

دینامیک کوانتومی یک میدان کاواک دو مدی تغییر شکل یافته جفت شده با یک اتم دو ترازی در غیاب تقریب موج چرخان

محسن دایی محمد

گروه فیزیک، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد

پست الکترونیکی: M.Daeimohammad@pco.iaun.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۵/۲۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۸/۱۲)

چکیده

هدف در این مقاله، بررسی خواص دینامیکی یک میدان دو مدی تغییر شکل یافته جفت شده با یک اتم دو ترازی در غیاب تقریب موج چرخان است. در قسمت اول یک مدل نظری برای این نوع برهمکنش ارائه می‌شود. در قسمت دوم ماتریس چگالی کاهش یافته میدان در حضور و در غیاب تقریب موج چرخان به دست آورده می‌شود. سپس اثرات جملات پاد چرخان و پارامتر تغییر شکل با استفاده از روش‌های عددی روی آمار شمارش فوتون‌ها و همبستگی متقابل بین مدهای میدان و چلانگی کوادراتورهای میدان بررسی می‌شود و نشان می‌دهیم حتی در محدوده اعتبار تقریب موج چرخان (برهمکنش ضعیف)، اثرات جملات پاد چرخان روی خواص میدان بسیار مهم است.

واژه‌های کلیدی: مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته، تقریب موج چرخان، جملات پاد چرخان، فرایندهای فوتون‌های مجازی

۱. مقدمه

پارامترهای فیزیکی وجود دارد. برای مثال مدل جینز-کامینگز [۲] که برای برهمکنش یک اتم دو ترازی با یک میدان تک مدی استفاده می‌شود و تعمیم مدل جینز-کامینگز که برای برهمکنش یک اتم دو ترازی با یک میدان چند فوتونی و چند مدی استفاده می‌شود در غیاب تقریب موج چرخان به طور دقیق قابل حل خواهد بود [۳-۶]. در واقع این تقریب باعث حفظ بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مثل نابودی و احیای نوسانات وارونی جمعیت [۷ و ۸] و چلانگی میدان [۹] و غیره خواهد شد. برخی پیش‌بینی‌های این نظریه از طریق تجربی نیز

تقریب موج چرخان در بسیاری از مسایل اپتیک کوانتومی استفاده می‌شود. این یک روش معمول در اپتیک کوانتومی، فیزیک لیزر و دیگر پدیده‌های تشدید است [۱]. در واقع برای سادگی محاسبات، در بسیاری از موارد از جملاتی با نوسانات سریع (جملات پاد چرخان) صرف‌نظر می‌کنیم. در این حالت جملات پادچرخان که در واقع نشان دهنده گذارهای فوتون‌های مجازی هستند از هامیلتونی حذف می‌شوند. در این حالت هامیلتونی شکل ساده‌تری خواهد داشت و امکان محاسبه دقیق

تأیید شده‌اند [۱۰]. از طرف دیگر علی رغم این که تقریب موج چرخان تقریب بسیار خوبی است ولی امروزه بررسی اثرات جملات پادچرخان روی پارامترهای فیزیکی به شدت افزایش یافته است. دلیل این امر این است که این جملات (جملات پاد چرخان) علی‌رغم کوچکی سهم بسیار مهمی در پدیده‌های فیزیکی دارند. یکی از این پدیده‌های فیزیکی جابه‌جایی ترازهای اتمی است که در مرجع [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع فرایند فوتون‌های مجازی سرچشمه جابه‌جایی لمب است. نقش جملات پاد چرخان با استفاده از آشکارسازهای نوری در مراجع [۱۲-۱۴] بررسی شده است.

در مرجع [۱۲] یک روش جدید معرفی شده است که در آن با استفاده از تبدیلات کانونیک، جملات پاد چرخان و اثرات همبستگی مجازی از هامیلتونی برهمکنش اتم- میدان بدون این که احتیاج به تقریب موج چرخان داشته باشیم حذف می‌شود. اثرات فوتون‌های مجازی روی حالت‌های زمینه سامانه میدان- اتم در مرجع [۱۵] بررسی شده است و نشان داده شده است که جملات پاد چرخان بسیار مهم است و از فرایند جذب فوتون‌های مجازی نمی‌توان صرف‌نظر کرد. در مرجع [۱۶] نشان داده شده است که جملات پاد چرخان آستانه نوسانات لیزر را افزایش می‌دهد و باعث پهن‌شدگی توزیع تعداد فوتون‌های یک لیزر تک مدی می‌شود. نظریه آشوب یک سیستم N - اتمی که تحت تأثیر یک میدان قوی است در حضور جملات پاد چرخان در [۱۷] بررسی شده است.

در مرجع [۱۸] با استفاده از مدل جینز- کامینگز، اثرات فوتون‌های مجازی روی وارونی جمعیت و خواص فازی با استفاده از نظریه اختلال مورد بررسی قرار گرفته است. اعتبار تقریب موج چرخان در مسایل الکترودینامیکی کوانتومی مورد تجزیه قرار گرفته است و نشان داده شده است برای ذراتی با اسپین $1/2$ که در یک میدان مغناطیسی ثابت با قطبش دایره‌ای قرار گرفته‌اند و گشتاور دو قطبی در شرط گذار $\Delta m = 1$ صدق می‌کند تقریب موج چرخان لازم نیست [۱۹]. اگرچه برای یک سامانه دو تراز بدون ملاحظه قطبش میدان چنانچه در شرط گذار $\Delta m = 0$ صدق کند تقریب موج چرخان لازم است.

در مرجع [۱۹] یک روش تجربی برای صحت و سقم تقریب موج چرخان معرفی شده است. در سال‌های اخیر اعتبار تقریب موج چرخان در مدل جینز- کامینگز غیرخطی مورد تردید واقع شده است [۲۰] و به همین دلیل نیز مدل جینز- کامینگز غیر خطی بدون تقریب موج چرخان از نظر کیفی با مدل‌های با تقریب موج چرخان متفاوت است. به عبارت دیگر جملات پاد چرخان به شدت طبیعت سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در سال‌های اخیر با استفاده از نظریه اختلال اثرات جملات پادچرخان روی مدل جینز- کامینگز مورد بررسی قرار گرفته است [۲۱]. از طرف دیگر علی رغم این که مدل جینز- کامینگز یک مدل بسیار کارآمدی است با این وجود صورت‌بندی‌های تعمیم یافته آن که برای گذارهای دو فوتونی و یا چند فوتونی، کاواک‌های دومی یا سه مدی برای اتم‌های سه تراز، جفت شدگی‌های وابسته به شدت به کار می‌رود، امروزه به شدت مورد توجه قرار گرفته است [۲۲ و ۲۳]. مدل‌های ذکر شده در بالا توسط روش‌های جبری مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۲۴]. در واقع حل دقیق مدل جینز- کامینگز با استفاده از نظریه گروه‌های تعمیم یافته و جبر تعمیم یافته امکان‌پذیر است [۲۵].

در سال‌های اخیر در مدل جینز- کامینگز به جای عملگرهای خلق و نابودی معمولی از عملگرهای خلق و نابودی تغییرشکل یافته استفاده شده است [۲۶]. به طور مثال اثرات غیر خطی مانند اثر کر با استفاده از مدل جینز- کامینگز و نوسانگرهای تغییر شکل یافته f قابل بررسی است [۲۷]. در مرجع [۲۸] دینامیک کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ ساده تغییر شکل یافته در یک حمام گرمایی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین دینامیک کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ ساده در یک محیط تغییر شکل یافته در [۲۹] مورد بررسی قرار گرفته است، همچنین در [۳۰] بیناب نشری و فاز هندسی با استفاده از مدل جینز- کامینگز تغییرشکل یافته مورد بررسی قرار گرفته است.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش ۲ یک مدل نظری از برهمکنش بین میدان کاواک دو مدی و یک اتم دو تراز در چارچوب مدل جینز- کامینگز تغییرشکل یافته بدون تقریب موج چرخان معرفی می‌کنیم. در بخش ۳ ماتریس کاهش

از هامیلتونی (۱) می‌توان برای بررسی حرکت یک تک یون که در یک پتانسیل نوسانگر غیر هماهنگ به دام افتاده است [۳۲] و همچنین برای توصیف برهمکنش میان اتم و میدان با جفت‌شدگی وابسته به شدت استفاده کرد [۳۳]. با استفاده از رابطه (۲) هامیلتونی رابطه (۱) را می‌توان بر حسب عملگرهای غیر تغییر شکل یافته به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{H} = \sum_{i=1,r} \hbar \omega_i \hat{n}_i + \sum_{i=1,r} \hbar \hat{R}_i(\hat{n}_i) + \frac{\hbar}{r} \omega_z \hat{\sigma}_z + \hbar g \left(f_i(\hat{n}_i) f_r(\hat{n}_r) \hat{a}_i^+ \hat{a}_r + \hat{a}_r f_i(\hat{n}_i) f_r(\hat{n}_r) \right) (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-), \quad (4)$$

در اینجا $\hat{R}_i(\hat{n}_i) = \omega_i (f_i^r(\hat{n}_i) - 1) \hat{n}_i$ است. در واقع هامیلتونی بالا نشان دهنده نوعی برهمکنش اتم - میدان با جفت‌شدگی وابسته به شدت است که توسط $f_i(\hat{n}_i)$ توصیف می‌شود و میدان غیرخطی نیز توسط $\hat{R}_i(\hat{n}_i)$ توصیف می‌شود. در واقع هامیلتونی ۴ یا هم ارز آن هامیلتونی ۱ توصیف کننده جفت‌شدگی دو فوتونی وابسته به شدت بین یک اتم دو ترازوی و یک میدان دو مدی غیر تغییر شکل یافته در حضور دو برهمکنش غیر خطی اضافی $\hat{R}_i(\hat{n}_i), \hat{R}_r(\hat{n}_r)$ است. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $f_i(\hat{n}_i) = \sqrt{1 + k_i(\hat{n}_i - 1)}$ باشد، که در اینجا k_i یک ثابت مثبت است، این مدل نشان دهنده برهمکنش یک اتم دو ترازوی با یک میدان دو مدی با جفت‌شدگی وابسته به شدت در غیاب تقریب موج چرخان و در حضور دو محیط غیر خطی کر است [۳۴]. در اینجا k_i و k_r نشان دهنده خود گیری غیرخطی مرتبه سوم دو محیط کر هستند ($\chi_i = k_i \omega_i$).

۳. ماتریس چگالی کاهش یافته میدان درون کاواک

در غیاب و در حضور تقریب موج چرخان

در این بخش ماتریس چگالی کاهش یافته میدان درون کاواک در غیاب و در حضور تقریب موج چرخان به دست آورده می‌شود. برای این منظور ابتدا هامیلتونی معادله (۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\hat{H}_T = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1,r} \hbar \omega_i \hat{A}_i^+ \hat{A}_i + \frac{\hbar}{r} \omega_z \hat{\sigma}_z,$$

یافته میدان کاواک را برای دو حالت بدون و با تقریب موج چرخان به دست می‌آوریم. در بخش ۴ به بررسی اثرات جملات پادچرخان و پارامتر تغییر شکل یافته با استفاده از روش‌های عددی روی آمار شمارش فوتون‌ها، همبستگی متقابل بین مدهای میدان و چلانگی کوادراتورهای میدان می‌پردازیم. در بخش ۵ نتایج به دست آمده را می‌آوریم.

۲. مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی

غیر تبه‌گن بدون تقریب موج چرخان

هامیلتونی برهمکنش یک اتم دو ترازوی با یک میدان کاواک تغییر شکل یافته f توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\hat{H} = \sum_{i=1,r} \hbar \omega_i \hat{A}_i^+ \hat{A}_i + \frac{\hbar \omega_z}{r} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{A}_i^+ \hat{A}_r^+ + \hat{A}_i \hat{A}_r) (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-), \quad (1)$$

در اینجا ω_0 بسامد گذار اتمی، ω_1 و ω_2 بسامدهای مدهای میدان، $\hat{\sigma}^\pm (|2\rangle\langle 1|, |1\rangle\langle 2|)$ عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده اتمی، $\hat{\sigma}_z (|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|)$ عملگر وارونی جمعیت و g ثابت جفت‌شدگی میدان-اتم است. عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل یافته $\hat{A}_i^+, \hat{A}_i$ ($i=1,2$) توسط روابط زیر به عملگرهای خلق و نابودی غیر تغییر شکل یافته $\hat{a}_i^+, \hat{a}_i$ ($[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \delta_{ij}$) و عملگر تعداد $\hat{n}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i$ مرتبط می‌شوند:

$$\hat{A}_i = \hat{a}_i f_i(\hat{n}_i), \hat{A}_i^+ = f_i(\hat{n}_i) \hat{a}_i^+, \quad (2)$$

در رابطه (۲)، $f_i(\hat{n}_i)$ یک تابع حقیقی از عملگر تعداد $\hat{n}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i$ است. عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل در

روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند: $\hat{A}_i^+, \hat{A}_i$

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j^+] = \delta_{ij} \left\{ (\hat{n}_i + 1) f_i^r(\hat{n}_i + 1) - \hat{n}_i f_i^r(\hat{n}_i) \right\}$$

$$[\hat{A}_i, \hat{n}_j] = \delta_{ij} \hat{A}_i, \quad [\hat{A}_i^+, \hat{n}_j] = -\delta_{ij} \hat{A}_i^+, \quad (3)$$

در حالت $f_i(\hat{n}_i) = 1$ معادله (۱) به هامیلتونی مدل جینز-کامینگز دو فوتونی $f_i(\hat{n}_i) = 1$ تغییر شکل یافته در غیاب موج چرخان تبدیل می‌شود و جبر (۳) تبدیل به جبر هایزنبرگ-ویل با مولدهای $\hat{a}_i^+, \hat{a}_i, \hat{I}$ می‌شود [۳۱].

$$\left[\hat{A}_{I_l}^+(t_r) \hat{A}_{I_r}^+(t_r) + \hat{A}_{I_l}(t_r) \hat{A}_{I_r}(t_r) \right] \quad (10)$$

$$\left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_r} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_r} \right] + \dots,$$

ماتریس چگالی کل سیستم اتم و میدان $\hat{\rho}_I(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{\rho}_I(t) = \hat{U}_I(t) \hat{\rho}_I(0) \hat{U}_I^\dagger(t), \quad (11)$$

با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_I(t) = & \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t_1) dt_1 + \right. \\ & \left. \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) + \dots \right. \\ & \times \hat{\rho}_I(0) \left. \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t_1) dt_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) + \dots \right\} \right. \\ & = \left\{ 1 - ig \int_0^t dt_1 \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) + \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \right] \right. \\ & \left. \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_1} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_1} \right] \right. \\ & + \left(-ig \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) + \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \right] \\ & \left. \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_1} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_1} \right] \right. \\ & \times \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_2) \hat{A}_{I_r}^+(t_2) + \hat{A}_{I_l}(t_2) \hat{A}_{I_r}(t_2) \right] \\ & \left. \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_2} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_2} \right] + \dots \right\} \\ & \times \hat{\rho}_I(0) \left\{ 1 + ig \int_0^t dt_1 \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) + \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \right] \right. \\ & \left. \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_1} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_1} \right] \right. \\ & + \left(ig \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) + \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \right] \\ & \left. \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_1} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_1} \right] \right. \\ & \times \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_2) \hat{A}_{I_r}^+(t_2) + \hat{A}_{I_l}(t_2) \hat{A}_{I_r}(t_2) \right] \\ & \left. \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_2} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_2} \right] + \dots \right\} \\ & = \hat{\rho}_I(0) + g \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\begin{aligned} & \hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) \hat{\rho}_I(0) \hat{A}_{I_l}(t_2) \hat{A}_{I_r}(t_2) + \\ & \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \hat{\rho}_I(0) \hat{A}_{I_l}^+(t_2) \hat{A}_{I_r}^+(t_2) + \\ & \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \hat{\rho}_I(0) \hat{A}_{I_l}(t_2) \hat{A}_{I_r}(t_2) + \\ & \hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) \hat{\rho}_I(0) \hat{A}_{I_l}^+(t_2) \hat{A}_{I_r}^+(t_2) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\hat{H}' = \hbar g (\hat{A}_l^+ \hat{A}_r^+ + \hat{A}_l \hat{A}_r) (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-) \quad (5)$$

در تصویر برهمکنش داریم:

$$\hat{H}_I(t) = e^{\frac{i\hat{H}_s t}{\hbar}} \hat{H}' e^{-\frac{i\hat{H}_s t}{\hbar}} = \hbar g [\hat{A}_{I_l}^+(t) \hat{A}_{I_r}^+(t) + \hat{A}_{I_l}(t) \hat{A}_{I_r}(t)] [\hat{\sigma}_I^+(t) + \hat{\sigma}_I^-(t)], \quad (6)$$

در رابطه فوق تعریف کرده ایم:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{I_l}(t) &= e^{i(\omega_l \hat{A}_l^+ \hat{A}_l + \omega_r \hat{A}_r^+ \hat{A}_r)} t \hat{A}_l e^{-i(\omega_l \hat{A}_l^+ \hat{A}_l + \omega_r \hat{A}_r^+ \hat{A}_r)} t \\ \hat{A}_{I_r}(t) &= e^{i(\omega_l \hat{A}_l^+ \hat{A}_l + \omega_r \hat{A}_r^+ \hat{A}_r)} t \hat{A}_r e^{-i(\omega_l \hat{A}_l^+ \hat{A}_l + \omega_r \hat{A}_r^+ \hat{A}_r)} t \\ \hat{\sigma}_I^+(t) &= e^{\frac{i\omega_z \sigma_z t}{2}} \hat{\sigma}^+ e^{-\frac{i\omega_z \sigma_z t}{2}} = \hat{\sigma}^+ e^{i\omega t} \\ \hat{\sigma}_I^-(t) &= e^{\frac{i\omega_z \sigma_z t}{2}} \hat{\sigma}^- e^{-\frac{i\omega_z \sigma_z t}{2}} = \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (7)$$

در اینجا از رابطه $[\hat{\sigma}_\pm, \hat{\sigma}_z] = \mp 2\hat{\sigma}_\pm$ و بسط زیر استفاده کرده ایم [۳۵]:

$$\exp(\alpha \hat{A}) \hat{B} \exp(-\alpha \hat{A}) = \hat{B} + \alpha [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (8)$$

عملگر تحول زمانی در تصویر برهمکنش به صورت زیر است:

$$\hat{U}_I(t, 0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t_1) dt_1 \right], \quad (9)$$

در اینجا عملگر مرتب کننده زمان است به طوری که عبارت (۹) را می توان به شکل زیر بسط داد.

$$\begin{aligned} T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t_1) dt_1 \right] \\ = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t_1) dt_1 + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) + \dots \\ + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_3) + \dots \\ = 1 - ig \int_0^t dt_1 \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) + \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \right] \\ \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_1} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_1} \right] \\ + \left(-ig \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I_l}^+(t_1) \hat{A}_{I_r}^+(t_1) + \hat{A}_{I_l}(t_1) \hat{A}_{I_r}(t_1) \right] \\ \left[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega t_1} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t_1} \right] \end{aligned}$$

ترازی در ابتدا در برهمه‌ی همدوسی از حالت برانگیخته $|r\rangle$ و حالت زمینه $|l\rangle$ باشد می‌توان نوشت:

$$\hat{\rho}_a(\circ) = |\psi\rangle_{aa} \langle\psi| = \sum_{\ell, k=1, r} C'_\ell C_k^* |\ell\rangle \langle k|, \quad (15)$$

$$|C'_l|^r + |C'_r|^r = 1,$$

با استفاده از رابطه (۱۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Tr_a [\hat{\rho}_a \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-] &= \langle l | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- | l \rangle + \langle r | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- | r \rangle \\ &= \langle l | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | \} \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- | l \rangle, \\ &+ \langle r | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- | r \rangle = |C'_l|^r, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Tr_a [\hat{\rho}_a \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+] &= \langle l | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ | l \rangle + \langle r | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ | r \rangle \\ &= \langle l | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ | l \rangle, \\ &+ \langle r | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ | r \rangle = |C'_l|^r, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Tr_a [\hat{\rho}_a \hat{\sigma}^+] &= \langle l | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^+ | l \rangle + \langle r | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^+ | r \rangle \\ &= \langle l | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^+ | l \rangle \\ &+ \langle r | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^+ | r \rangle = C'_l C_r^*, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Tr_a [\hat{\rho}_a \hat{\sigma}^-] &= \langle l | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^- | l \rangle + \langle r | \hat{\rho}_a \hat{\sigma}^- | r \rangle \\ &= \langle l | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^- | l \rangle \\ &+ \langle r | \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \hat{\sigma}^- | r \rangle = C'_l C_r^*, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Tr_a [\hat{\sigma}^+ \hat{\rho}_a] &= \langle l | \hat{\sigma}^+ \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \\ &+ \langle r | \hat{\sigma}^+ \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \\ &= C'_l C_r^*, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Tr_a [\hat{\sigma}^- \hat{\rho}_a] &= \langle l | \hat{\sigma}^- \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \\ &+ \langle r | \hat{\sigma}^- \{ C'_l C_r^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_l^* | r \rangle \langle l | + C'_l C_l^* | l \rangle \langle r | + C'_r C_r^* | r \rangle \langle r | \} \\ &= C'_l C_r^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times [\hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_l(t_r - t_l)} + \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_l(t_r - t_l)}] \\ &+ ig \hat{\rho}_I(\circ) \int_0^t dt_r [\hat{A}_{I_l}^+(t_r) \hat{A}_{I_r}^+(t_r) + \hat{A}_{I_l}(t_r) \hat{A}_{I_r}(t_r)] \\ &[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega_l t_r} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_l t_r}] \\ &- ig \int_0^t dt_l [\hat{A}_{I_l}^+(t_l) \hat{A}_{I_r}^+(t_l) + \hat{A}_{I_l}(t_l) \hat{A}_{I_r}(t_l)] \\ &[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega_l t_l} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_l t_l}] \hat{\rho}_I(\circ) + O(g^r) + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

در اینجا ما از روابط $(\hat{\sigma}^+)^r = (\hat{\sigma}^-)^r = \circ, \hat{H}_I(t) = \hat{H}_I^+(t)$ استفاده کرده‌ایم. به دلیل این که در محاسبات عددی که در بخش چهار انجام می‌دهیم، ثابت جفت‌شدگی را کوچک فرض می‌کنیم $\left(\frac{g}{\omega_l} = \circ/\circ\right)$. در اینجا از جملات از مرتبه g^r و بالاتر صرف نظر می‌کنیم. حال می‌توانیم ماتریس چگالی کاهش یافته میدان درون کاواک را با رد جزیی گرفتن از ماتریس چگالی کل روی حالت‌های اتمی به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_f(t) &= Tr_a [\hat{\rho}_I(t)] = \langle l | \hat{\rho}_I(t) | l \rangle + \langle r | \hat{\rho}_I(t) | r \rangle = Tr_a [\hat{\rho}_I(\circ)] \\ &+ g^r \int_0^t dt_r \int_0^t dt_l \left\{ \begin{aligned} &Tr_a [\hat{A}_{I_l}^+(t_l) \hat{A}_{I_r}^+(t_l) \hat{\rho}_I(\circ) \hat{A}_{I_l}(t_l) \hat{A}_{I_r}(t_r)] + \\ &Tr_a [\hat{A}_{I_l}(t_l) \hat{A}_{I_r}(t_l) \hat{\rho}_I(\circ) \hat{A}_{I_l}^+(t_l) \hat{A}_{I_r}^+(t_r)] + \\ &Tr_a [\hat{A}_{I_l}(t_l) \hat{A}_{I_r}(t_l) \hat{\rho}_I(\circ) \hat{A}_{I_l}(t_l) \hat{A}_{I_r}(t_r)] + \\ &Tr_a [\hat{A}_{I_l}^+(t_l) \hat{A}_{I_r}^+(t_l) \hat{\rho}_I(\circ) \hat{A}_{I_l}^+(t_l) \hat{A}_{I_r}^+(t_r)] \end{aligned} \right\} \\ &\times [\hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_l(t_r - t_l)} + \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_l(t_r - t_l)}] \\ &+ ig Tr_a \{ \hat{\rho}_I(\circ) \int_0^t dt_r [\hat{A}_{I_l}^+(t_r) \hat{A}_{I_r}^+(t_r) + \hat{A}_{I_l}(t_r) \hat{A}_{I_r}(t_r)] \\ &[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega_l t_r} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_l t_r}] \\ &- ig \int_0^t dt_l [\hat{A}_{I_l}^+(t_l) \hat{A}_{I_r}^+(t_l) + \hat{A}_{I_l}(t_l) \hat{A}_{I_r}(t_l)] \\ &[\hat{\sigma}^+ e^{i\omega_l t_l} + \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_l t_l}] \hat{\rho}_I(\circ) + O(g^r) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

به دلیل این که در لحظه اولیه بین اتم و میدان برهم کنشی وجود ندارد برای ماتریس چگالی کل اتم و میدان در لحظه اولیه می‌توان نوشت:

$$\hat{\rho}_I(\circ) = \hat{\rho}_a(\circ) \otimes \hat{\rho}_f(\circ), \quad (14)$$

در اینجا $\hat{\rho}_a(\circ)$ ماتریس چگالی اولیه اتم دو تراز و $\hat{\rho}_f(\circ)$ ماتریس چگالی اولیه میدان کاواک است. اگر فرض کنیم اتم دو

$$\begin{aligned}
& \times \left[\hat{A}_{I1}^+(t_2) \hat{A}_{I2}^+(t_2) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_2} + \right. \\
& \left. \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_2} \right] \\
& \times \hat{\rho}_I(\circ) \left\{ 1 + ig \int_{\circ}^t dt_1 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \right. \\
& + (ig)^2 \int_{\circ}^t \int_{\circ}^{t_1} dt_1 dt_2 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
& \left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \\
& \times \left[\hat{A}_{I1}^+(t_2) \hat{A}_{I2}^+(t_2) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_2} + \right. \\
& \left. \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_2} \right] + \dots \} \\
& = \hat{\rho}_I(\circ) - ig \int_{\circ}^t dt_1 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
& \left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \hat{\rho}_I(\circ) \\
& + ig \hat{\rho}_I(\circ) \int_{\circ}^t dt_1 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
& \left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \\
& + g^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \right. \\
& \left. \hat{\rho}_I(\circ) \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right] \\
& + g^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\rho}_I(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_2) \hat{A}_{I2}^+(t_2) \right. \\
& \left. \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right] + O(g^3) + \dots, \quad (25)
\end{aligned}$$

در این قسمت نیز، مانند حالت بدون تقریب موج چرخان با توجه به محاسبات عددی که در بخش (۴) انجام دادیم، ثابت جفت‌شدگی را کوچک فرض می‌کنیم $\left(\frac{g}{\omega_0} = \circ/\circ\right)$ از جملات g^3 و بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم. با استفاده از روابط (۱۶) تا (۲۱) و (۲۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}'_f(t) &= Tr_a \left[\hat{\rho}'_I(t) \right] = \langle 1 | \hat{\rho}'_I(t) | 1 \rangle + \langle 2 | \hat{\rho}'_I(t) | 2 \rangle \\
&= \hat{\rho}_f(\circ) + g^2 |C_f|^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \\
&\left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right] \\
&+ g^2 |C_f|^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \\
&\left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right], \quad (26)
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم که ابتدا میدان در حالت هم‌دوس تغییر شکل یافته f دو مدی $|z_1, z_r, f_1, f_r\rangle$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_f(\circ) &= |z_1, z_r, f_1, f_r\rangle \langle z_1, z_r, f_1, f_r| \\
&= \sum_{n_1, n_r = \circ}^{\infty} C_{n_1}(z_1, f_1) C_{n_r}(z_r, f_r) \\
&C_{n_1}^*(z_1, f_1) C_{n_r}^*(z_r, f_r) |n_1, n_r\rangle \langle n_1, n_r|, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle 2 | \hat{\sigma}^- \{ C_f^* C_f^* | 1 \rangle \langle 2 | + C_f^* C_f^* | 2 \rangle \langle 1 | + C_f^* C_f^* | 1 \rangle \rangle \\
& \langle 1 | + C_f^* C_f^* | 2 \rangle \langle 2 | \rangle = C_f^* C_f^*, \quad (21)
\end{aligned}$$

سپس با رد جزیی گرفتن نسبت به ویژه حالت‌های اتمی از ماتریس چگالی کل $\hat{\rho}_I(t)$ می‌توان ماتریس چگالی کاهش یافته میدان کاواک $\hat{\rho}_f(t)$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_f(t) &= Tr_a \left[\hat{\rho}_I(t) \right] = \langle 1 | \hat{\rho}_I(t) | 1 \rangle + \langle 2 | \hat{\rho}_I(t) | 2 \rangle \\
&= \hat{\rho}_f(\circ) + g^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_2) \hat{A}_{I2}^+(t_2) + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_2) \hat{A}_{I2}^+(t_2) \right] \\
&\times \left[|C_f|^2 e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} + |C_f|^2 e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right], \quad (22)
\end{aligned}$$

در اینجا از رابطه $Tr_a \left[\hat{\rho}_I(\circ) \right] = \hat{\rho}_f(\circ)$ و روابط (۲۱-۱۶) استفاده کرده‌ایم. اگر از تقریب موج چرخان استفاده کنیم (با حذف جمله $\hat{A}_{I1}^+ \hat{A}_{I2}^+ \hat{\sigma}_I^+ + \hat{A}_{I1} \hat{A}_{I2} \hat{\sigma}_I^-$ از معادله ۶)، هامیلتونی برهمکنش در تصویر برهمکنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{H}'_I(t) = \hbar g \left[\hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I2}^+(t) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t} + \hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I2}(t) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t} \right], \quad (23)$$

در این حالت عملگر تحول زمانی $\hat{U}'_I$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\hat{U}'_I(t, \circ) &= T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{\circ}^t \hat{H}'_I(t) dt \right] \\
&= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{\circ}^t \hat{H}'_I(t_1) dt_1 + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) + \dots \\
&= 1 - ig \int_{\circ}^t dt_1 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \\
&+ (-ig)^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \\
&\times \left[\hat{A}_{I1}^+(t_2) \hat{A}_{I2}^+(t_2) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_2} + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_2) \hat{A}_{I2}(t_2) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_2} \right] + \dots, \quad (24)
\end{aligned}$$

اگر از معادله (۱۱) استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
\rho'_I(t) &= \{ 1 - ig \int_{\circ}^t dt_1 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right] \\
&+ (-ig)^2 \int_{\circ}^t dt_1 \int_{\circ}^{t_1} dt_2 \left[\hat{A}_{I1}^+(t_1) \hat{A}_{I2}^+(t_1) \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t_1} + \right. \\
&\left. \hat{A}_{I1}(t_1) \hat{A}_{I2}(t_1) \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t_1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g^r \int_0^t dt_r \int_0^t dt_f Tr_f \left[\hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{n}_i^r \right] \\
& +g^r \int_0^t dt_r \int_0^t dt_f Tr_f \left[\hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{n}_i^r \right] \} \\
& \times \left[|C_r'|^r e^{-i\omega_r(t_r-t_i)} + |C_i'|^r e^{i\omega_r(t_r-t_i)} \right], \quad (29)
\end{aligned}$$

در اینجا ما از رابطه (۲۲) استفاده کرده‌ایم. حال اگر از روابط زیر استفاده کنیم (در پیوست الف توضیحات لازم آورده شده است):

$$\begin{aligned}
& Tr_f [\hat{\rho}_f(\circ) \hat{n}_i^r] \\
& = \sum_{n_i, n_r=\circ} \langle n_i, n_r | \hat{\rho}_f(\circ) \hat{n}_i^r | n_i, n_r \rangle \\
& = \sum_{n_i, n_r=\circ} n_i^r |C_{n_i}(z_i, f_i)|^r |C_{n_r}(z_r, f_r)|^r, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Tr_f [\hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{n}_i^r] \\
& = \sum_{n_i, n_r=\circ} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{n}_i^r | n_i, n_r \rangle \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Tr_f [\hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{n}_i^r] \\
& = \sum_{n_i, n_r=\circ} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{n}_i^r | n_i, n_r \rangle, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Tr_f [\hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{n}_i^r] \\
& = \sum_{n_i, n_r=\circ} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{n}_i^r | n_i, n_r \rangle = \circ, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Tr_f [\hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{n}_i^r] \\
& = \sum_{n_i, n_r=\circ} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{n}_i^r | n_i, n_r \rangle = \circ, \quad (34)
\end{aligned}$$

در اینجا تعریف کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
& \gamma_i(n_i) = (n_i + 1) f_i^r(n_i + 1) - n_i f_i^r(n_i), \\
& \gamma_r(n_r) = (n_r + 1) f_r^r(n_r + 1) - n_r f_r^r(n_r) \\
& |C_{n_i-1}'(z_i, f_i)|^r = f_i^r(n_i) |C_{n_i}(z_i, f_i)|^r, \\
& |C_{n_r-1}'(z_r, f_r)|^r = f_r^r(n_r) |C_{n_r}(z_r, f_r)|^r \\
& |C_{n_i}'(z_i, f_i)|^r = f_i^r(n_i + 1) |C_{n_i}(z_i, f_i)|^r \\
& |C_{n_r}'(z_r, f_r)|^r = f_r^r(n_r + 1) |C_{n_r}(z_r, f_r)|^r, \quad (35)
\end{aligned}$$

در اینجا $C_{n_i}(z_i, f_i) = \frac{N_i z_i^{n_i}}{\sqrt{(n_i f_i^r(n_i))!}}$ ثابت بهنجارش N_i

(است) و $z_i = |z_i| e^{i\phi_i}$ است [۳۶ و ۳۷]. حالت $|z_i, z_r, f_i, f_r\rangle$ در واقع ویژه N_i تابع عملگر نابودی تغییر شکل یافته دو مدی $(\hat{A}_i \hat{A}_r = \hat{a}_i f_i(\hat{n}_i) \hat{a}_r f_r(\hat{n}_r))$ با ویژه مقدار z_i, z_r است $(\hat{A}_i \hat{A}_r |z_i, z_r, f_i, f_r\rangle = z_i z_r |z_i, z_r, f_i, f_r\rangle)$

۴. خواص دینامیکی میدان کاواک

در مدل جینز- کامینگز معمولی میدان کاواک اثرات غیر کلاسیکی همچون چلانگی کوادراتورهای میدان و آمار فوتونی زیر پواسونی را نشان می‌دهد. در این قسمت ما اثرات جملات پاد چرخان و پارامتر تغییر شکل یافته را با استفاده از روش‌های عددی روی آمار شمارش فوتون‌ها و همبستگی متقابل بین مدهای میدان و چلانگی کوادراتورهای میدان بررسی می‌کنیم.

۱.۴. آمار شمارش فوتون‌ها

پارامتر مندل به طور کلی کمیتی است که برای تعیین میزان انحراف آمار شمارش فوتون‌ها از آمار پواسونی برای یک میدان همدوس استفاده می‌شود [۳۸]. در این قسمت ما رفتار پارامتر مندل را با در نظر گرفتن اثرات جملات پاد چرخان و پارامتر تغییر شکل روی آمار شمارش فوتون‌ها بررسی می‌کنیم. پارامتر مندل توسط رابطه زیر تعریف می‌شود [۳۹]:

$$\begin{aligned}
M_i &= \frac{\langle \hat{n}_i^r(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^r}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle} - 1 = \\
& \frac{Tr_f(\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i^r) - (Tr_f(\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i))^r}{Tr_f(\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i)} - 1 \quad (i=1, 2), \quad (28)
\end{aligned}$$

در حالت $M=0$ توزیع فوق پواسونی و در حالت $M<0$ توزیع زیر پواسونی و در حالت $M=0$ توزیع پواسونی است. در غیاب تقریب موج چرخان داریم:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_i^r \rangle &= Tr_f [\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i^r] = Tr_f [\hat{\rho}_f(\circ) \hat{n}_i^r] + \\
& \{ g^r \int_0^t dt_r \int_0^t dt_f Tr_f [\hat{A}_{I1}^+(t) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{n}_i^r] \\
& + g^r \int_0^t dt_r \int_0^t dt_f Tr_f [\hat{A}_{I1}(t) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{\rho}_f(\circ) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{A}_{I1}^+(t_r) \hat{n}_i^r] \}
\end{aligned}$$

بنابراین به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i \rangle &= Tr_f \left[\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i \right] = \\ &\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i \left| C_{n_i}(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r}(z_r, f_r) \right|^r \\ &+ r g^r \left| C_r' \right|^r t \\ &\left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i n_r \left| C_{n_i-1}'(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r-1}'(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) + \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) + \omega_*} + \right. \\ &\left. \frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) - \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) - \omega_*} \right] \\ &+ r g^r \left| C_i' \right|^r t \\ &\left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i (n_i + 1)(n_r + 1) \left| C_{n_i+1}'(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r+1}'(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) - \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) - \omega_*} + \right. \\ &\left. \frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) + \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) + \omega_*} \right], \quad (39) \end{aligned}$$

در حضور تقریب موج چرخان برای پارامتر مندل داریم:

$$\begin{aligned} M_i' &= \frac{\langle \hat{n}_i^r(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^r}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle} - 1 = \\ &\frac{Tr_f(\hat{\rho}_f'(t) \hat{n}_i^r) - (Tr_f(\hat{\rho}_f'(t) \hat{n}_i))^r}{Tr_f(\hat{\rho}_f'(t) \hat{n}_i)} - 1, \quad (i=1, 2) \quad (40) \end{aligned}$$

اگر از روابط (۲۶) و (۳۰) تا (۳۵) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i^r \rangle &= Tr_f \left[\hat{\rho}_f'(t) \hat{n}_i^r \right] = \\ &\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r \left| C_{n_i}(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r}(z_r, f_r) \right|^r \\ &+ r g^r \left| C_i' \right|^r t \\ &\left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r n_r \left| C_{n_i-1}'(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r-1}'(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) - \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) - \omega_*} \right] \\ &+ r g^r \left| C_r' \right|^r t \\ &\left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r (n_i + 1)(n_r + 1) \left| C_{n_i+1}'(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r+1}'(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) - \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) - \omega_*} \right], \quad (41) \end{aligned}$$

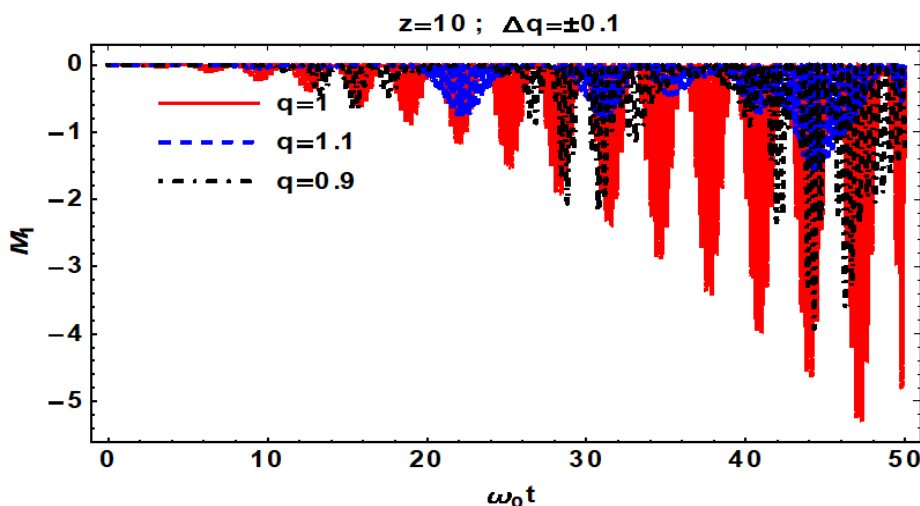
$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i^r \rangle &= Tr_f \left[\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i^r \right] = \\ &\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r \left| C_{n_i}(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r}(z_r, f_r) \right|^r \\ &+ g^r \int_0^t dt_i \int_0^t dt_r \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r n_r \left| C_{n_i-1}'(z_i, f_i) \right|^r \\ &\left| C_{n_r-1}'(z_r, f_r) \right|^r e^{-i[\Omega_i \gamma_i (n_i - 1) + \Omega_r \gamma_r (n_r - 1)]} \\ &+ g^r \int_0^t dt_i \int_0^t dt_r \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r (n_i + 1)(n_r + 1) \left| C_{n_i}'(z_i, f_i) \right|^r \\ &\left| C_{n_r}'(z_r, f_r) \right|^r e^{-i[\Omega_i \gamma_i (n_i) + \Omega_r \gamma_r (n_r)]} \\ &\times \left[\left| C_r' \right|^r e^{-i\omega_r(t_r - t_i)} + \left| C_i' \right|^r e^{i\omega_i(t_r - t_i)} \right], \quad (36) \end{aligned}$$

با تغییر متغیر به صورت زیر رابطه (۳۸) به دست می آید:

$$\begin{aligned} u &= t_r - t_i \\ v &= t_r + t_i \\ dudv &= r dt_r dt_i, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i^r \rangle &= Tr_f \left[\hat{\rho}_f(t) \hat{n}_i^r \right] = \\ &\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r \left| C_{n_i}(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r}(z_r, f_r) \right|^r \\ &+ r g^r \left| C_r' \right|^r t \\ &\left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r n_r \left| C_{n_i-1}'(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r-1}'(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) + \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) + \omega_*} + \right. \\ &\left. \frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) - \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) - \omega_*} \right] \\ &+ r g^r \left| C_i' \right|^r t \\ &\left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^r (n_i + 1)(n_r + 1) \left| C_{n_i+1}'(z_i, f_i) \right|^r \left| C_{n_r+1}'(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) - \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i - 1) + \omega \gamma_r (n_r - 1) - \omega_*} + \right. \\ &\left. \frac{\sin[\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) + \omega_*] t}{\omega \gamma_i (n_i) + \omega \gamma_r (n_r) + \omega_*} \right], \quad (38) \end{aligned}$$

به روش مشابهی می توان نشان داد:



شکل ۱. نمودار تحول زمانی پارامتر مندل $M_1(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در غیاب تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته $|z_1, z_r; f_1, f_r\rangle$ است ($C'_1 = 0, C'_r = 1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید هستند ($\omega_1 = \omega_r = \delta\omega_0$) و میدان در حالت همدوس تغییر شکل یافته $|z_1, z_r; f_1, f_r\rangle$ است؛ برای سه مورد متفاوت ($q=1, q=0.9, q=1/1$). در اینجا ما فرض کرده ایم $|z_1| = |z_r| = |z| = 1$ و $\left(\frac{g}{\omega_0} = 0.1\right)$.

به روش مشابهی می توان نشان داد:

الف) حالت دو مدی غیر تغییر شکل یافته

$$f_i(\hat{n}_i) = f_r(\hat{n}_r) = 1, q=1$$

ب) حالت دو مدی تغییر شکل یافته

$$f_i(\hat{n}_i) = \sqrt{\frac{1}{\hat{n}_i} \frac{q^{\hat{n}_i} - 1}{q - 1}}, q=0.9, i=1, r$$

ج) حالت دو مدی تغییر شکل یافته

$$f_i(\hat{n}_i) = \sqrt{\frac{1}{\hat{n}_i} \frac{q^{\hat{n}_i} - 1}{q - 1}}, q=1/1, i=1, r$$

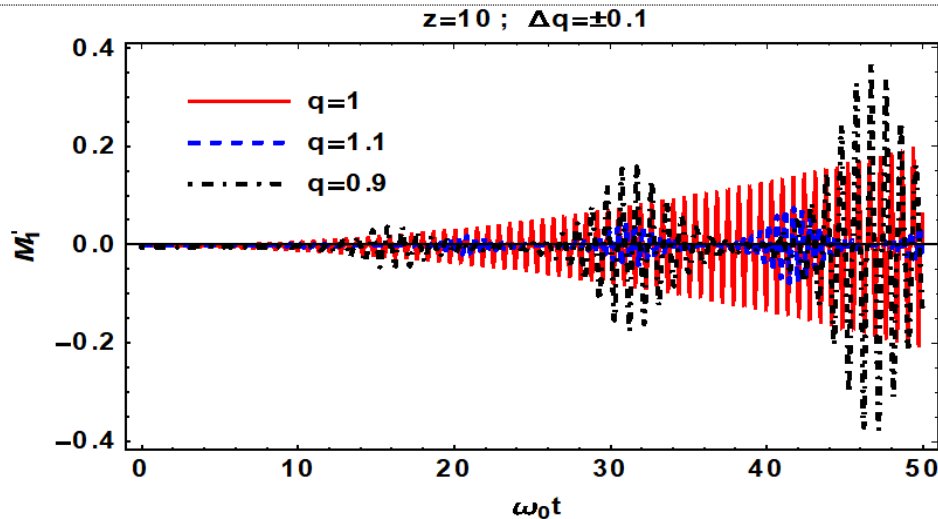
پارامتر تغییر شکل q در واقع یک ثابت پدیده شناختی است که کنترل کننده شدت جفت شدگی اتم و میدان است. به علاوه تابع

غیر خطی $f(\hat{n}) = \sqrt{\frac{1}{\hat{n}} \frac{q^{\hat{n}} - 1}{q - 1}}$ منطبق با حالت همدوس تغییر شکل یافته است [۴۰].

در شکل ۲ پارامتر مندل $M_1(t)$ در حضور تقریب موج چرخان با پارامترهای مشابه شکل (۱) (در غیاب تقریب موج چرخان) رسم شده است. همان طور که دیده می شود در غیاب موج چرخان پارامتر مندل $M_1(t)$ دارای نوساناتی منظم در مدل جینز-کامینگز غیر تغییر شکل یافته دو فوتونی تبهگن ($q=1$) و نوساناتی به شکل نامنظم برای مدل جینز-کامینگز

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i \rangle &= \text{Tr}_f \left[\hat{\rho}'_f(t) \hat{n}_i \right] = \\ &= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i \left| C_{n_i}(z_1, f_1) \right|^r \left| C_{n_r}(z_r, f_r) \right|^r \\ &+ r g^r |C'_1|^r t \left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i n_r \left| C'_{n_i-1}(z_1, f_1) \right|^r \left| C'_{n_r-1}(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega_1 \gamma_1 (n_i - 1) + \omega_r \gamma_r (n_r - 1) - \omega_0] t}{\omega_1 \gamma_1 (n_i - 1) + \omega_r \gamma_r (n_r - 1) - \omega_0} \right] \\ &+ r g^r |C'_r|^r t \left[\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i (n_i + 1) (n_r + 1) \left| C'_{n_i+1}(z_1, f_1) \right|^r \left| C'_{n_r+1}(z_r, f_r) \right|^r \right] \\ &\times \left[\frac{\sin[\omega_1 \gamma_1 (n_i) + \omega_r \gamma_r (n_r) - \omega_0] t}{\omega_1 \gamma_1 (n_i) + \omega_r \gamma_r (n_r) - \omega_0} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

در شکل ۱ نمودار تابع $M_1(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در غیاب تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته است ($C'_1 = 0, C'_r = 1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید است ($\omega_1 = \omega_r = \delta\omega_0$) برای سه مورد متفاوت میدان کاواک رسم شده است:



شکل ۲. نمودار تحول زمانی پارامتر مندل $M_I'(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در حضور تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته است ($C_I' = 0, C_I' = 1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید هستند ($\omega_I = \omega_r = \omega_0$) و میدان در حالت همدوس تغییر شکل یافته

$|z_I, z_r; f_I, f_r\rangle$ است؛ برای سه مورد متفاوت ($q=1, q=0.9, q=1.1$). در اینجا ما فرض کرده ایم $|z_I| = |z_r| = |z| = 1$ و $\left(\frac{g}{\omega_0} = 0.1\right)$.

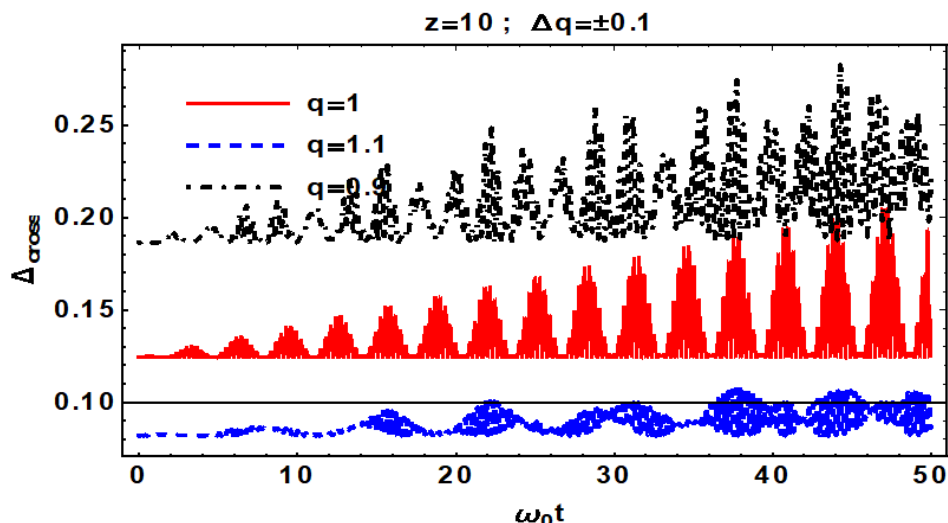
۲.۴. همبستگی متقابل بین مدهای میدان

یک کمیت مهم در میدان‌های دو مدی تابع همبستگی متقابل بین مدهای میدان است که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود [۴۱]:

$$\Delta_{cross}(t) = \langle \hat{n}_I(t) \hat{n}_r(t) \rangle - \langle \hat{n}_I(t) \rangle \langle \hat{n}_r(t) \rangle \\ = Tr_f \left(\hat{\rho}_f \hat{n}_I(t) \hat{n}_r(t) \right) - Tr \left(\hat{\rho}_f \hat{n}_I(t) \right) Tr \left(\hat{\rho}_f \hat{n}_r(t) \right), \quad (43)$$

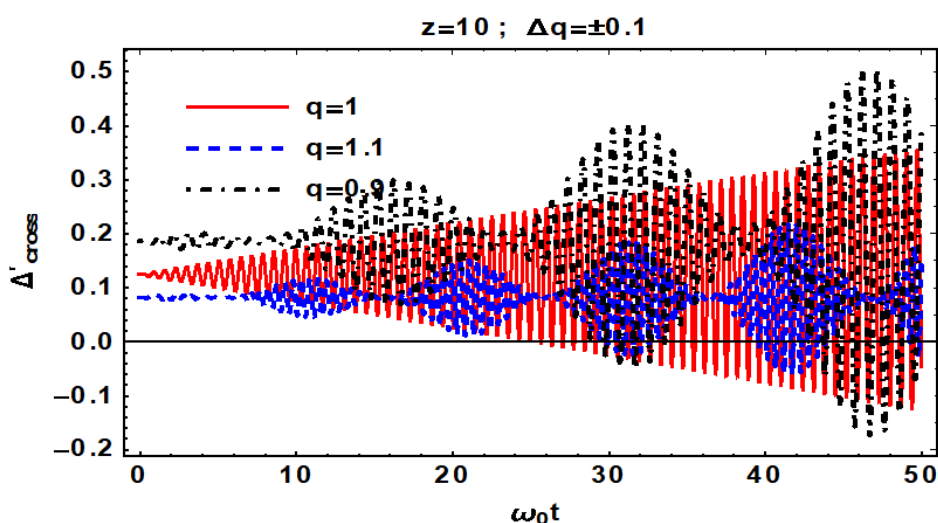
این کمیت معیاری از شمارش انطباقی فوتون‌ها در مد ۱ و مد ۲ در لحظه t است. این کمیت را می‌توان توسط آزمایش هانبری-براون و توتیس به طور تجربی اندازه‌گیری کرد [۴۱ و ۴۲]. اگر $\Delta_{cross}(t)$ منفی باشد دو مد تمایلی به ظاهر شدن همزمان در آشکارساز ندارند و در این حالت فوتون‌های در مد ۱ و مد ۲ پادمهسته هستند در غیر این صورت مدها همبسته هستند. در شکل‌های ۳ و ۴ تحول زمانی تابع همبستگی متقابل به ترتیب برای دو حالت بدون و با تقریب موج چرخان رسم شده است. در شکل ۳ مشاهده می‌شود برای مدل جینز-کامینگز غیر تغییر شکل یافته دو فوتونی تبهگن ($q=1$) و برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی غیر تبهگن ($q=0.9, q=1.1$) در حالت بدون تقریب موج چرخان

تغییر شکل یافته f دوفوتونی غیر تبهگن ($q=0.9, q=1.1$) خواهد بود. همچنین برای مدل جینز-کامینگز غیر تغییر شکل یافته دوفوتونی تبهگن ($q=1$) و مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دوفوتونی غیر تبهگن ($q=0.9, q=1.1$) پارامتر مندل در اغلب زمان‌ها منفی خواهد بود (آمار زیر پواسونی). همچنین مشاهده می‌شود در غیاب تقریب موج چرخان پارامتر مندل در بعضی زمان‌ها صفر خواهد بود (آمار پواسونی). برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f ($q=0.9, q=1.1$) با تقریب موج چرخان در حالتی که میدان در ابتدا در حالت همدوس تغییر شکل یافته است ما پدیده نابودی و احیای نوسانات رابی را در تحول زمانی پارامتر مندل $M_I'(t)$ مشاهده می‌کنیم. همچنین تابع $M_I'(t)$ در محدوده نوسانات خود بین مقادیر منفی و مثبت در حال نوسان است که این به این مفهوم است که آمار به طور متناوب بین آمار فوق پواسونی و زیر پواسونی در حال تغییر است. برای هر دو مورد بدون و با تقریب موج چرخان یک ناحیه غیر نوسانی وجود دارد که مقادیر $M_I(t), M_I'(t)$ هر دو صفر است و آمار شمارش فوتون‌های میدان از نوع پواسونی خواهد بود.



شکل ۳. نمودار تحول زمانی همبستگی متقابل $\Delta_{cross}(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در غیاب تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته است ($C'_1=0, C'_2=1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید هستند ($\omega_1=\omega_2=\omega_0$) و میدان در حالت همدوس تغییر شکل یافته

$|z_1, z_2; f_1, f_2\rangle$ است؛ برای سه مورد متفاوت ($q=1, q=0.9, q=1/1$). در اینجا ما فرض کرده ایم $|z_1|=|z_2|=|z|=1$ و $\left(\frac{g}{\omega_0}=0.01\right)$.



شکل ۴. نمودار تحول زمانی همبستگی متقابل $\Delta_{cross}(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در حضور تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته است ($C'_1=0, C'_2=1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید هستند ($\omega_1=\omega_2=\omega_0$) و میدان در حالت همدوس تغییر شکل یافته

$|z_1, z_2; f_1, f_2\rangle$ است؛ برای سه مورد متفاوت ($q=1, q=0.9, q=1/1$). در اینجا ما فرض کرده ایم $|z_1|=|z_2|=|z|=1$ و $\left(\frac{g}{\omega_0}=0.01\right)$.

مجازی نقش بسیار مهمی در رسیدن فوتون‌های دو مد به طور همزمان به آشکارساز را دارند. فوتون‌های مجازی با وجود این که به صورت لحظه‌ای پدیدار و ناپدید می‌شوند می‌توانند باعث اثرات واقعی مثل افزایش همبستگی مدهای میدان شوند.

$\Delta_{cross}(t)$ در همه زمان‌ها مثبت است (دو مد همبسته هستند). در واقع فوتون‌های مجازی به فوتون‌های واقعی برای رسیدن همزمان به آشکارساز کمک می‌کنند و باعث همبستگی میدان در همه زمان‌ها خواهد شد. به عبارت دیگر در اینجا فوتون‌های

$$\left\langle \left(\Delta \hat{Z}_i(t) \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{A}} \left\langle \left[\sum_{j=1,2} \left\{ (\hat{n}_j + 1) f_j^\dagger(\hat{n}_j + 1) - \hat{n}_j f_j^\dagger(\hat{n}_j) \right\} \right]^2 \right\rangle, \quad (48)$$

درجه چلانگی را می‌توان توسط پارامتر $S_i (i=1,2)$ که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود اندازه‌گیری کرد.

$$S_i(t) = \mathcal{A} \left\langle \left(\Delta \hat{Z}_i(t) \right)^2 \right\rangle - \left[\left\langle \sum_{j=1,2} \left\{ (\hat{n}_j + 1) f_j^\dagger(\hat{n}_j + 1) - \hat{n}_j f_j^\dagger(\hat{n}_j) \right\} \right\rangle \right]^2, \quad (49)$$

شرط چلانگی نرمال مدهای میدان $S_i < 0$ است. نتایج عددی تحول زمانی درجه چلانگی $S_i(t)$ مربوط به مؤلفه کوادراتوری $\hat{Z}_i(t)$ در غیاب و در حضور تقریب موج چرخان به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ رسم شده است. شکل ۵ نشان می‌دهد که در غیاب تقریب موج چرخان، $S_i(t)$ رفتار نوسانی آشوبناک دارد و چلانگی نرمال دو مدی در کل محدوده زمانی مشاهده نمی‌شود. در مورد میدان‌های تک مدی، جملات پادچرخان باعث افزایش چلانگی می‌شود ولی در مورد میدان‌های دو مدی به دلیل این که اثرات متقابل دو میدان نیز وجود دارد و همبستگی دو میدان به علت جملات پاد چرخان افزایش می‌یابد چلانگی میدان کاهش می‌یابد. در واقع در مورد میدان‌های دو مدی اثرات متقابل دو میدان نیز پارامتری است که در چلانگی تأثیر دارد در حالی که این پارامتر در میدان‌های تک مدی وجود ندارد. به طور کلی جملات پادچرخان و فوتون‌های مجازی روی چلانگی اثرات تخریبی دارند.

از طرفی در شکل ۶ مشاهده می‌کنیم که در حضور تقریب موج چرخان، چلانگی نرمال دو مدی در برخی از بازه‌های زمانی ظاهر می‌شود. در واقع به جهت نفوذ جملات پاد چرخان چلانگی نرمال دو مدی به طور کامل از بین می‌رود. همچنین مشاهده می‌کنیم که در مدل تغییر شکل یافته در مقایسه با مدل غیر تغییر شکل یافته، پارامتر $S_i(t)$ نوسانات کندتری خواهد داشت.

همچنین برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی تابع همبستگی رفتاری آشوبناک نشان می‌دهد. از شکل (۴) مشخص می‌شود که تابع همبستگی در حضور تقریب موج چرخان $\Delta'_{cross}(t)$ در یک محدوده‌ای از زمان پاد همبسته خواهد بود. همچنین در مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f ($q=0/4$) نسبت به مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f ($q=1/1$) اندازه تابع همبستگی بین مدهای میدان بزرگ تر است.

۳.۴. چلانگی نرمال مدهای میدان

به منظور بررسی اثرات جملات پادچرخان و پارامتر تغییر شکل بر چلانگی نوفه‌های کوانتومی مؤلفه‌های کوادراتوری میدان تغییر شکل یافته دو مدی، دو عملگر هرمیتی تغییر شکل یافته $\hat{Z}_1(t), \hat{Z}_2(t)$ کند تغییر به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{Z}_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{r}} (\hat{A}_1 e^{i\omega t} + \hat{A}_1^+ e^{-i\omega t} + \hat{A}_2 e^{i\omega t} + \hat{A}_2^+ e^{-i\omega t}), \quad (44)$$

$$\hat{Z}_2(t) = \frac{1}{2i\sqrt{r}} (\hat{A}_1 e^{i\omega t} - \hat{A}_1^+ e^{-i\omega t} + \hat{A}_2 e^{i\omega t} - \hat{A}_2^+ e^{-i\omega t}), \quad (45)$$

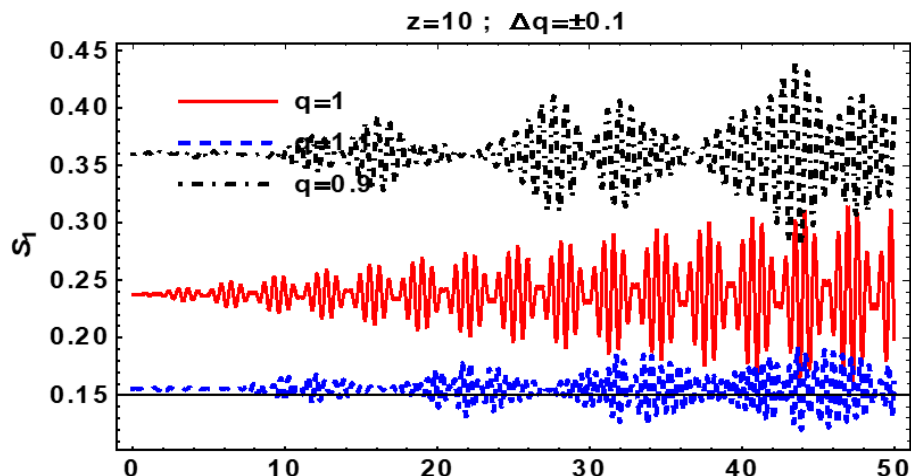
در اینجا $\hat{A}_i$ و $\hat{A}_i^+$ ($i=1,2$) عملگرهای خلق و نابودی تغییر شکل یافته f اند که در رابطه (۲) معرفی کردیم. در حالت $f_i(\hat{n}_i) = 1$ عملگرهای $\hat{Z}_1(t)$ و $\hat{Z}_2(t)$ به عملگرهای کوادراتوری دو مدی غیر تغییر شکل یافته تبدیل می‌شوند [۴۳]. عملگرهای کوادراتوری از رابطه جابه‌جایی زیر پیروی می‌کنند:

$$[\hat{Z}_1(t), \hat{Z}_2(t)] = \frac{i}{r} \sum_{j=1,2} \left\{ (\hat{n}_j + 1) f_j^\dagger(\hat{n}_j + 1) - \hat{n}_j f_j^\dagger(\hat{n}_j) \right\}, \quad (46)$$

بنابراین رابطه عدم قطعیت به صورت زیر خواهد بود:

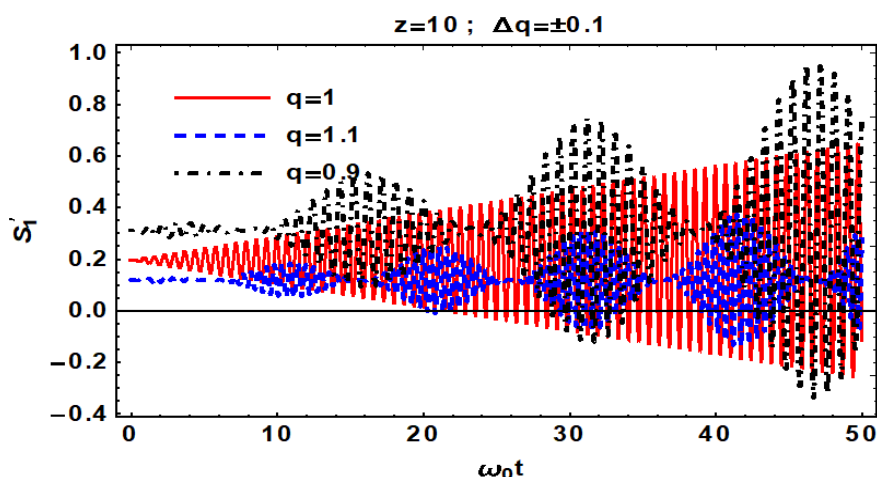
$$\left\langle \left(\Delta \hat{Z}_1(t) \right)^2 \right\rangle \left\langle \left(\Delta \hat{Z}_2(t) \right)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{\mathcal{A}^2} \left[\left\langle \sum_{j=1,2} \left\{ (\hat{n}_j + 1) f_j^\dagger(\hat{n}_j + 1) - \hat{n}_j f_j^\dagger(\hat{n}_j) \right\} \right\rangle \right]^2, \quad (47)$$

در اینجا $\left\langle \left(\Delta \hat{Z}_i(t) \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{Z}_i^2 \rangle - \langle \hat{Z}_i \rangle^2$ بنا به تعریف میدان را چلانده گویند اگر کوادراتورهای $\hat{Z}_1(t)$ یا $\hat{Z}_2(t)$ در رابطه زیر صدق کنند [۴۴]:



شکل ۵. نمودار تحول زمانی چلانگی نرمال دو مدی $S_I(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در غیاب تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته است ($C_I' = 0, C_I' = 1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید هستند ($\omega_I = \omega_r = \omega_0$) و میدان در حالت همدوس تغییر شکل یافته

$|z_I, z_r; f_I, f_r\rangle$ است؛ برای سه مورد متفاوت ($q=1, q=0.9, q=1.1$). در اینجا ما فرض کرده ایم $|z_I| = |z_r| = |z| = 1$ و $\left(\frac{g}{\omega_0} = 0.01\right)$.



شکل ۶. نمودار تحول زمانی چلانگی نرمال دو مدی $S_I(t)$ بر حسب $\omega_0 t$ در حضور تقریب موج چرخان برای حالتی که اتم در ابتدا در حالت برانگیخته است ($C_I' = 0, C_I' = 1$) و بسامدها در حالت غیر تشدید هستند ($\omega_I = \omega_r = \omega_0$) و میدان در حالت همدوس تغییر شکل یافته

$|z_I, z_r; f_I, f_r\rangle$ است؛ برای سه مورد متفاوت ($q=1, q=0.9, q=1.1$). در اینجا ما فرض کرده ایم $|z_I| = |z_r| = |z| = 1$ و $\left(\frac{g}{\omega_0} = 0.01\right)$.

۵. نتیجه گیری

یافته با یک اتم دو ترازوی بدون تقریب موج چرخان در چارچوب مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f پرداخته شد. سپس، ماتریس چگالی کل اتم و میدان را با استفاده از عملگر تحول زمانی به دست آوردیم و با رد جزیی گرفتن از ماتریس چگالی کل نسبت به حالت‌های اتم، ماتریس چگالی کاهش

در این مقاله، خواص دینامیکی یک میدان دو مدی تغییر شکل یافته که در حال برهمکنش با یک اتم دو ترازوی است در حضور و در غیاب تقریب موج چرخان بررسی شد. ابتدا به بررسی مدل نظری برهمکنش یک میدان دو مدی تغییر شکل

یافته میدان کاواک به دست آورده شد. همچنین، اثرات جملات پاد چرخان و پارامتر تغییر شکل را با استفاده از روش‌های عددی روی آمار شمارش فوتون‌ها و همبستگی متقابل بین مدهای میدان و چلانگی کوادراتورهای میدان بررسی کردیم و مشاهده کردیم در غیاب تقریب موج چرخان، پارامتر مندل $M_1(t)$ نوساناتی منظم در مدل جینز-کامینگز غیر تغییر شکل یافته دو فوتونی تبهگن ($q=1$) و نوساناتی به شکل نامنظم برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی غیر تبهگن ($q=0/9, q=1/1$) خواهد داشت. همچنین برای مدل جینز-کامینگز غیر تغییر شکل یافته دو فوتونی تبهگن ($q=1$) و مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی غیر تبهگن ($q=0/9, q=1/1$) پارامتر مندل در اغلب زمان‌ها منفی خواهد بود (آمار زیر پواسونی). همچنین مشاهده کردیم در غیاب تقریب موج چرخان، پارامتر مندل در بعضی زمان‌ها صفر خواهد بود (آمار پواسونی). برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f ($q=0/9, q=1/1$) با تقریب موج چرخان در حالتی که میدان در ابتدا در حالت همدوس تغییر شکل یافته است، پدیده نابودی و احیای نوسانات رابی در تحول زمانی پارامتر مندل $M_1(t)$ مشاهده شد. همچنین تابع $M_1(t)$ در محدوده نوسانات بین مقادیر مثبت و منفی در حال نوسان است که این به این مفهوم است که آمار به طور متناوب بین فوق پواسونی و زیر پواسونی در حال تغییر است. برای هر دو مورد بدون و با تقریب موج چرخان یک ناحیه غیر نوسانی وجود دارد که مقادیر $M_1(t), M_1'(t)$ هر دو صفرند و آملر شمارش فوتون‌ها از نوع پواسونی خواهد بود. علاوه بر این مشاهده شد برای مدل جینز-کامینگز غیر تغییر شکل یافته دو فوتونی تبهگن ($q=1$) و برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی غیر تبهگن ($q=0/9, q=1/1$) در حالت بدون تقریب موج چرخان، $\Delta_{cross}(t)$ در همه زمان‌ها مثبت است (دو مد همبسته هستند). برای مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f دو فوتونی نیز تابع همبستگی رفتاری آشوبناک را نشان می‌دهد. همچنین مشاهده شد که در حضور تقریب موج چرخان

$\Delta'_{cross}(t)$ در یک محدوده از زمان در حالت پادهمبسته قرار دارد. در مدل جینز-کامینگز تغییر شکل یافته f با $q=0/9$ نسبت به مدل جینز-کامینگز غیر شکل یافته f با $q=1/1$ همبستگی بین مدهای میدان تقویت می‌شود. همچنین مشاهده کردیم که در غیاب تقریب موج چرخان، $S_1(t)$ رفتار نوساناتی آشوبناک خواهد داشت و چلانگی دو مدی در کل محدوده زمانی مشاهده نمی‌شود. از طرف دیگر مشاهده کردیم که تقریب موج چرخان باعث چلانگی نرمال دو مدی در بعضی از نواحی زمانی می‌شود. در واقع به جهت نفوذ جملات پاد چرخان، چلانگی نرمال دومدی به طور کامل از بین می‌رود. همچنین مشاهده کردیم که در مدل تغییر شکل یافته در مقایسه با مدل غیر تغییر شکل یافته، پارامتر $S_1(t)$ نوسانات کندتری خواهد داشت. به علاوه، با استفاده از نتایج عددی نشان دادیم حتی وقتی تقریب موج چرخان معتبر است و ثابت جفت‌شدگی کوچک است ($\frac{g}{\omega_c} = 0/01$) جملات پادچرخان اثرات بسیار مهمی روی آمار شمارش فوتون‌ها و همبستگی متقابل بین مدهای میدان و چلانگی کوادراتورهای میدان خواهد داشت. در واقع اثرات مخرب فوتون‌های مجازی روی خواص میدان در برهمکنش‌های ضعیف نیز وجود دارد.

پیوست الف

اثبات روابط (۳۰) تا (۳۴)

در این قسمت روابط (۳۰) تا (۳۴) اثبات می‌شود. ابتدا به اثبات رابطه (۳۰) می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} & Tr_f [\hat{\rho}_f(0) \hat{n}_i^{\dagger}] \\ &= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{\rho}_f(0) \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle, \end{aligned} \quad (\text{الف-۱})$$

اگر از رابطه (۲۷) استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{\rho}_f(0) \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle, \\ &= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) \\ & C_{n_i}^*(z_i, f_i) C_{n_r}^*(z_r, f_r) | n'_i, n'_r \rangle \langle n'_i, n'_r | \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle, \end{aligned}$$

$$\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}(t_i) \hat{A}_{I2}(t_i) \hat{\rho}_f(\cdot) \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_r) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_r) \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \times \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r) | n'_i, n'_r \rangle \langle n'_i, n'_r |$$

$$\times e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} \sqrt{(n_i+1)(n_r+1)} n'_i n'_r f_i(n_i) f_r(n_r) f_i(n'_i) f'_r(n'_r) C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r)$$

$$\times e^{i\omega_r[(n'_i-1)f'_i(n'_i-1)-n'_i f'_r(n'_r)]t_i} \delta_{n_i, n'_i-1} \delta_{n_r, n'_r-1}$$

$$\times e^{i\omega_r[(n_i+1)f_i(n_i+1)-n_i f'_r(n_r)]t_r} \delta_{n'_i, n_i+1} \delta_{n'_r, n_r+1}$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} (n_i+1)(n_r+1) |C'_{n_i+1}(z_i, f_i)|^{\dagger} \quad (\text{الف-۶})$$

$$|C'_{n_r+1}(z_r, f_r)|^{\dagger} e^{i[\omega_r \gamma_i(n_i) + \omega_r \gamma_r(n_r)] [t_r - t_i]}$$

حال به اثبات رابطه (۳۳) پرداخته می‌شود:

$$\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_i) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_i) \hat{\rho}_f(\cdot) \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_r) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_r) \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$\times \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r) | n'_i, n'_r \rangle \langle n'_i, n'_r |$$

$$\times e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} \sqrt{(n_i+1)(n_r+1)(n'_i+1)(n'_r+1)} f_i(n_i+1) f_r(n_r+1) f_i(n'_i+1) f'_r(n'_r+1) C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r)$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r) \delta_{n'_i, n_i} \delta_{n'_r, n_r},$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} |C_{n_i}(z_i, f_i)|^{\dagger} |C_{n_r}(z_r, f_r)|^{\dagger}, \quad (\text{الف-۲})$$

حال رابطه (۳۱) را اثبات می‌کنیم:

$$\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_i) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_i) \hat{\rho}_f(\cdot) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I2}(t_r) | n_i, n_r \rangle, \quad (\text{الف-۳})$$

با توجه به روابط (۲)، (۷) و (۲۷) می‌توان نوشت:

$$\sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_i) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_i) \hat{\rho}_f(\cdot) \hat{A}_{I1}(t_r) \hat{A}_{I2}(t_r) \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$\times \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r) | n'_i, n'_r \rangle \langle n'_i, n'_r |$$

$$\times e^{i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_i \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1^{\dagger} e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{A}_1 e^{-i(\omega \hat{A}_1^{\dagger} \hat{A}_1 + \omega_r \hat{A}_r^{\dagger} \hat{A}_r)} t_r \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \sum_{n'_i, n'_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} \sqrt{n_i n_r (n'_i+1)(n'_r+1)} f_i(n_i) f_r(n_r) f_i(n'_i+1) f'_r(n'_r+1) C_{n'_i}(z_i, f_i) C_{n'_r}(z_r, f_r) C_{n'_i}^*(z_i, f_i) C_{n'_r}^*(z_r, f_r)$$

$$\times e^{-i\omega_r[n_i f'_i(n_i) - (n_i-1) f'_i(n_i-1)]t_r} e^{-i\omega_r[n_r f'_r(n_r) - (n_r-1) f'_r(n_r-1)]t_r} \delta_{n'_i, n_i-1} \delta_{n'_r, n_r-1}$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} n_i^{\dagger} n_i n_r |C'_{n_i-1}(z_i, f_i)|^{\dagger} \quad (\text{الف-۴})$$

$$|C'_{n_r-1}(z_r, f_r)|^{\dagger} e^{-i[\omega_r \gamma_i(n_i-1) + \omega_r \gamma_r(n_r-1)] [t_r - t_i]}$$

حال رابطه (۳۲) را اثبات می‌کنیم:

$$\text{Tr}_f [\hat{A}_{I1}(t_i) \hat{A}_{I2}(t_i) \hat{\rho}_f(\cdot) \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_r) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_r) \hat{n}_i^{\dagger}]$$

$$= \sum_{n_i, n_r=0}^{\infty} \langle n_i, n_r | \hat{A}_{I1}(t_i) \hat{A}_{I2}(t_i) \hat{\rho}_f(\cdot) \hat{A}_{I1}^{\dagger}(t_r) \hat{A}_{I2}^{\dagger}(t_r) \hat{n}_i^{\dagger} | n_i, n_r \rangle \quad (\text{الف-۵})$$

با توجه به روابط (۲)، (۷) و (۲۷) می‌توان نوشت:

41. H Paul. *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982)1061.
42. R Hanbury-Brown and R Q Twiss. *Nature* **177** (1956) 27.
43. C M Caves and B L Schumaker. *Phys. Rev.* **31** (1985) 3068; B. L. Schumaker and C. M. Caves. *Phys. Rev. A* **31** (1985) 3093.
44. M H Naderi, *Can. J. Phys.* **85** (2007)1071.
36. Sh Dehdashti, A Mahdifar, M Bagheri Harouni, and R Roknizadeh, *Ann.Phys. (N.Y.)* **334** (2013) 321.
37. W H Louisell, “*Quantum Statistical Properties of Radiation*”, Wiley, New York (1973).
38. L Mandel, *Opt. Lett.* **4** (1979) 205.
39. M O Scully and M S Zubairy . “*Quantum Optics*”. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
40. M Arik and D D Coon. *J. Math. Phys.* **17** (1976) 524.