

تقارن نودر در گرانش تعمیم یافته دور همسان

امین رضایی اکبریه، نسرین اقبالی قاضیجهانی و سبحان کاظم پور

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

پست الکترونیکی: am.rezaei@tabrizu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۱۲/۱۴)

چکیده

در این مقاله، نظریه اصلاح شده گرانش $f(T, \tau)$ را مورد بررسی قرار دادیم که در آن T و τ به ترتیب نشان دهنده نرده‌ای-پیچش و رد تانسور انرژی-تکانه است. سپس با مطالعه کیهان شناسی این مدل نشان دادیم که مدل گرانش $f(T, \tau)$ همخوانی خوبی با مشاهدات انجام شده دارد. نوع تابعیت $f(T, \tau)$ را می‌توان با توجه به عوامل گوناگون تعیین کرد. مهم‌ترین انگیزه برای تعیین تابعیت $f(T, \tau)$ این است که لاگرانژی مدل از یک تقارن پیوسته نودری تبعیت کند. بنابراین، با توجه به رهیافت نودر، سعی کردیم که تابعیت $f(T, \tau)$ را مشخص کنیم. همچنین مدل پیشنهاد شده باید به لحاظ پدیده شناسی، رفتار سازگاری با مشاهدات داشته باشد. بنابراین، پیش بینی‌های مدل مطرح شده را با محدودیت‌های مشاهداتی مقایسه کردیم که می‌توان به تابش پس زمینه کیهانی و نمودار هابل به عنوان مثال اشاره کرد. در این مقاله، مدل گرانش $f(T, \tau)$ را در فضا زمان FRW مورد بررسی قرار دادیم. بنابراین، لاگرانژی موثر را با متغیرهای مستقل، عامل مقیاس a ، نرده‌ای پیچش T و رد تانسور انرژی-تکانه τ به دست آوردیم. بعد از اعمال تقارن نودر به لاگرانژی، توانستیم شکل مناسبی برای تابع $f(T, \tau)$ را مطرح کنیم. در ادامه، کمیت پایسته نودری را برای این مدل به دست آوردیم.

واژه‌های کلیدی: کیهان شناسی، گرانش اصلاح شده، نرده‌ای-پیچش، گرانش دورهمسان

۱. مقدمه

مشاهدات اخیر شتاب دیر هنگام جهان و وجود ماده تاریک [۱-۳]، یک چالش نظری اساسی در نظریه‌های گرانشی ایجاد کرده است. یک احتمال در توضیح مشاهدات با این فرض صورت می‌گیرد که در مقیاس‌های بزرگ نظریه نسبیت عام انیشتین از کار می‌افتد و نیاز به تعمیم و اصلاح این نظریه وجود دارد. در بیشتر مدل‌های نظری ارائه شده تابع متغیر نرده‌ای ریچی R به

جای کنش انیشتین و هیلبرت جایگزین می‌شود [۴]. این مدل‌ها اخیراً به طور گسترده‌ای بررسی شده‌اند. باید خاطر نشان کنیم که مدل‌های نوشته شده در چارچوب گرانش $f(R)$ توانایی توضیح شتاب کیهانی دیر هنگام جهان را دارند [۵]. اما باید بدانیم که این ساده‌ترین راه حل نیست و گرانش دیگری که اخیراً توجه زیادی به آن می‌شود گرانش $f(T)$ هست. خصوصیات ذاتی این گرانش بر اساس معادله نسبتاً قدیمی

Λ CDM باشد. در مقاله [۸] نشان داده شده است که مدل گرانش $f(T, \tau)$ می تواند نامزدی برای رژیم های فانتوم و کوپیتینسنس^۵ باشند.

در این مقاله بر آن هستیم که گرانش $f(T, \tau)$ را در فضا زمان FRW مورد بررسی قرار دهیم که برای این منظور، لاگرانژی موثر را با متغیرهای مستقل، عامل مقیاس a ، نرده ای پیچش T و رد تانسور انرژی-تکانه τ به دست می آوریم. با درخواست این که جواب های مدل گرانش $f(T, \tau)$ از تقارن نودر تبعیت کنند می توان تابعیت مناسبی برای $f(T, \tau)$ به دست آورد. در واقع ایده استفاده از تقارن نودر در کیهان شناسی موضوع جدیدی نیست و در واقع مقالات زیادی در این زمینه منتشر شده است و تقارن نودر به طور گسترده ای در مدل های کیهان شناسی همسانگرد در گرانش $f(T)$ برای مشخص کردن شکل صریح دورموازی از $f(T)$ و پیدا کردن راه حل دقیق متناظر مورد استفاده قرار گرفته است [۹-۱۵]. بعد از اعمال تقارن نودر به لاگرانژی، سعی خواهیم کرد که پارامترهای مختلف کیهان شناسی را به دست بیاوریم. در نهایت سازگاری این مدل با نتایج مشاهداتی را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲. مروری بر گرانش $f(T, \tau)$

در نظریه دورموازی مقادیر اساسی، پایه های ویربین ها چهارتایی ها e_{μ}^i هستند. این پایه ها متعامد و مستقل از مختصات هستند به طوری که $\delta_{\mu}^i \delta_{\nu}^j = e_{\mu}^i e_{\nu}^j$ که μ و ν شاخص های مختصات روی منیفلد هستند و مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را می پذیرند. از طرفی متریک را می توانیم بر حسب ویربین ها به صورت $g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e_{\mu}^i e_{\nu}^j$ بیان کنیم که در آن η_{ij} متریک فضای مینکوفسکی است. در گرانش دورموازی اتصال بدون انحنا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = e_i^{\alpha} \partial_{\nu} e_{\mu}^i = -e_{\mu}^i \partial_{\nu} e_i^{\alpha}. \quad (۱)$$

دورموازی^۱ نسبت عام بنا نهاده شده است. هم ارزی دورهمسان نسبت عام^۲ مخصوصا به جای اتصال بدون تاب لویچی ویتای نسبت عام کلاسیک (GR)، از اتصال بدون انحنا ویتزن باخ^۳ بهره گرفته شده است که میدان های دینامیکی متناظر چهار ویربین^۴ مستقل خطی هستند. بنابراین تانسور تاب تمامی اطلاعات میدان گرانشی را شامل می شود. از طرف دیگر می توان دید که نتایج گوناگون نشان می دهند که باید ثابت کیهان شناسی دینامیک داشته باشد. به طور دقیق تر می توان گفت که ثابت کیهان شناسی وابسته به رد تانسور انرژی-تکانه τ است [۶]. بنابراین وارد کردن τ در کنش می تواند به نظریه $f(T, \tau)$ منجر شود. این نظریه اولین بار در مرجع [۷] مطرح شد که منجر به نتایج جالب توجهی شد. اخیرا در مقاله [۶] نشان داده شده است که این نظریه مزیت هایی دارد که از آن جمله می توان به سادگی محاسبات عددی و سازگاری این مدل با نتایج مشاهدات اخیر اشاره کرد. همچنین نشان داده اند که این مدل می تواند جهان در حال انبساط شتابدار را به خوبی توصیف کند. بنابراین از آنجایی که گرانش $f(T, \tau)$ می تواند نامزدی مناسب برای انرژی تاریک باشد، می توان گفت که این نظریه یک جایگزین مناسب برای مدل گرانش استاندارد است. در مقاله [۷] مومنی و همکارش نشان داده اند که گرانش $f(T, \tau)$ می تواند جنبه های پدیده شناسی جالب کیهان شناسی را به ارمغان آورد. یعنی همزمان که انبساط عالم را در زمان تورم توصیف می کند، می تواند در دوره ماده غالب به یک حالت غیر شتابدار و سرانجام در زمان های بعدی منجر به گسترش شتاب دار شود. در مقاله [۸] به محدودیت های مشاهداتی این مدل پرداخته شده است و برای حالات مختلف $f(T, \tau) = T + g(\tau)$ و $f(T, \tau) = T \times g(\tau)$ نشان داده اند که هر دو حالت با داده های ابرنواختر نوع یک سازگار هستند. همچنین در همین مقاله نشان داده شده است که یکی از مدل های $f(T, \tau)$ می تواند جایگزین خوبی برای مدل

۱. Teleparallel

۲. Teleparallel Equivalent General Relativity

۳. Weitzenböck

۴. Vierbein

۵. Quintessence

۶. Tetrad

در این لاگرانژی، میدان‌های T, a و وابسته به زمان هستند که از طریق تابع $f(T, \tau)$ به هم جفت شده‌اند. تکانه‌های متناظر با متغیرها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = -12a\dot{a}f_T, \quad (9)$$

$$p_T = p_\tau = 0, \quad (10)$$

از روی لاگرانژی نقطه‌ای (۸) می‌توان انرژی کل را محاسبه کرد و اگر آن را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\epsilon H^2 f_T + f - f_T T - f_\tau (\tau - 3P_m + \rho_m) = 0, \quad (11)$$

همین طور می‌توان معادلات حرکت مربوط به متغیرها را به دست آورد که معادله حرکت مربوط به a به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon H^2 f_T + 12 \frac{\dot{a}}{a} f_T + 12 H (\dot{T} f_{TT} + \dot{\tau} f_{T\tau}) + \\ r(f - f_T T - f_\tau (\tau - 3P_m + \rho_m) + P_m) + \\ a(f_\tau (3P_m a - \rho_m a) + P_m a) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم که با استفاده از رهیافت نودر چه تابعیتی برای $f(T, \tau)$ به دست می‌آید.

۳. رهیافت تقارن نودر

در این بخش تقارن نودر را برای لاگرانژی (۸) نشان می‌دهیم. ساختار فضای نقطه‌ای لاگرانژی بندادی^۲ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, T, \tau)$ ، $Q = \{a, T, \tau\}$ و فضای تانژانت مربوطه $TQ = \{a, T, \tau, \dot{a}, \dot{T}, \dot{\tau}\}$ وجود تقارن نودر حضور میدان

بردار X به شکل زیر را اعمال می‌کند:

$$X = \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} + \dot{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \dot{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}} + \dot{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} = 0. \quad (13)$$

که α, β, γ به a, T, τ وابسته هستند. شرایط تقارن نودر ایجاب می‌کند که میدان برداری در مشتق لی لاگرانژی به صفر میل کند.

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L} = 0. \quad (14)$$

اجزاء تانسور تاب توسط بخش پادمقارن اتصال زیر به دست می‌آیند:

$$T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_i^\alpha (\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i). \quad (2)$$

اجزاء تانسور اتصال و نرده‌ای تاب به صورت زیر هستند:

$$K_\alpha^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (T_\alpha^{\mu\nu} - T_\alpha^{\nu\mu} - T_\alpha^{\mu\nu}), \quad (3)$$

$$T = T_{\mu\nu}^\alpha S_\alpha^{\mu\nu}. \quad (4)$$

به طوری که تانسور جدید $S_\alpha^{\mu\nu}$ از اجزاء تانسورهای تاب و انحراف^۱ ساخته می‌شود:

$$S_\alpha^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (K_\alpha^{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu T_\beta^{\beta\nu} - \delta_\alpha^\nu T_\beta^{\beta\mu}), \quad (5)$$

در این جا قصد داریم که مدل گرانش $f(T, \tau)$ را مورد بررسی قرار دهیم که کنش آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$s = \int d^4x \sqrt{-g} f(T, \tau). \quad (6)$$

که در آن $\sqrt{-g} = \det(e_i^\alpha)$ است. دقت کنید که در اینجا از

واحدهای طبیعی استفاده کرده‌ایم که در آن $c = 16\pi$ و $G = 1$

است. در این کنش ما تنها روی قسمت $f(T, \tau)$ تمرکز کرده‌ایم و مشارکت ماده در لاگرانژی را از طریق جفت شدگی که تحت تابع $f(T, \tau)$ است، در نظر گرفته‌ایم. در پس زمینه

متری FRW ، $T = -\epsilon \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\epsilon H^2$ ، و $\tau = 3P_m(a) - \rho_m(a)$ است.

با استفاده از ضرایب نا معین می‌توان کنش (۶) را به صورت زیر نوشت:

$$s = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ f(T, \tau) - \lambda_T \left(T + \epsilon H^2 \right) - \lambda_\tau \left(\tau - 3P_m(a) - \rho_m(a) \right) \right\}, \quad (7)$$

که با ورودش کنش نسبت به T و τ می‌توان ضرایب λ_T و λ_τ را به ترتیب برابر $f_T \equiv \partial f / \partial T$ و $f_\tau \equiv \partial f / \partial \tau$ به دست آورد. بنابراین می‌توان لاگرانژی نقطه‌ای را برای کنش (۷) به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L} = a^3 \left\{ f - f_T \left(T + \epsilon \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) - f_\tau (\tau - 3P_m + \rho_m) \right\}. \quad (8)$$

۲. Point-like canonical Lagrangian

۱. Contortion

معادله (۲۰) را هم می توان به صورت دو معادله زیر نوشت:

$$\frac{\alpha}{a} \left[r(f - Tf_T) + af_\tau(rP_{m,a} - \rho_{m,a}) \right] - T(\beta f_{TT} + \gamma f_{T\tau}) = 0, \quad (23)$$

و

$$r \frac{\alpha}{a} f_\tau + \beta f_{T\tau} + \gamma f_{T\tau} = 0, \quad (24)$$

حال با جایگذاری در رابطه (۲۳) و (۲۴) نتیجه می گیریم:

$$r(f - Tf_T) + af_\tau(rP_{m,a} - \rho_{m,a}) + (rn+1)Tf_T = 0, \quad (25)$$

و

$$-r(\beta f_{TT} + \gamma f_{T\tau}) f_\tau + (\beta f_{T\tau} + \gamma f_{T\tau})(rn+1) f_T = 0, \quad (26)$$

با ساده سازی رابطه (۲۶) می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{(rn+1) f_T f_{T\tau} - r f_\tau f_{T\tau}}{r f_\tau f_{TT} - (rn+1) f_{T\tau} f_T}, \quad (27)$$

حل معادلات فوق در حالت کلی دشوار است. بنابراین برای ساده سازی عبارت های مربوط به β و γ و شکل تابع $f(T, \tau)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\beta = \beta(a, T), \quad \gamma = \gamma(a, T), \quad (28)$$

و اگر انتخاب کنیم که:

$$f(T, \tau) = f_1(T) f_r(\tau), \quad (29)$$

از معادلات به دست آمده در (۲۴) و (۲۹) خواهیم دید که $\beta = \alpha_0 a^{n-1} \beta_1(T)$ و $\gamma = \alpha_0 a^{n-1} \gamma_1(\tau)$ بنابراین معادلات

فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f_{TT} \beta_1(T) + f_{T\tau} \gamma_1 + (rn+1) f_\tau = 0, \quad (30)$$

و همچنین

$$r f_\tau + \beta_1(T) f_{T\tau} + \gamma_1(\tau) f_{T\tau} = 0, \quad (31)$$

در ادامه با استفاده از رابطه (۲۷) و انجام کمی ریاضیات می توان نشان داد که تابعیت $f_1(T)$ و $f_r(\tau)$ به صورت رابطه زیر

است:

$$a(rP_{m,a} - \rho_{m,a}) = K, \quad (32)$$

برای تابع $f(T, \tau)$ هم می توان نوشت:

$$f(T, \tau) = f_0 T^{\frac{m}{r(n-1)}} e^{-\frac{(m+r)\tau}{K}}, \quad (33)$$

که در آن $f_0 = f_1 * f_r$ است. با جایگذاری این روابط در

معادلات (۳۲) و (۳۳) داریم:

$$\beta_1(T) = r(n-1)T, \quad \gamma_1(\tau) = K, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ r a^r [f - Tf_T - f_\tau(\tau - rP_m + \rho_m)] - \epsilon f_T \dot{a}^r \right\} + \\ & \beta \left\{ a^r [-f_{TT} - f_{T\tau}(\tau - rP_m + \rho_m)] - \epsilon f_{TT} \dot{a}^r \right\} + \\ & \gamma \left\{ a^r [-f_{T\tau}T - f_{T\tau}(\tau - rP_m + \rho_m)] - \epsilon f_{T\tau} \dot{a}^r \right\} + \\ & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \dot{\tau} \right) (-12 f_T \dot{a} \dot{a}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

حال ضرایب $\dot{a}^r, T, \dot{a}, \dot{T}, \dot{\tau}, a, \dot{a}^r, T, \dot{a}, \dot{T}, \dot{\tau}$ را برابر صفر قرار می دهیم، ضریب $\dot{a}^r \dot{T}$:

$$\left(\frac{\alpha}{a} + r \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) f_T + \beta f_{TT} + \gamma f_{T\tau} = 0. \quad (16)$$

ضریب $\dot{a}^r \dot{T}$:

$$-12 f_T a \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0 \rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0. \quad (17)$$

ضریب $\dot{a}^r \dot{\tau}$:

$$-12 f_\tau a \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = 0 \rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = 0. \quad (18)$$

از این دو معادله اخیر می توان نتیجه گرفت که α تنها تابعی از a است. برای باقی جملات نیز داریم:

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ r a^r [f - Tf_T - f_\tau(\tau - rP_m + \rho_m)] \right\} + \\ & \beta \left\{ a^r [-f_{TT} - f_{T\tau}(\tau - rP_m + \rho_m)] \right\} + \\ & \gamma \left\{ a^r [-f_{T\tau}T - f_{T\tau}(\tau - rP_m + \rho_m)] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

این معادله، عبارت درجه دوم با مؤلفه های

$\dot{a}^r, T, \dot{a}, \dot{T}, \dot{\tau}, a, \dot{a}^r, T, \dot{a}, \dot{T}, \dot{\tau}$ را به دست می دهد که ضرائب آنها توانی از τa و مشتقات جزئی آنها هستند. بنابراین عبارت ها به صورت جداگانه باید صفر باشند؛ که دو معادله زیر را تولید می کنند:

$$r \frac{\partial \alpha}{\partial a} f_T + \frac{\alpha}{a} f_T + \beta f_{TT} + \gamma f_{T\tau} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & r \frac{\alpha}{a} [f - Tf_T - f_\tau(\tau - rP_m + \rho_m)] + \\ & \alpha f_\tau \left(\frac{rP_{m,a}}{\rho_{m,a}} \right) - \beta \left[\frac{f_{TT}T}{f_{T\tau}(\tau - rP_m + \rho_m)} \right] - \\ & \gamma [Tf_{T\tau} + f_{T\tau}(\tau - rP_m + \rho_m)] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

اگر فرض کنیم که $\alpha = \alpha_0 a^n$ ، می توان از معادلات بالا نتیجه گرفت که:

$$\frac{\alpha}{a} = - \frac{\beta f_{TT} + \gamma f_{T\tau}}{(rn+1) f_T}, \quad (22)$$

۴. نتیجه گیری

در این مقاله مدل گرانش $f(T, \tau)$ را در فضا زمان FRW مورد بررسی قرار دادیم. برای این منظور لاگرانژی موثر را با متغیرهای مستقل، عامل مقیاس a و نردهای پیش T و رد تانسور انرژی-تکانه τ به دست آوردیم. با درخواست این که جوابهای مدل گرانش $f(T, \tau)$ از تقارن نودر تبعیت کنند توانستیم تابعیت مناسبی برای $f(T, \tau)$ ارائه دهیم. در واقع ایده استفاده از تقارن نودر در کیهان شناسی موضوع جدیدی نیست. در واقع مقالات زیادی در این زمینه منتشر شده است. تقارن نودر به طور گستردهای در مدل های کیهان شناسی همسانگرد در گرانش $f(T)$ برای مشخص کردن شکل صریح تله پارالل از $f(T)$ و پیدا کردن راه حل دقیق متناظر، مورد استفاده قرار گرفته است. بعد از اعمال تقارن نودر به لاگرانژی، توانستیم شکل مناسبی برای تابع $f(T, \tau)$ مطرح کنیم که به صورت
$$f(T, \tau) = f_0 T^{\frac{m}{r(n-1)}} e^{-\frac{(m+r)\tau}{K}}$$
 به دست آمده است. بعد از این، کمیت پایسته نودری را برای این مدل به صورت
$$Q = -12 \frac{ma^{\frac{c+r}{r}}}{c} \frac{dT}{dt} - \left(-\frac{m}{c} + 1\right) e^{-\frac{(m+r)\tau}{K}}$$
 به دست آوردیم. با استفاده از این نتایج متوجه شدیم که عامل مقیاس در چارچوب این مدل به صورت $a \sim t^{\frac{r}{2}}$ تحول می یابد. برای پی بردن به این که تئوری گرانشی $f(T, \tau)$ می تواند یک توصیف خوب از کیهان ارائه دهد یا نه، باید مطالعات گستردهای در این حوزه انجام گیرد. در واقع باید به طور ویژه، بررسی جزئیات داده های کیهانی از قبیل ابرنواختر یک-a، نوسانگرهای آگوستیک باریونی، تابش زمینه کیهانی و هسته زایی مهبانگ، جهت پیدا کردن محدودیت های بر پارامترهای تئوری صورت گیرد. همچنین، بعد از به دست آوردن حل های متقارن کروی، می توان در خصوص گرانش $f(T, \tau)$ و داده های منظومه خورشیدی نیز بررسی هایی انجام داد. علاوه بر این می توان معادلات مربوط به اختلالات برداری، نردهای و تانسوری را نیز استخراج کرد و پیش بینی های مربوطه را نیز ارزیابی کرد. همگی آنها می توانند انگیزه و موضوعی جهت انجام تحقیقات آینده باشند.

در نهایت ثابت های تقارن نودر از روابط زیر تبعیت می کنند:

$$\alpha = \alpha_* a^n, \quad \beta = 2\alpha_* (n-1) a^{n-1} T, \quad \gamma = \alpha_* K a^{n-1}, \quad (35)$$

به کمک رابطه (۲۷) و مشتق گیری از معادله یاد شده نسبت به T ، خواهیم دید که P_m و ρ_m از روابط زیر تبعیت می کنند:

$$P_m = \frac{P_0}{a^r}, \quad \rho_m = \frac{r P_0}{a^r} - K \ln a + c_1, \quad (36)$$

در عبارت های فوق c_1 و P_0 کمیت های ثابت هستند. با استفاده از روابط $\frac{\partial \ell}{\partial q} = \frac{dp_q}{dt}$ و $L_X \ell$ می توان کمیت های پایسته مرتبط با تقارن نودر را محاسبه کرد.

$$Q = \alpha p_a + \beta P_T + \gamma P_\tau, \quad (37)$$

با مقایسه رابطه اخیر با [۱۶] می توان مشاهده کرد که جمله اضافی ناشی از حضور τ در لاگرانژی مورد نظر، در مدل ما $n \neq -1$ و $Q = -12 f_T \dot{a} a \alpha$ است. با جایگذاری مقادیر به دست آمده در رابطه (۳۵) و سایر کمیت های ظاهر شده در رابطه فوق می توان وابستگی کمیت Q و عامل مقیاس a را به زمان به شکل زیر نشان داد.

$$Q = -12 \frac{ma^{\frac{c+r}{r}}}{c} \frac{dT}{dt} - \left(-\frac{m}{c} + 1\right) e^{-\frac{(m+r)\tau}{K}}. \quad (38)$$

عبارت فوق به ازای $m=3$ به معادله (۵۷) مقاله [۱۶] کاهش می یابد. با دقت در رابطه فوق می توان به این نتیجه رسید که جمله سوم در صورت کسر فوق ناشی از حضور τ در تابع $f(T, \tau)$ است. ثابت های m و c کمیت هایی هستند که از ساده سازی معادلات قبل ظاهر شده اند.

$$a \sim t^{\frac{r}{2}}. \quad (39)$$

این نکته قابل توجه است که حضور τ نقشی در عامل مقیاس a نداشته و جمله فوق مشابه عامل مقیاس ذکر شده در مقاله [۱۶] است.

مراجع

9. S B Nassur, et al., *Astrophys. Space Sci.* **360**, 2 (2015) 60.
10. R de Ritis et al., *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1091.
11. S Capozziello et al., *Phys. Rev. D* **80** (2009) 104030.
12. C Rubano et al., *Phys. Rev. D* **69** (2004) 103510.
13. G Esposito, et al., *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **8**, 8 (2011) 1815.
14. M Tsamparlis and A Paliathanasis, *Class. Quantum Grav.* **29**, 1 (2011) 015006.
15. S Basilakos, et al., *Phys. Rev. D* **83** (2011) 103512.
16. K Atazadeh and F Darabi, *Eur. Phys. J. C* **72** (2012) 2016.
1. S W Allen et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353** (2004) 547.
2. A G Riess, et al., *Astron. J.* **116** (1989) 1009.
3. E J Copeland, M Sami, and S Tsujikawa, *Int. J. Mod. D* **15** (2006) 1753.
4. T Clifton, and et al., *Phys. Rept.* **513** (2012) 1.
5. J W Moffat, arXiv:astro-ph/0606124 [astro-ph], (2006).
6. T Harko, et al., *Phys. Rev. D* **89** (2014) 124036.
7. D Momeni and R Myrzakulov, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **11**, 8 (2014) 145007.
8. I G Salako, et al., *Universe* **6** (2020) 167.