

## رهیافت برزین در تعیین عملگرهای نردبانی وابسته به حرکت ذره روی حلقه و کره

سودابه رضایی و اردشیر رابعی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه

پست الکترونیکی: rabeie@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۰/۰۳)

### چکیده

صورت‌بندی کوانتومی یک سامانه فیزیکی اصولاً بر اساس عملگرهای خلق و نابودی انجام می‌شود. ما در این مقاله با استفاده از روش کوانتش برزین به تعیین این عملگرهای نردبانی برای ذره متحرک روی حلقه و کره دو بعدی می‌پردازیم. این روش کوانتش برگرفته از رابطه تفکیک واحد روی حالت‌های همدوس است. در واقع حالت‌های همدوس یک طرح کوانتش مستقیم از یک حالت کلاسیکی به همتای کوانتومی آن را فراهم می‌کنند. در این مقاله حالت‌های همدوس مربوط به سیستم‌های ذکر شده را از نقطه‌نظر تابع هسته گرمایی مورد بحث قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس، کوانتش برزین، عملگر خلق، عملگر نابودی

### ۱. مقدمه

از نقطه نظر فیزیکی، حالت‌های همدوس به عنوان نزدیک‌ترین حالت‌های کوانتومی به همتای کلاسیکی خود شناخته می‌شوند. به طور کلی، این حالت‌ها از سه ویژگی اساسی پیوستگی، بهنجارش‌پذیری و برآورده کردن رابطه تفکیک واحد برخوردارند [۱ و ۲]. مشخصه سوم پل ارتباطی بین جهان مکانیک کلاسیک و جهان مکانیک کوانتومی را فراهم می‌کند. یکی از سیستم‌های کوانتومی که به صورت موفقیت‌آمیزی از منظر حالت‌های همدوس استاندارد مورد بررسی قرار گرفته است، نوسانگر هماهنگ ساده است. به نظر می‌رسد، نتایج تعمیم این مفهوم در توصیف حرکت دوره‌ای ذره کوانتومی، به

ویژه ساده‌ترین موارد آن یعنی حرکت ذره کوانتومی روی حلقه و کره  $S^1$ ، نیز رضایت‌بخش بوده باشد. به عنوان مثال، کوالسکی و رمبیلسکی با الهام از نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی، عملگر نابودی و حالت‌های همدوس مربوط به حرکت ذره کوانتومی روی حلقه، که ویژه بردار عملگر نابودی هستند، را تعیین کرده‌اند [۳]. حالت‌های همدوس وابسته به حرکت ذره روی کره  $S^2$  نیز توسط رادکلیفت، گیل‌مور و پريلموف ارائه شده‌اند [۴]. مشخصه مهم این حالت‌ها این است که توسط نقاطی روی کره، فضای پیکربندی، برچسب‌گذاری می‌شوند. در مطالعه دیگر، کوالسکی و رمبیلنسکی حالت‌های همدوس مربوط به ذره روی کره  $S^2$  را، متناظر با نقاطی روی فضای فاز کلاسیکی

فضای فاز کلاسیکی وابسته یعنی  $T^*(S^d)$  یا به صورت معادل کره مختلط  $S^d_C$  برچسب گذاری می شوند. ۲- ویژه بردار عملگر نابودی هستند، بنابراین از نوع حالت های همدوس پريلموف نیستند. ۳- بر حسب هسته گرمایی<sup>۱</sup>، جواب معادله گرما، که تابعی تحلیلی روی کره است، به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\rho^d_\tau(\vec{a}, \vec{x}) = \langle \delta_x | \psi^{\tau}_d(\vec{a}) \rangle, \vec{a} \in S^d_C, x \in S^d, \quad (2)$$

که  $\langle \delta_x |$  و  $|\psi^{\tau}_d(\vec{a})\rangle$  به ترتیب ویژه بردار بهنجارش ناپذیر و حالت های همدوس وابسته به کره مختلط  $d$ - بعدی هستند. سنجه مناسب روی کره مختلط نیز به صورت ضرب سنجه روی هسته گرمایی هذلولی وار  $d$ - بعدی در سنجه ناورد روی کره  $S^d$  در نظر گرفته می شود [۸].

ما در این کار، ابتدا به تعیین حالت های همدوس و عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت ذره روی حلقه بر اساس تحلیل کوالسکی و رمیلنسکی و مختلط کننده تیمن [۹] و [۱۰] می پردازیم. سپس سعی می کنیم با استخراج حالت های همدوس روی حلقه از هسته گرمایی مربوطه و اعمال کوانتش برزین روی مشاهده پذیرهای کلاسیکی مناسب، عملگرهای نابودی و خلق را در این مورد تعیین کرده و نتایج حاصل از این دو روش را با هم مقایسه کنیم. در پایان روش کوانتش برزین را در مورد حرکت ذره روی کره به کار می بریم و عملگرهای نابودی و خلق تعیین شده را با آنهایی که توسط کوالسکی و رمیلنسکی تعیین شده اند، مقایسه می کنیم.

## ۲. تحلیلی بر کار کوالسکی و رمیلنسکی در حرکت ذره روی حلقه

کوالسکی و رمیلنسکی با توجه به معادله ویژه مقداری حالت های همدوس استاندارد و تعریف عملگر یکانی  $\hat{U} = e^{i\hat{\phi}}$  به عنوان عملگر موقعیت و استفاده از لم بیکر هاسدورف در

مشخص کردند نه فضای پیکربندی [۵]. حالت های معرفی شده مشابه با روش باروت و جیراردلو [۶] ویژه بردار عملگر نابودی (عملگر غیر هرمیتی) هستند. همچنین علی رغم این که از بردار خالص ساخته می شوند اما توسط عمل غیر یکانی گروه تعیین می شوند (در تضاد با ساختار نظریه گروه پريلموف).

هدف ما در این مقاله، تعیین عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت ذره روی حلقه و کره با اعمال کوانتش روی فضای فاز وابسته است. می دانیم فریند کوانتش، گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی است، طوری که سیستم کوانتومی در حد  $\hbar \rightarrow 0$  به سیستم کلاسیکی متناظر تبدیل شود. برای سیستم های کلاسیکی با فضای فاز تخت از نوع  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ، با مختصات  $q_i$  و  $p_i$ ، روش کوانتش استاندارد به کار می رود اما برای سیستم هایی با فضای فاز از نوع  $\mathbb{R}^n \times S^n$ ، این روش کوانتش کارآمد نخواهد بود. کوانتش برزین یا کوانتش به روش حالت های همدوس، روشی مناسب برای توصیف کوانتومی سیستم هایی است که فضای فازشان صفحه نیست. در این روش کوانتش، به هر مشاهده پذیر کلاسیکی در فضای فاز، مثل تابع  $f$ ، یک مشاهده پذیر کوانتومی، مثل عملگر  $O_f$ ، به صورت زیر نسبت داده می شود [۷]:

$$O_f = \int_X f |\psi\rangle \langle \psi| d\mu(\psi), \quad (1)$$

که  $X$  معرف فضای فاز و  $|\psi\rangle$  و  $d\mu(\psi)$  به ترتیب حالت های همدوس و سنجه مناسب روی فضای فاز هستند. در واقع رابطه انتگرالی کوانتش برزین در (۱) از رابطه تفکیک واحد روی حالت های همدوس نشأت می گیرد.

به بیان دیگر، شرط لازم جهت اعمال کوانتش برزین در رابطه با سیستم های مورد بررسی در این مقاله، ارائه یک زیر فضای هیلبرت (حالت های همدوس) و سنجه مناسب روی فضای فاز کلاسیکی مربوط به سیستم هایی است که ما در تعیین آنها از مقاله هال و میتچل بهره می بریم [۸]. در مرجع مذکور، خانواده ای از حالت های همدوس و رابطه تفکیک واحد مربوط به آنها، برای سیستمی با فضای پیکربندی کلاسیکی از نوع فضای متقارن فشرده و به طور خاص کره  $d$ - بعدی معرفی شده است. مشخصه این حالت ها این است که ۱- توسط نقاطی روی

۱. هدف از حل معادله گرما، تعیین تابعی است که در فیزیک کوانتومی از آن با عنوان انتشارگر یاد می شود. این تابع به صورت پیچش هسته گرمایی و یک تابع پیوسته و کراندار است که هسته گرمایی برای گروه ها و رویه وابسته به آنها کاملاً تعریف شده است.

یک محاسبه صریح، عملگر نابودی را برای حرکت ذره روی حلقه به صورت زیر:

$$\hat{Z} = e^{i(\hat{\phi} + i\hat{J})} = \hat{U} e^{-\frac{\hat{J}}{r}}, \quad (3)$$

تعیین کرده‌اند [۳] که با اندکی محاسبه می‌توان آن را در نمایش فوک به صورت زیر نوشت:

$$Z |j\rangle = e^{-\frac{j}{r}} |j+1\rangle, \quad (4)$$

که  $\{|j\rangle\}$  مجموعه‌ای از بردارهای متعامد هستند که رابطه بستاری را برآورده می‌کنند:

$$\sum_j |j\rangle \langle j| = \hat{I}, \quad (5)$$

همچنین آنها، حالت‌های همدوس مربوطه را به عنوان ویژه بردار عملگر نابودی، به صورت زیر:

$$|l, \varphi\rangle = |\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{lj - ij\varphi} e^{-\frac{j}{r}} |j\rangle, \quad (6)$$

و با رابطه تفکیک واحد

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^r}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-l'r} |l, \varphi\rangle \langle l, \varphi| = \hat{I}, \quad (7)$$

تعیین کردند که  $\xi = e^{-l + i\varphi}$ .

با نگاهی به رابطه (۴) واضح است که عملگر معرفی شده در مقاله کوالسکی و رمبیلسکی، مشابه با عملگر خلق عمل می‌کند نه عملگر نابودی. به راحتی می‌توان نشان داد که  $\hat{Z}' = e^{-i(\hat{\phi} + i\hat{J})}$  گزینه مناسبی برای عملگر نابودی است.   
 که:

$$\hat{Z}' = \sum_j e^{\frac{j}{r}} |j-1\rangle \langle j|.$$

برای این انتخاب جدید می‌توان رابطه جبری به صورت زیر را تحقیق کرد:

$$[\hat{J}, \hat{Z}'] = -Z', \quad [\hat{J}, \hat{Z}'^\dagger] = Z'^\dagger, \quad (8)$$

که همتای جبر نوسانگر هماهنگ ساده به صورت

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad (9)$$

برای عملگرهای بوزونی خلق و نابودی و عملگر تعداد است با این تفاوت که  $[\hat{Z}', \hat{Z}'^\dagger] = 0$ . همچنین بین عملگر نابودی  $\hat{Z}'$  و عملگر معرفی شده در رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$\hat{Z}' = \hat{T} \hat{Z} \hat{T}^{-1}, \quad (10)$$

که  $\hat{T}$  عملگر پاد یکانی وارونی زمانی است. از رابطه بالا واضح است که هر چیزی که در یک جهت زمانی خلق شود در جهت مخالف نابود می‌شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که با این انتخاب جدید برای عملگر نابودی، حالت‌های همدوس باروت جیراردلو یعنی:

$$|l, \varphi\rangle = |\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ij(\varphi + il)} e^{-\frac{j}{r}} |j\rangle.$$

نقش ویژه بردار نابودی ایفا می‌کنند.

در اینجا نشان می‌دهیم که می‌توان مباحث بالا را بر اساس ارتباط عملگرهای خلق و نابودی با مختلط ساز تیمن ثابت کرد. مزیت روشی که ما اینجا ارائه می‌دهیم در این است که این روش قابل تعمیم به ابعاد بالاتر است.

مختلط کننده ابزاری ریاضی است که توسط تیمن معرفی شده است. این تابع به ما این امکان را می‌دهد که یک قطبش مختلط روی فضای فاز از فضای پیکربندی ایجاد کنیم.

تیمن در مقاله خود به هر تابع روی فضای فاز که برای آن  $\exp\{., C\}$  همگرا است، اجازه می‌دهد که مختلط کننده باشد طوری که  $C$  معرف تابع مختلط کننده است و به صورت نسبت انرژی جنبشی بر بسامد زاویه‌ای تعریف می‌شود [۹ و ۱۰].

بر این اساس اگر مختصات موضعی روی رویه دوتایی  $M$  (که در فیزیک می‌تواند فضای فاز باشد) را با  $x_k$  نشان دهیم مختصات مختلط شده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$z_k(m) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \{x_k, C\}_n(m), \quad (11)$$

که در اینجا از گروه پواسون با نمادگذاری زیر استفاده شده است:

$$m := (x_k, p_k), \{C, x_k\}_0 = x_k, \{C, x_k\}_{n+1} = \{C, \{C, x_k\}_n\},$$

اثر عملگرهای نابودی و خلق روی کت پایه  $|j\rangle$  به صورت زیر هستند:

$$Z'|j\rangle = e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle, \quad (17)$$

$$Z'^{\dagger}|j\rangle = e^{j+\frac{1}{r}} |j+1\rangle. \quad (18)$$

### ۳. تعیین حالت‌های همدوس و کوانتش برزین روی

#### حلقه

هدف ما در این بخش، کوانتش به روش برزین برای حرکت ذره کوانتومی روی حلقه  $S^1$  با فضای فاز حلقه مختلط به صورت:

$$S^1_{\mathbb{C}} = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{C}^r \left| \vec{a}(\vec{x}, \vec{p}) = \cosh p\vec{x} + i \frac{\sinh p}{p} \vec{p} \right. \right\}, \\ = \{ \vec{a} = (a_1, a_r) = (\cos(\beta + ip), \sin(\beta + ip)) \}, \quad (19)$$

است. لازم به ذکر است که ما در این بخش، نمایش  $(\beta, m)$  که در مقاله هال و میتچل [۸] آمده است را دنبال می‌کنیم نه نمایش  $(\varphi, l)$  کوالسکی و رمبیلنسکی.

ابزار مورد نیاز برای این منظور حالت‌های همدوس است. روشی که ما برای تعیین آنها پیش می‌گیریم بر اساس بیان هال و میتچل از حالت‌های همدوس برحسب هسته گرمایی طبق رابطه (۲) است.

این هسته گرمایی برای حلقه مختلط به صورت زیر است [۸]:

$$\rho'_{\tau}(\vec{a}, \vec{x}) = (\tau\pi\tau)^{-\frac{1}{r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\vec{\theta} - \tau\pi n)^T}{\tau\tau}}, \quad (20)$$

که با اعمال قاعده جمع پواسون [۱۱] به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho'_{\tau}(\vec{a}, \vec{x}) = \frac{1}{\tau\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vec{\theta}} e^{-\tau n^T}. \quad (21)$$

که  $\vec{\theta} = \cos^{-1}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{r})$  زاویه مختلط است. با انتخاب بردار بهنجار ناپذیر به صورت زیر:

$$\{z_k, z_k\} = \{\bar{z}_k, \bar{z}_k\} = 0.$$

تیمن همتای کوانتومی این نقطه از فضای فاز، یعنی

$$\hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n [\hat{x}, \hat{C}](n)}{n!} = e^{-\frac{\hat{C}}{\hbar}} \hat{x} e^{\frac{\hat{C}}{\hbar}}, \quad (12)$$

را به عنوان عملگر نابودی معرفی می‌کند ( $\hat{C}$  همتای کوانتومی مختلط کننده تیمن است).

اکنون با توصیفی که از مختلط کننده تیمن ارائه شد، در موقعیتی هستیم که از این ابزار ارزشمند ریاضی در تعیین عملگرهای خلق و نابودی مربوط به حرکت ذره روی حلقه بهره ببریم. با انتخاب تابع مختلط کننده کوانتومی به صورت  $\hat{C} = \frac{\hat{J}^2}{r}$  می‌توان نوشت:

$$\hat{Z}'_l = e^{-\frac{\hat{J}^2}{r}} \hat{x}_l e^{\frac{\hat{J}^2}{r}},$$

$$\hat{Z}'_r = e^{-\frac{\hat{J}^2}{r}} \hat{x}_r e^{\frac{\hat{J}^2}{r}},$$

که

$$\hat{x}_l = \frac{\hat{U} + \hat{U}^{\dagger}}{r}, \quad (13)$$

$$\hat{x}_r = \frac{\hat{U} - \hat{U}^{\dagger}}{ri}. \quad (14)$$

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد:

$$\hat{Z}'_l = \frac{1}{r} \left\{ \sum_j e^{-j-\frac{1}{r}} |j+1\rangle \langle j| + \sum_j e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle \langle j| \right\}, \quad (15)$$

$$\hat{Z}'_r = \frac{1}{ri} \left\{ \sum_j e^{-j-\frac{1}{r}} |j+1\rangle \langle j| - \sum_j e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle \langle j| \right\}. \quad (16)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۳) و (۱۴) مؤلفه‌های عملگر خلق نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{Z}'_l{}^{\dagger} = e^{\frac{\hat{J}^2}{r}} \hat{x}_l e^{-\frac{\hat{J}^2}{r}},$$

$$\hat{Z}'_r{}^{\dagger} = e^{\frac{\hat{J}^2}{r}} \hat{x}_r e^{-\frac{\hat{J}^2}{r}}.$$

با انتخاب ترکیب مناسبی از مؤلفه‌های عملگر نابودی و خلق، به راحتی می‌توان نشان داد:

$$(\hat{Z}'_l - i\hat{Z}'_r) = e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle \langle j| = e^{-i(\hat{\phi} + i\hat{J})} = \hat{Z}'_l,$$

$$(\hat{Z}'_l{}^{\dagger} + i\hat{Z}'_r{}^{\dagger}) = e^{j+\frac{1}{r}} |j+1\rangle \langle j| = e^{i(\hat{\phi} - i\hat{J})} = \hat{Z}'_l{}^{\dagger}.$$

$$\hat{O}_{\bar{a}_i} = \hat{O}_{a_i} |_{t \rightarrow -t}, \quad i=1,2. \quad (27)$$

به راحتی می توان روابط ویژه مقداری زیر را در مورد این عملگرها ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \hat{O}_{a_i} |\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle &= a_i |\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle, \\ \langle \psi_i^\tau(\bar{a}) | \hat{O}_{\bar{a}_i} &= \langle \psi_i^\tau(\bar{a}) | \bar{a}_i. \end{aligned}$$

همچنین با انتخاب ترکیب مناسبی از مؤلفه های عملگرهای خلق و نابودی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{O}_{e^{i(\beta+ip)}} &= \hat{O}_{a_i} + i\hat{O}_{a_r} = \sum_m e^{\tau(m-\frac{1}{r})} |m-1\rangle\langle m|, \\ \hat{O}_{e^{-i(\beta-ip)}} &= \hat{O}_{\bar{a}_i} - i\hat{O}_{\bar{a}_r} = \sum_m e^{\tau(m+\frac{1}{r})} |m+1\rangle\langle m|. \end{aligned}$$

اثر این عملگرها روی کت پایه  $|m'\rangle$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{O}_a |m'\rangle = e^{\tau(m'-\frac{1}{r})} |m'-1\rangle, \quad (28)$$

$$\hat{O}_{\bar{a}} |m'\rangle = e^{\tau(m'+\frac{1}{r})} |m'+1\rangle. \quad (29)$$

ملاحظه می شود که نتایج این بخش کاملاً منطبق بر نتایج بخش قبل است که از بحث مختلط کننده تیمن به دست آمد.

#### ۴. توصیف حرکت ذره روی کره $S^r$ با روش

##### کوانتش برزین

کوالسکی و رمیلنسکی در [۵] به بررسی حرکت ذره روی کره  $S^r$  پرداخته اند. ما در این کار می خواهیم این کار را بر اساس روشی که در بخش ۳ پیش گرفتیم برای کره  $S^r$  با مؤلفه های:

$$\vec{x} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

و فضای فاز  $T^*(S^r)$  که با کره مختلط  $S^r_{\mathbb{C}}$  با مؤلفه های زیر یکرخت است:

$$\vec{a} = \begin{cases} x_i + i \frac{\sinh p}{p} p_i = \sin \theta_a \cos \varphi_a, \\ x_r + i \frac{\sinh p}{p} p_r = \sin \theta_a \sin \varphi_a, \\ x_r + i \frac{\sinh p}{p} p_r = \cos \theta_a, \end{cases} \quad (30)$$

انجام دهیم.

$$|\delta_x\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\beta} |n\rangle, \quad (22)$$

و در نظر گرفتن رابطه (۲) به راحتی می توان حالت های همدوس را به صورت زیر از هسته گرمایی استخراج کرد:

$$|\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau n^r}{r}} e^{in(\beta+ip)} |n\rangle, \quad (23)$$

که

$$N_i = \sum_n e^{-\tau n^r} e^{rnp} < \infty,$$

این حالت ها رابطه تفکیک واحد را به صورت زیر برآورده می کنند:

$$\int_{\vec{x} \in S^r} \int_{\vec{x}, \vec{p}=0} |\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle \langle \psi_i^\tau(\bar{a})| d\mu_i(\bar{a}) = \hat{I}_i, \quad (24)$$

که

$$d\mu_i(\bar{a}) = \left( \frac{N_i}{r\pi\sqrt{\pi\tau}} \right)^{\frac{1}{r}} e^{-\frac{p^r}{\tau}} dp d\beta,$$

واضح است که حالت های همدوس استخراج شده از هسته گرمایی با حالت های همدوس بر اساس روش باروت و جیراردلو در بخش قبل، کاملاً تطابق دارد.

می توان همای کوانتومی دو مؤلفه بردار شعاع مختلط  $\vec{a}(a_i, a_r)$  را با اعمال کوانتش برزین یعنی رابطه (۱) به صورت زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} \hat{O}_{a_i} &= O_{\cos(\beta+ip)} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \sum_m e^{\tau(m-\frac{1}{r})} |m-1\rangle\langle m| + \sum_m e^{-\tau(m+\frac{1}{r})} |m+1\rangle\langle m| \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{O}_{a_r} &= O_{\sin(\beta+ip)} = \\ &= \frac{1}{ri} \left\{ \sum_m e^{\tau(m-\frac{1}{r})} |m-1\rangle\langle m| - \sum_m e^{-\tau(m+\frac{1}{r})} |m+1\rangle\langle m| \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

به وضوح می توان تطابق این مؤلفه ها را به مؤلفه های عملگر نابودی، که در بخش قبلی به دست آمد، برای  $\tau=1$  مشاهده کرد.

به طور مشابه می توان مؤلفه های عملگرهای خلق را به عنوان همای کوانتومی مزدوج مؤلفه های بردار شعاع حلقه مختلط نیز به دست آورد که برای آنها رابطه زیر برقرار است:

$$\hat{O}_{a_i} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{l,m} e^{\tau l} [b_{1i} |l-l, m+l\rangle \langle l, m| - b_{1r} |l-l, m-l\rangle \langle l, m|] + \sum_{l,m} e^{-\tau(l+1)} [b_{1r} |l+l, m-l\rangle \langle l, m| - b_{1i} |l+l, m+l\rangle \langle l, m|] \right\} \quad (38)$$

$$\hat{O}_{a_r} = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{l,m} e^{\tau l} [-b_{1i} |l-l, m+l\rangle \langle l, m| - b_{1r} |l-l, m-l\rangle \langle l, m|] + \sum_{l,m} e^{-\tau(l+1)} [b_{1r} |l+l, m-l\rangle \langle l, m| + b_{1i} |l+l, m+l\rangle \langle l, m|] \right\} \quad (39)$$

$$O_{a_r} = \sum_{l,m} e^{\tau l} c_{1i} |l-l, m\rangle \langle l, m| + e^{-\tau(l+1)} c_{1r} |l+l, m\rangle \langle l, m|, \quad (40)$$

که

$$\begin{aligned} b_{1i} &= \sqrt{\frac{(l-m-1)(l-m)}{(r l-1)(r l+1)}}, \\ b_{1r} &= \sqrt{\frac{(l+m-1)(l+m)}{(r l-1)(r l+1)}}, \\ b_{1i} &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+r)}{(r l+1)(r l+r)}}, \\ b_{1r} &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+r)}{(r l+1)(r l+r)}}. \end{aligned} \quad (41)$$

و

$$\begin{aligned} c_{1i} &= \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(r l-1)(r l+1)}}, \\ c_{1r} &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(r l+1)(r l+r)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

با نگاهی به مؤلفه‌های عملگر نابودی برای حرکت ذره روی کره، که توسط کوالسکی و رمیلنسکی در مرجع [۵] به دست آمده، می‌توان مشاهده کرد که آنها با مؤلفه‌های عملگر نابودی به دست آمده با روش ما برای  $\tau=1$  منطبق است.

با تکرار محاسبات، به راحتی می‌توان عملگرهای خلق را نیز برای حرکت ذره روی کره دو بعدی به دست آورد که برای آنها خواهیم داشت:

$$\hat{O}_{\bar{a}_i} = \hat{O}_{a_i} |_{\tau \rightarrow -\tau}, \quad i=1,2,3.$$

همچنین می‌توان روابط ویژه مقداری زیر را برای این عملگرها نیز تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} \hat{O}_{a_i} |\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle &= a_i |\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle, \\ \langle \psi_i^\tau(\bar{a}) | \hat{O}_{\bar{a}_i} &= \langle \psi_i^\tau(\bar{a}) | \bar{a}_i, \quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

## ۵. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله حالت‌های همدوس مورد نیاز برای ذره متحرک

هسته گرمایی روی  $S^r_{\mathbb{C}}$  به صورت زیر است [۸]:

$$\rho_r^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = (r\pi\tau)^{-1} e^{\frac{\tau}{r}} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\varphi - r\pi n) e^{-\frac{(\varphi - r\pi n)^2}{r\tau}}. \quad (31)$$

با به کار بردن قاعده جمع پواسون می‌توان هسته گرمایی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_r^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = \frac{1}{r\sqrt{r\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (rn+1) e^{-\frac{\tau n(n+1)}{r}} \int_0^\pi \frac{\sin\varphi(n+\frac{1}{r})}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} d\varphi. \quad (32)$$

با استفاده از روابط مربوط به چند جمله‌ای های لژاندر و ارتباط آنها با هماهنگ‌های کروی می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_r^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\frac{\tau n(n+1)}{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta_a, \varphi_a), \quad (33)$$

با انتخاب بردار صوری (بهنجار نشده) زیر

$$|\delta_x\rangle = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) |l, m\rangle, \quad (34)$$

می‌توان حالت‌های همدوس برای یک ذره متحرک روی کره را به صورت زیر به دست آورد:

$$|\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_r}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\frac{\tau}{r} l(l+1)} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (35)$$

این حالت‌های همدوس رابطه تفکیک واحد زیر را برآورده می‌کنند:

$$\int_{\bar{x} \in S^r} \int_{\bar{x}, \bar{p} \in \mathbb{R}^3} |\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle \langle \psi_r^\tau(\bar{a})| d\mu_r(\bar{a}) = \hat{I}_r, \quad (36)$$

که

$$d\mu_r(\bar{a}) = \frac{e^{-\frac{\tau}{r}}}{r\pi\sqrt{(r\pi\tau)^r}} \int_{r p}^{\infty} \frac{se^{-\frac{s}{r\tau}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh r p}} ds \frac{\sinh r p}{r p} d\bar{x} d\bar{p}. \quad (37)$$

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که این حالت‌ها کاملاً بر حالت‌های همدوس که توسط کوالسکی و رمیلنسکی برای حرکت ذره روی کره در [۵] به دست آمده، تطابق دارد.

با اعمال کوانتش برزین، روی مؤلفه‌های بردار  $\bar{a}$  می‌توان همتهای کوانتومی آنها را به صورت زیر به دست آورد:

بین نتایج ما و کارهای کوالسکی-رمبیلنسکی برای  $\tau=1$  حاصل شد. با توجه به این که می توان روش مبتنی بر کوانتش برزین را به ابعاد بالاتر تعمیم داد این روش را می توان برای فضاهای فاز متقارن غیر از کره نیز به کار برد.

روی حلقه و کره  $S^2$  را بر اساس هسته گرمایی ارائه شده توسط هال و میتچل معرفی کردیم. همچنین مؤلفه های عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت یک ذره کوانتومی روی حلقه بر اساس مختلط ساز تیمن را بررسی کردیم که کاملاً بر کار کوالسکی و رمبیلنسکی منطبق شد. نهایتاً به روش کوانتش برزین عملگرهای خلق و نابودی را برای حرکت ذره روی حلقه و کره  $S^2$  دنبال کردیم که خوشبختانه تطابق خیلی خوبی

## مراجع

1. R J Glauber, *Phys. Rev.* **131**(1963) 2766.
2. J P Gazeau , "Coherent states in quantum physics", Wiley-VCH, Berlin (2009).
3. K Kowalski, J Remielinski, and L C Papaloucas, *J . Phys.A: Math.Gen* **29** (1996) 4149.
4. A Perelomov, "Generalized coherent states and their application", Springer-verlag, Berlin, Heidelerge, Newyork, London, Parise, Tokyo (1986).
5. K Kowalski and J Remielinski, *J. Phys. A : Math. Gen*, **33** (2000) 6035.
6. A O Barut, "Dynamic group and generalized symmetries in quantum theory" University of Canterbury, Christchurch (1971).
7. E A Berezin, *Common. Math. Phy.* **40** (1975) 153.
8. B Hall and J J Mitchell, *J. Math. Phys.* **43** (2002).
9. T Thiemann, *Class. Quantum Grav*, **23** (2006) 2063.
10. T Thiemann, "Modern canonical quantum general relativity", Cambridge University Press, (2007).
11. B I S Gradshteyn and I M Ryshik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Fizmatgiz, Moscow. Lett. A (1994).