبه تحلیلی و نتایج عددی در میدان ناهمسانگرد با طولهای همبستگی $\xi_w = 5^\circ$ و $\xi_u = 1^\circ$.



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تطابق محاسبه تحلیلی و نتایج عددی در میدان ناهمسانگرد با طول‌های همبستگی $\xi_w = 30\%$ و $\xi_u = 10\%$.



شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تطابق محاسبه تحلیلی و نتایج عددی در میدان ناهمسانگرد با طول‌های همبستگی $\xi_w = 50\%$ و $\xi_u = 10\%$.

قرار دادیم و نحوه تعریف سویدگی به کمک مفهوم آماری خوشگی مورد بحث قرار دادیم.

در قسمت بعدی عامل سویدگی ناهمسانگرد را به کمک روش‌هایی که در بخش‌های قبل معرفی شد در مدل قله‌ها برای میدان ناهمسانگرد گوسی تعیین کردیم و صحت روابط به دست آمده را با استفاده از روش‌های عددی و شبیه‌سازی میدان‌های تصادفی دو بعدی، تحقیق کردیم. نتایج نشان داد که محاسبات انجام شده تطابق خوبی با محاسبات عددی برای v بزرگ دارد. برای تکمیل کار می‌توان روابط به دست آمده را به مراتب بالاتری از غیرگوسی بودن، با در نظر گرفتن جملات غیر

فرایند جدایی قله و زمینه اشاره شد که طبق آن چگالی قله‌هایی که روی مناطق چگال‌تر هستند زودتر به میزان آستانه رسیده و زودتر رمبش می‌کنند. سپس به زبان ریاضیاتی به بررسی موضوع پرداختیم و دیدیم که چگونه به کمک مدل قله‌ها، روابط مربوط به سویدگی خطی را می‌توان استخراج کرد. سپس در مورد ناهمسانگردی در میدان‌های کیهانی گفته شد و به اختلالات سرخگرایی به عنوان عاملی که می‌تواند این ناهمسانگردی را در راستای دید در داده‌های به دست آمده در ساختارهای بزرگ مقیاس ایجاد کند اشاره کردیم، و نحوه مدل کردن این ناهمسانگردی را به صورت ریاضیاتی مورد بررسی

گوسی در تابع توزیع های تک نقطه ای و دو نقطه ای در رابطه (۴۷)، تعمیم داد، و کدهای مربوط به عامل سویدگی را به حالت سه بُعدی تعمیم داد و صحت روابط مربوط به سویدگی در سه بُعد را بررسی کرد. همچنین می توان نتایج به دست آمده در تحلیل داده های به دست آمده از مساحی های مربوط به ساختارهای بزرگ مقیاس و تابش زمینه کیهانی نیز مورد استفاده قرار گیرند.

قدردانی

نویسندگان از علیرضا وفایی صدر به دلیل مشارکت در انجام برخی از شبیه سازی ها تشکر و قدردانی می کنند.

مراجع

1. T Matsubara, *The Astrophysical Journal* **584**, 1 (2003) 1.
2. J M Bardeen, et al., *Astrophys. J.* 304.FERMILAB-PUB-85-148- A (1985) 15.
3. F Heavens, Alan, and K Ravi, Sheth. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **310**, 4 (1999) 1062.
4. S Codis, C C Pichon, D Pogosyan, F Bernardeau, and T Matsubara, *MNRAS*. (2013) 435.
5. P Pápai, and R K Sheth, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **429**, 2 (2012) 1133.
6. C Li, Y P Jing, A Faltenbacher, and J Wang, *The Astrophysical Journal Letters* **770**, 1 (2013) L12.
7. D J Schwarz, C J Copi, D Huterer, and G D Starkman, *Classical and Quantum Gravity* **33**, 18 (2016) 184001.
8. R M Bradley, *J. Vac. Sci. Technol. A* **6** (1988) 2390.
9. G Nezhadhighi, S M S Movahed, T Yasserli, and S M Vaez Allaei, *Journal of Applied Physics* **122** (2017) 085302.
10. Y P Zhao, H. N Yang, G C Wang, and T M Lu, *Phys. Rev. B* **57** (1998) 1922.
11. Y P Zhao, G C Wang, and T M Lu, *Phys. Rev. B* **58** (1998) 7300.
12. R Kree, T Yasserli, and A K Hartmann, *Nucl. Ins. Meth.in Phys. B* **267** (2009) 1407.
13. S O Rice and N Wax, "Statistical Properties of Random Noise Currents", Selected Papers on Noise and Stochastic Processes (New York:Dover) (1954).
14. W Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", **2** (1965) (New York: Wiley).
15. H D Politzer and M B Wise, *ApJ* **285** (1984) L1.
16. N Kaiser, *ApJ* **284** (1984) L9
17. J Bardeen, J R Bond, N Kaiser, and Szalay, *Acta Phys. Hung.* 62 FERMILAB-PUB-86-023-A (1986) 263.
18. T Mastsubara, *The Astrophysical Journal* **525**, 2 (1999) 543.
19. M S Taqqu, "Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete", **40**, 3 (1977) 203.
20. S D Landy and A S Szalay, *Astrophysical Journal*, Part 1, **412**, 1 (1964) 64.
21. V Desjacques, J Donghuli, and S Fabian, *Physics Reports* **733** (2018) 1
22. A Slosar, C Hirata, U Seljak, S Ho, and N Padmanabhan, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **08** (2008) 031.
23. S Baghran, M H Namjoo, and H Firouzjahi, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **08** (2013) 48.
24. V Desjacques, *Physical Review D* **78**, 10 (2008) 103503.
25. S Fabian, J Donghui, and V Desjacques, *PRD* **88** (2013) 023515.
26. M Davis, G Efstathiou, C S Frenk, and S D M White, *Astrophysical Journal*. **292**, 1 (1999) 371.
27. M Houjun, F Bosch, and S White, "Galaxy Formation and Evolution", Cambridge University Press (2010).