

پیچیدگی هولوگرافی برای گرانش های R^2 و R^3

علی ناصح^۱، قدیر جعفری^۱ و حامد زلفی^۲

۱. پژوهشگاه دانش های بنیادی، پژوهشکده ذرات و شتابگرها

۲. دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده فیزیک

پست الکترونیکی: hamed.zolfi@physics.sharif.edu

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۰۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۲/۲۸)

چکیده

در این مقاله تصحیحات مرتبه دوم و سوم تانسور انحنای پیچیدگی هولوگرافی یک حالت دما دار در نظریه میدان همدیس، مورد مطالعه قرار گرفته است. هندسه دوگان به این حالت دما دار، هندسه سیاهچاله شوارتزشایلد پاد دسپته است. محاسبات انجام شده در این مقاله نشان می دهد که در نظر گرفتن این جمله های جدید فقط به صورت ضریبی ثابت در نتیجه نهایی یعنی آهنگ رشد پیچیدگی در زمان های طولانی ظاهر می شوند.

واژه های کلیدی: دوگانی AdS/CFT، پیچیدگی کوانتومی، سیاهچاله

۱. مقدمه

از نسبت خاص می دانیم بیشترین سرعت موجود در طبیعت سرعت نور است و اطلاعات حداکثر با سرعت نور منتشر می شوند. زمانی که از اطلاعات سخن به میان می آید ناخودآگاه ذهن انسان به سمت رایانه متوجه می شود چون رایانه وسیله ای است که با آن اطلاعات پردازش و ذخیره می شود. می دانیم که رایانه یک سیستم فیزیکی است و بنا بر کاربرد آن دو سؤال اساسی مطرح می شود:

۱. بیشترین سرعتی که یک رایانه برای پردازش اطلاعات می تواند داشته باشد چقدر است؟

۲. بیشترین مقدار حافظه ای که یک رایانه می تواند داشته باشد چقدر است؟
این دو سؤال را می توان به هر سیستم فیزیکی دیگری تعمیم داد که در یک حجم از فضا- زمان چه مقدار آنتروپی می توان ایجاد کرد (همان طور که در ادامه خواهد آمد آنتروپی و اطلاعات از نظر مفهومی به یکدیگر نزدیک هستند) و این که یک سیستم فیزیکی حداکثر با چه سرعتی می تواند متحول شود. در ادامه مروری سریع به پاسخ داده شده به سؤال یک خواهد آمد. برای این که به این سؤال پاسخی کمی داده شود ابتدا آن را دقیق تر بیان می کنیم. می دانیم که برای یک رایانه کلاسیک بیشترین تعداد حالت متمایزی که یک سیستم می تواند در واحد

زمان پردازش کند متناظر با بیشترین تعداد عملگر در واحد زمان است. برای یک سیستم کوانتومی دو حالت متمایز حالت‌هایی هستند که بر هم عمود باشند؛ بنابراین می‌توان گفت حداقل زمان ممکن برای این که یک سیستم کوانتومی از یک حالت کوانتومی به یک حالت کوانتومی عمود بر آن برود سرعت تحول یا پردازش یک سیستم فیزیکی تعریف می‌شود. یک حالت کوانتومی دلخواه را می‌توان بر حسب ترکیب خطی از ویژه‌حالت‌های انرژی بیان کرد. برای این که حالت $|\psi(t=0)\rangle$ با زمان متحول شود باید عملگر تحول زمانی را روی آن اثر داد بنابراین داریم:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |E_n\rangle$$

هدف این است که زمانی را که طول می‌کشد تا $|\psi(t)\rangle$ بر $|\psi(t=0)\rangle$ عمود شود اندازه بگیریم، پس پارامتر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$A(t) = \langle \psi(t=0) | \psi(t) \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

برای سادگی فرض می‌کنیم انرژی پایه یعنی E_0 صفر باشد. اگر $A(t) = 0$ و $E = \langle E \rangle$ باشد به راحتی می‌توان نشان داد که زمان تعامل در رابطه زیر صدق می‌کند [۱، ۲]:

$$t \geq \frac{\hbar}{2E}$$

به مقدار $2E$ حد لوید می‌گویند. حال سعی می‌کنیم به سؤال دوم پاسخ گوئیم. این سؤال را این گونه مطرح می‌کنیم که آیا حد بالایی روی آنتروپی در یک حجم داده شده وجود دارد؟ بکشتاین به این سؤال پاسخ گفته است و نشان داده است که بیشترین آنتروپی در یک حجم داده شده، آنتروپی سیاهچاله است [۳، ۴ و ۵].

$$S[V, \partial V = A] \leq S_{B,H}$$

تا اینجا به این نتیجه رسیدیم که سیاهچاله بیشترین مقدار از اطلاعات را می‌تواند ذخیره کند از طرفی نیز می‌دانیم که سرعت تحول یک سیستم فیزیکی با حد $2E$ محدود می‌شود، و چون بیشترین مقدار انرژی در حجم معین در سیاهچاله ذخیره شده است، به این نتیجه می‌رسیم که سیاهچاله سریع‌ترین رایانه در

طبیعت است.

این ارتباط بین نظریه اطلاعات کوانتومی و فیزیک سیاهچاله‌ها به صورت دقیق‌تر و عمیق‌تری در سال‌های اخیر مورد مطالعه قرار گرفته است. نقطه مشترک این مطالعات استفاده از دوگانی AdS/CFT است. به طور مثال آنتروپی درهم‌تنیدگی در نظریه میدان‌های کوانتومی، توسط ریو و تاکایاناگی، به مساحت ابر سطح خاصی در فضای حجم پاددسته دوگان می‌شود. به صورت جالبی وقتی نظریه میدان کوانتومی دما دار می‌شود این ابر سطح توانایی نزدیک شدن به سطح افق سیاهچاله را داشته و در نتیجه هم از آنتروپی درهم‌تنیدگی و هم از آنتروپی دمایی به ما اطلاعات می‌دهد. توجه داشته باشیم که این ارتباط دوسویه است، یعنی اگر از آنتروپی درهم‌تنیدگی نظریه میدان اطلاع داشته باشیم می‌توانیم هندسه دوگان را نیز بازسازی کنیم [۶]. اما نکته‌ای که بایستی به آن توجه کرد این است که حتی با دما دار کردن سیستم، حداکثر اطلاعاتی که از کمیت آنتروپی درهم‌تنیدگی در مورد هندسه می‌توان به دست آورد عبارت است از هندسه بیرون از افق سیاهچاله. یا به صورت دقیق‌تر آنتروپی درهم‌تنیدگی قابلیت دادن اطلاعات از فرایندهایی را که با وجود تعادل ترمودینامیکی همچنان بازمان تغییر می‌کنند ندارد [۷].

کمیت دیگری که مکمل آنتروپی درهم‌تنیدگی در این راستا می‌باشد عبارت است از کمیت پیچیدگی. پیچیدگی کوانتومی میزان سختی رسیدن از یک حالت اولیه به یک حالت مورد نظر را مشخص می‌کند. این حالت مورد نظر با اعمال درگاه‌های ساده^۱ بر روی حالت اولیه به دست می‌آید. همان طور که گفته شد کمیت پیچیدگی حداقل عملگرهای لازم برای رسیدن از یک حالت اولیه به حالت نهایی را مشخص می‌کند که با نماد C نمایش داده می‌شود. برای این که پیچیدگی را دقیق‌تر تعریف کنیم یک فضای هیلبرت در نظر بگیریم که دارای حالت پایه $|0\rangle$ باشد. فرض کنید F_K مجموعه‌ای از بردارهایی در فضای هیلبرت هستند که از k تا درگاه پایه ساخته شده‌اند. پیچیدگی کوانتومی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$\frac{dC}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\pi} [(\gamma M - \Omega J) - (\gamma M - \Omega J)_{g.s.}]$$

همچنین می‌دانیم که وجود حد قطع در نمودارهای پنروز با CFT های مختل شده دوگان است [۱۲، ۱۳ و ۱۴]. با توجه به این نکته مطالعه پیچیدگی، اطلاعات جدیدی در مورد نحوه قرار گرفتن این حد قطع‌ها به دست می‌دهد که در درک ساختار فضا-زمان مفید بوده است. در این مقاله جمله‌های جدیدی در کنش اینشتین-هیلبرت در نظر گرفته شده‌اند و نشان داده می‌شود که روشن کردن این جمله‌ها فقط به صورت ضربی ثابت در نتیجه نهایی، یعنی آهنگ رشد پیچیدگی در زمان‌های طولانی ظاهر می‌شوند؛ و این خاصیتی جالب است که در این محاسبات نشان داده می‌شود.

شایان ذکر است که پیچیدگی هولوگرافی محاسبه شده در بالا برای کنش اینشتین-هیلبرت به دست آمده است.

از طرفی به خوبی دانسته شده است که این کنش در سطح کوانتومی دچار مشکلات بازبهنجارش می‌شود. تاکنون موفق‌ترین پیشنهادی که برای توضیح گرانش در سطح کوانتومی ارائه شده است نظریه ریسمان است. نظریه ریسمان که در آن موجودات بنیادی یک‌بعدی و یک مقیاس طول l_s دارند. نظریه ریسمان برهم‌کنش این موجودات را به خوبی توصیف می‌کند و برای برهم‌کنش ریسمان‌های بسته نشان داده می‌شود دامنه به دست آمده در حد $l_s \rightarrow 0$ ، نتایج کنش هیلبرت-اینشتین را باز تولید می‌کند. بنابراین کنش هیلبرت-اینشتین یک کنش مؤثر برای نظریه ریسمان در پایین‌ترین مرتبه است. بنابراین طبیعی به نظر می‌رسد در مقیاس انرژی که طول ریسمان قابل نظر نباشد کنش اینشتین-هیلبرت باید تصحیح شود. این تصحیحات نیز با محاسبه دامنه‌های پراکندگی نظریه ریسمان و بسط این دامنه در توان‌های l_s قابل محاسبه است. این تصحیحات به صورت توان‌های بالاتر تانسور انحنای به شکل کلی:

$$\sum_n l_s^{\gamma n - 2} R^n$$

ظاهر می‌شوند. دقت شود که در هر مرتبه تانسورهای انحنای به روش‌های مختلف می‌توانند با یکدیگر ادغام شوند. متأسفانه نظریه ریسمان این کنش‌ها را در ده بعد به دست می‌دهد و

$$C(|\psi\rangle) = \min[k : \exists |f\rangle \in F_k \mid d(|f\rangle, |\psi\rangle) < \varepsilon]$$

که ε یک عدد به دلخواه کوچک است. همچنین:

$$d(|a\rangle, |b\rangle) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle a|b\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle} \sqrt{\langle b|b\rangle}} \right)$$

بنا بر آنچه تاکنون گفته شده داریم:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\gamma M}{\pi}$$

تاکنون دو پیشنهاد هولوگرافی برای محاسبه پیچیدگی حالت‌های روی مرز ارائه شده است. اولی پیچیدگی = حجم است [۹]. دو طرف نمودار پنروز یک سیاهچاله جاودان AdS با یک پل اینشتین-روزن^۱ متصل می‌شوند. این پل به طور کلاسیکی با زمان رشد می‌کند. در این پیشنهاد حجم این پل متناسب با کمیت پیچیدگی است. به دلیل اشکالات موجود در این پیشنهاد، ساسکایند و همکاران پیشنهاد کردند که کنش روی پوسته^۲ در ناحیه ویلر دویت از فضا-زمان با پیچیدگی کوانتومی متناسب است [۱۰، ۱۱]. تاکنون برای سیاهچاله ساده، سیاهچاله BTZ و سیاهچاله بارداری محاسباتی انجام شده است [۹].

$$Complexity = \frac{Action}{\pi \hbar}$$

در این پیشنهاد کنش برای حل‌های معادلات حرکت در قسمت خاصی از هندسه فضا-زمان به نام ناحیه ویلر-دویت محاسبه می‌شود. نکته مهمی که بایستی به آن توجه داشت همان طور که خواهیم دید این است که این بخش ویلر-دویت در قسمتی از هندسه داخل افق سیاهچاله نفوذ کرده و در نتیجه می‌تواند درباره کمیت‌هایی اطلاعات به ما بدهد که باوجود تعادل ترمودینامیکی همچنان با زمان تغییر می‌کنند. برای سیاهچاله خنثی می‌توان نشان داد که در زمان‌های بزرگ:

$$\frac{dC}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\gamma M}{\pi}$$

می‌توان همین محاسبات را برای سیاهچاله چرخان و بارداری نیز حساب کرد. سیاهچاله بارداری:

$$\frac{dC}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\pi} [(\gamma M - \mu Q) - (\gamma M - \mu Q)_{g.s.}]$$

سیاهچاله چرخان:

۱. Rosen

۲. On-shell

تعداد مشخصی ذره هم نرخ، تغییرات زمانی آنتروپی گرمایی و هم پیچیدگی متناسب با تعداد ذرات است. بر طبق این نگاه می توان مفهوم تعادل یک سیستم را به تعادل گرمایی نسبت داد. اما در یک سیستم کوانتومی با همان تعداد ذرات (بیت کوانتومی)، نرخ تغییرات زمانی آنتروپی گرمایی متناسب با تعداد ذرات، ولی پیچیدگی کوانتومی متناسب با ۲ به توان آن تعداد ذرات است. بنابراین برای تعریف مفهوم تعادل در سیستم کوانتومی، به جای استفاده از آنتروپی گرمایی بایستی از مفهوم پیچیدگی کوانتومی استفاده کنیم. این نگاه به تعادل مسلماً نگاه عادی به فیزیک سیستم های پیچیده و به طور مشخص نحوه رسیدن و زمان رسیدن به تعادل برای آنها را تغییر خواهد داد و پنجره ای برای فهم عمیق تر از تحول زمانی این گونه سیستم ها خواهد گشود.

۲. محاسبه پیچیدگی از طریق C_A برای گرانش های از

مرتبه های R^2 و R^3

کنش زیر را در نظر بگیرید، این کنش دارای جملاتی از مرتبه صفر (همان ثابت کیهان شناختی است)، یک (مربوط به کنش اینشتین- هیلبرت است) و مرتبه های دو و سه از ندره ای ریچی است و ضرایب این جملات جدید نیز ثابت هستند.

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1}x \sqrt{g} (R + \Lambda + \alpha_r R^2 + \alpha_{ab} R_{ab} R^{ab} + \beta_r R^3 + \beta_{ab} R_{ab} R^{ab} R + \beta_{abc} R_a^c R^{ab} R_{bc}). \quad (1)$$

ممکن است این سوال مطرح شود که چرا جملات توانی تانسور ریمان در نظر گرفته نشده اند. در این مورد توضیح این که اضافه کردن جملات بالا باعث می شود جواب ها از منبسط اینشتین خارج شوند. در حالت کلی پیدا کردن جواب های تحلیلی دشوار و در مواردی غیرممکن می شود. اما نکته مهم تر پیچیدگی است که این جملات در پیدا کردن جملات مرزی ایجاد می کنند. در حالت کلی فقط برای دسته از گرانش های لاولاک^۱ می توان جملات مرزی را پیدا کرد. اگر از این کنش وردش گرفته شود معادله حرکت می شود:

ضریب این جملات به صورت کنش مؤثر در بعدهای پایین تر به طریقه فشرده سازی ابعاد اضافی بستگی دارد. بنابراین در ادامه ما این تصحیحات بالقوه نظریه ریسمان را با ضرایب دلخواه در نظر می گیریم؛ و پیچیدگی هولوغرافی را برای این کنش جدید محاسبه می کنیم. قبل از انجام محاسبات برای یافتن پیچیدگی هولوغرافی در این تئوری های گرانشی با مشتقات مراتب بالا لازم است که نکته ای را یادآوری کنیم. کمیت پیچیدگی هولوغرافی برای یک سری تئوری های گرانشی خاص با مشتقات مراتب بالا قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۵]. نکته ای که بایستی به آن توجه شود این است که روشی که در آن مطالعه [۱۵] مورد استفاده قرار گرفته است کاملاً با روشی که در این مقاله از آن بهره می گیریم متفاوت می باشد.

بایستی یادآوری کنیم که کمیت پیچیدگی هولوغرافی در محدوده ویلر- دویت برای حل سیاهچاله شوارتزشايلد پاددوسیته تئوری اینشتین- هیلبرت دوگان است به پیچیدگی کوانتومی برای حالت دوتایی میدان حرارتی در یک نظریه میدان همدیس با برهم کنش قوی. سوال طبیعی که می شود پرسید این است که پیچیدگی کوانتومی همین حالت اما در یک میدان همدیس با برهم کنش ضعیف تر چه می باشد. بر طبق دوگانی پیمان- گرانش تئوری گرانشی دوگان به میدان همدیس نوع دوم عبارت است از ترکیب تئوری اینشتین- هیلبرت با جملات مشتقات مراتب بالا در متریک. لازم به ذکر است که خود کمیت پیچیدگی کوانتومی در سمت نظریه میدان تاکنون فقط و فقط برای نظریه میدان های آزاد مورد مطالعه قرار گرفته است و در آینده نزدیک شاهد ارائه نتایج محاسبات این کمیت برای نظریه میدان های با برهم کنش ضعیف خواهیم بود. با این نگاه می توان گفت که محاسبات انجام شده در این مقاله نوعی پیش بینی برای نتایج خواهد بود که در سمت نظریه میدان برای تئوری های با برهم کنش ضعیف در آینده ارائه خواهند شد. همچنین به خودی خود نیز چک کردن پیشنهاد پیچیدگی هولوغرافی و این که آیا حد بالای لوید را ارضا می کند نیز بسیار جالب است. برای یادآوری این که چرا این کمیت برای فیزیک دانان نظریه میدان مهم است بایستی یادآوری کنیم که در یک سیستم کلاسیکی با

۱. Loveluck

$$\mathcal{L}_{onshell} = -\frac{\gamma d}{\ell^{\gamma}}(1 + \mathcal{A}) \quad (5)$$

که ثابت \mathcal{A} ثابت برابر است با:

$$\mathcal{A} = \gamma k((d+1)\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma}) + \gamma k^{\gamma}((d+1)^{\gamma}\beta_{\gamma} + (d+1)\beta_{\gamma} + \beta_{\gamma}). \quad (6)$$

تفاوت این لاگرانژی روی پوسته در مقایسه با لاگرانژی هیلبرت- اینشتین روی پوسته این است که این لاگرانژی ضریب اضافی \mathcal{A} را دارد.

در این مقاله، به یکی از حل های مجانباً پاددسته در تئوری (۱) علاقمند هستیم. این حل با متریک زیر توصیف می شود:

$$ds^{\gamma} = -f(r)dt^{\gamma} + \frac{dr^{\gamma}}{f(r)} + r^{\gamma}d\Sigma_{k,d-1}^{\gamma}, \quad (7)$$

که ضریب سیاه سازی^۱

$$f(r) = r^{\gamma} + k - \frac{\omega^{d-\gamma}}{r^{d-\gamma}}, \quad (8)$$

است.

در ادامه ضریب مقیاس انحنای AdS را یک می گیریم. همچنین پارامتر k مقادیر ۰، ۱ و -۱ را می تواند داشته باشد که به ترتیب متناظر با هندسه های صفحه، کره و هذلولی است. رابطه بین پارامتر ω و محل افق می شود:

$$\omega^{d-\gamma} = r_h^d + kr_h^{d-\gamma}. \quad (9)$$

برای این هندسه دما، جرم و آنتروپی با روابط زیر داده می شوند:

$$T = \frac{1}{\gamma\pi r_h} \left(dr_h^{\gamma} + (d-\gamma)k \right),$$

$$M = (d-1) \frac{\Omega_{k,d-1}}{16\pi G} \omega^{d-\gamma} (1 + \mathcal{A}), \quad (10)$$

$$S = \frac{\Omega_{k,d-1}}{4G} r_h^{d-1}.$$

کنش روی ناحیه ویلر- دویت اجزا مختلفی است: کنش ناحیه توده، کنش روی مرزهای نور گونه، کنش روی مرزهای فضا گونه یا زمان گونه و کنش روی گوشه ها که نواحی اتصال مرزها هستند. بنابراین برای محاسبه کنش روی پوسته سهم های زیر باید در نظر گرفته شود:

$$I^{total} = \left(I^{bulk} + I^{boundary} + I^{joint} \right)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\gamma}\Lambda g_{ab} + R_{ab} - \frac{1}{\gamma}g_{ab}R + \alpha_{\gamma} \\ & (\gamma R_{ab}R - \frac{1}{\gamma}g_{ab}R^{\gamma} - \gamma\nabla_b\nabla_aR + \gamma g_{ab}\nabla_c\nabla^cR) \\ & + \beta_{\gamma} (\gamma R_{ab}R^{\gamma} - \frac{1}{\gamma}g_{ab}R^{\gamma} - \gamma\nabla_aR\nabla_bR \\ & - \gamma R\nabla_b\nabla_aR + \gamma g_{ab}R\nabla_c\nabla^cR + \gamma g_{ab}\nabla_cR\nabla^cR) \\ & + \alpha_{\gamma} (\gamma R_a^c R_{bc} - \frac{1}{\gamma}g_{ab}R_{cd}R^{cd} - \nabla_c\nabla_aR_b^c \\ & - \nabla_c\nabla_bR_a^c + \nabla_c\nabla^cR_{ab} + g_{ab}\nabla_d\nabla^dR^{cd}) \\ & + \beta_{\gamma} (\gamma R_a^c R_b^d R_{cd} - \frac{1}{\gamma}g_{ab}R_c^e R^{cd} R_{de} \\ & - \frac{\gamma}{\gamma}\nabla_aR_b^c\nabla_dR_c^d - \frac{\gamma}{\gamma}\nabla_bR_a^c\nabla_dR_c^d \\ & - \frac{\gamma}{\gamma}R^{cd}\nabla_d\nabla_aR_{bc} - \frac{\gamma}{\gamma}R_b^c\nabla_d\nabla_aR_c^d \\ & - \frac{\gamma}{\gamma}R^{cd}\nabla_d\nabla_bR_{ac} - \frac{\gamma}{\gamma}R_a^c\nabla_d\nabla_bR_c^d \\ & + \frac{\gamma}{\gamma}R_b^c\nabla_d\nabla^dR_{ac} + \frac{\gamma}{\gamma}R_a^c\nabla_d\nabla^dR_{bc} \\ & + \frac{\gamma}{\gamma}g_{ab}R^{cd}\nabla_d\nabla_eR_c^e - \frac{\gamma}{\gamma}\nabla_bR_{cd}\nabla^dR_a^c \\ & + \gamma\nabla_dR_{bc}\nabla^dR_a^c - \frac{\gamma}{\gamma}\nabla_aR_{cd}\nabla^dR_b^c + \frac{\gamma}{\gamma}g_{ab} \\ & \nabla_cR^{cd}\nabla_eR_d^e + \frac{\gamma}{\gamma}g_{ab}R^{cd}\nabla_e\nabla_dR_c^e \\ & + \frac{\gamma}{\gamma}g_{ab}\nabla_dR_{ce}\nabla^eR^{cd}) + \beta_{\gamma} (R_{ab}R_{cd}R^{cd} + \gamma R_a^c \\ & R_{bc}R - \frac{1}{\gamma}g_{ab}R_{cd}R^{cd}R - R^{cd}\nabla_a\nabla_bR_{cd} \\ & - \gamma\nabla_aR^{cd}\nabla_bR_{cd} - R^{cd}\nabla_b\nabla_aR_{cd} - \nabla_bR\nabla_c \\ & R_a^c - \nabla_aR\nabla_cR_b^c - R\nabla_c\nabla_aR_b^c \\ & - R_b^c\nabla_c\nabla_aR - R\nabla_c\nabla_bR_a^c - R_a^c\nabla_c\nabla_bR \\ & + R\nabla_c\nabla^cR_{ab} + R_{ab}\nabla_c\nabla^cR - \nabla_aR_{bc}\nabla^cR \\ & - \nabla_bR_{ac}\nabla^cR + \gamma\nabla_cR_{ab}\nabla^cR + \gamma g_{ab}\nabla^cR\nabla_dR_c^d \\ & + g_{ab}R\nabla_d\nabla_cR^{cd} + g_{ab}R^{cd}\nabla_d\nabla_cR \\ & + \gamma g_{ab}R^{cd}\nabla_e\nabla^eR_{cd} + \gamma g_{ab}\nabla_eR_{cd}\nabla^eR^{cd}) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

رابطه (۲) جواب AdS دارد اما با ثابت کیهان شناختی مؤثر:

$$\Lambda = -\Lambda_{eff} \left(d(d-1) + d^{\gamma}(d-\gamma)((d+1)\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma}) \Lambda_{eff}^{\gamma} + (d-\delta)d^{\gamma}((d+1)((d+1)\beta_{\gamma} + \beta_{\gamma}) + \beta_{\gamma}) \Lambda_{eff}^{\gamma} \right) \quad (3)$$

همچنین برای جواب های پاددسته مجانبی داریم:

$$k = d\Lambda_{eff} = -\frac{d}{\ell^2}$$

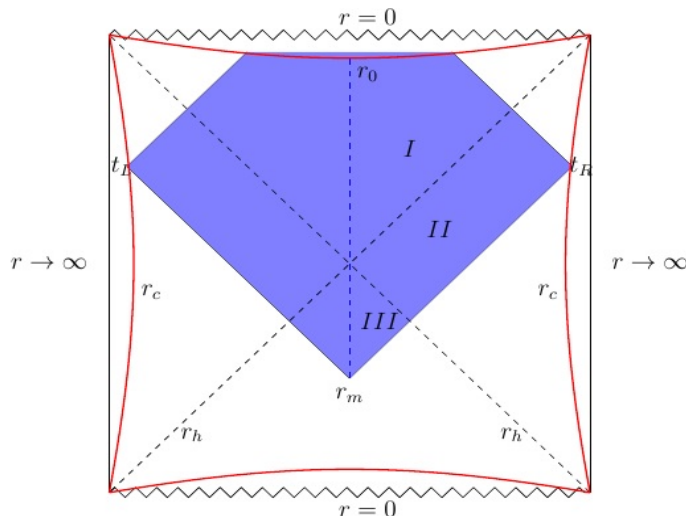
بنابراین لاگرانژی ناشی از جواب معادله حرکت یعنی لاگرانژی روی پوسته جرمی به صورت زیر در می آید:

$$k(d+1) + k^{\gamma}(d+1)((d+1)\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma}) + k^{\gamma}(d+1)((d+1)^{\gamma}\beta_{\gamma} + (d+1)\beta_{\gamma} + \beta_{\gamma}) + \Lambda, \quad (4)$$

بعد از اندکی ساده سازی داریم:

۱. Blackening

ابتدا به محاسبه کنش توده می‌پردازیم. کنش روی پوسته جرمی می‌شود: (۱۱)

$$I^{\text{bulk}} = -\gamma d \frac{\Omega_{k,d-1}}{\sqrt{\epsilon\pi G}} (1+A) \int dr r^{d-1} \int dt,$$


شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار پنروز، ناحیه رنگی قسمت ویلر دویت است.

گیبونز-هاوکنگ-یورک کار آسانی نیست؛ اما همان طور که در بالا ذکر شد در این مقاله به این گونه جواب‌ها توجه نمی‌کنیم و فقط جواب‌های فضای اینشتین این نظریه‌ها را در نظر می‌گیریم.

وقتی که از کنش (۱) وردش می‌گیریم جمله مشتق کلی $\nabla_a J^a$ ظاهر می‌شود که J^a به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & +\gamma R \nabla_b \delta g_a^b - \gamma \delta g_{ab} \nabla^b R + \beta_1 (\epsilon R \delta g^b_b \nabla_a R - \gamma \\ & R^c \nabla_a \delta g^b_b + \gamma R^c \nabla_b \delta g_a^b - \epsilon R \delta g_{ab} \nabla^b R) + \alpha_1 \\ & (\delta g^{bc} \nabla_a R_{bc} - R^{bc} \nabla_a \delta g_{bc} - R_a^b \nabla_b \delta g^c_c - \gamma \delta g^{bc} \\ & \nabla_c R_{ab} + \delta g^b_b \nabla_c R_a^c + \gamma R^{bc} \nabla_c \delta g_{ab}) + \beta_2 (\gamma R^{bc} \\ & \delta g_b^d \nabla_a R_{cd} - \gamma R_b^d R^{bc} \nabla_a \delta g_{cd} + \gamma R^{bc} \delta g^d_d \nabla_c R_{ab} \\ & - \gamma R_a^b R_b^c \nabla_c \delta g^d_d - \gamma R^{bc} \delta g_b^d \nabla_d R_{ac} - \gamma R_a^b \delta g \\ & {}^{cd} \nabla_d R_{bc} + \gamma R_a^b \delta g^c_c \nabla_d R_b^d + \gamma R_b^d R^{bc} \nabla_d \delta g_{ac}) \\ & + \beta_3 (R \delta g^{bc} \nabla_a R_{bc} + \gamma R^{bc} \delta g^d_d \nabla_a R_{bc} + R^{bc} \delta g_{bc} \\ & \nabla_a R - R^{bc} R \nabla_a \delta g_{bc} - R_{bc} R^{bc} \nabla_a \delta g^d_d \\ & - R_a^b R \nabla_b \delta g^c_c - \gamma R_a^c \delta g_{bc} \nabla^b R + R_{ab} \delta g^c_c \\ & \nabla^b R - \gamma R \delta g^{bc} \nabla_c R_{ab} + R \delta g^b_b \nabla_c R_a^c + \gamma R^{bc} \\ & R \nabla_c \delta g_{ab} - \gamma R^{bc} \delta g_a^d \nabla_d R_{bc} + R_{bc} R^{bc} \nabla_d \delta g_a^d) \end{aligned} \quad (14)$$

بنابراین بعد از وردش، جمله مرزی $\int n_a J^a$ را داریم. برای منیفلد اینشتین یعنی $R_{ab} = k g_{ab}$ عبارت بالا شکل ساده‌تری

این کنش را باید در ناحیه ویلر دویت محاسبه کنیم، بنابراین از شکل ۱ داریم:

$$\begin{aligned} I_I^{\text{bulk}} &= -\gamma d \frac{\Omega_{k,d-1}}{\sqrt{\epsilon\pi G}} (1+A) \int_{r_c}^{r_h} dr r^{d-1} (t_R + r^*(r_c) - r^*(r)) \\ I_{II}^{\text{bulk}} &= -\gamma d \frac{\Omega_{k,d-1}}{\sqrt{\epsilon\pi G}} (1+A) \int_{r_h}^{r_c} dr r^{d-1} (r^*(r_c) - r^*(r)), \\ I_{III}^{\text{bulk}} &= \gamma d \frac{\Omega_{k,d-1}}{\sqrt{\epsilon\pi G}} (1+A) \int_{r_m}^{r_h} dr r^{d-1} (t_R - r^*(r_c) + r^*(r)), \end{aligned} \quad (12)$$

بنابراین سهم حجم برای کنش می‌شود:

$$I^{\text{bulk}} = \gamma (I_I^{\text{bulk}} + I_{II}^{\text{bulk}} + I_{III}^{\text{bulk}}), \quad (13)$$

ضریب ۲ به این دلیل آمده است که سهم راست و سهم چپ ناحیه ویلر-دویت با هم برابرند. کنش حجم در قسمت ویلر-دویت فقط یکی از بخش‌هایی است که به پیچیدگی هولوگرافی سهم می‌دهد. سهم‌های دیگر از این حقیقت ناشی می‌شوند که می‌بایست اصل وردش در قسمت ویلر دویت محترم شمرده شود.

توجه داشته باشید که برای تئوری‌هایی که دارای مشتقات مراتب بالاتری هستند جواب‌هایشان رفتار مجانبی سازگار با فضا-زمان AdS ندارند.

برای این جواب‌ها پیدا کردن جمله‌های سطحی یعنی کنش

به خود می‌گیرد.

$$\mathcal{A} \int d^d x \sqrt{g} (\nabla_b \delta g_a^b - \nabla_a \delta g^b_b), \quad (15)$$

بنابراین وردش تئوری (۱) برای حل‌های اینشتینی به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\delta I^{\text{bulk}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} \left((e.o.m)_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (1+\mathcal{A}) (\nabla_\alpha \delta g_\beta^\beta - \nabla_\beta \delta g_\alpha^\beta) \right). \quad (16)$$

توجه داشته باشیم که وردش کنش اینشتین-هیلمبرت می‌شود

$$\delta I_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} \left((e.o.m_{\text{EH}})_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\alpha \delta g_\beta^\beta - \nabla_\beta \delta g_\alpha^\beta) \right). \quad (17)$$

که می‌توان جمله‌های مرز را بر حسب متریک مرز و انحناى خارجی نوشت [۱۷].

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} (\nabla_\alpha \delta g_\beta^\beta - \nabla_\beta \delta g_\alpha^\beta) = \quad (18)$$

$$\frac{1}{\Lambda \pi G} \int d^{d+1} x \delta (\sqrt{|h|} K) + \sqrt{|h|} (K_{ab} - h_{ab} K) \delta h^{ab}$$

بنابراین از مقایسه (۱۶) و (۱۷) به این نتیجه می‌توان رسید که برای تئوری (1)، جمله گیبونز-هاوکینگ-یورک برای جواب‌های فضای اینشتین نظریه عبارت است از:

$$I^{\text{GGH}} = \frac{1}{\Lambda \pi G} (1+\mathcal{A}) \int \sqrt{h} K_s, \quad (19)$$

که h دترمینان متریک روی سطح Γ ثابت است. توجه کنید کنش گیبونز-هاوکینگ-یورک را می‌بایست برای تمام سطوح حساب کرد [۱۶]؛ اما برای سطوح نور گونه با انتخاب پارامتر آفین مناسب می‌توان نشان داد که این جمله‌ها صفر خواهند شد. چون مرزهای دیگر و جمله‌های اتصال از وردش کنش می‌آیند [۱۶]، استدلالی مشابه برای جمله‌های مرزی نورگونه^۱ و گوشه به کار می‌رود؛ یعنی این جمله‌ها نیز با ضریب $1+\mathcal{A}$ همراه خواهند بود. با کمی محاسبات می‌توان نشان داد که سهم کنش سطحی برای متریک داده شده می‌شود:

$$I^{\text{GGH}} = -\frac{\Omega_{k,d-1}}{\Lambda \pi G} (1+\mathcal{A}) (t_R + r^*(r_c) - r^*(r_c)) r_c^{d-1} \left(\partial_r f(r) + \frac{\gamma(d-1)}{r} f(r) \right) \Big|_{r=r_c}. \quad (20)$$

نحوه وردش کنش نشان می‌دهد که جمله‌های اتصال برای

پیچیدگی هولوگرافی متناسب است با همان کنش اینشتین.

قبل از این که سهم جملات نقاط اتصال را به دست آوریم بایستی به یک نکته مهم توجه کنیم. با توجه به تعریف تانسور تنش مرزی، تانسور انرژی-تکانه مرزی برای تئوری (۱)، $T_{ab}^{EH} = (1+\mathcal{A}) T_{ab}^{EH}$ است که $T_{ab}^{EH} = K_{ab} - K h_{ab}$ تانسور انرژی-تکانه برای نظریه اینشتین است. با توجه به تعریف جرم با استفاده از تانسور انرژی-تکانه به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که جرم سیاهچاله در تئوری (۱)، $1+\mathcal{A}$ برابر جرم همین سیاهچاله در تئوری اینشتین-هیلمبرت است.

حال به سراغ محاسبه جملات مربوط به نقاط اتصال می‌رویم. طبق آنچه مرسوم است بردارهای عمود بر سطوح نورگونه به صورت زیر هستند:

$$k_i^H = \alpha_i (k_i^r, k^t, 0), k_i^r = \pm g^{rr} \frac{1}{f(r)}, \quad (21)$$

$$k^t = g^{tt} = -\frac{1}{f(r)}.$$

با توجه به شکل ۱ می‌توان کنش نقاط اتصال را محاسبه کرد.

$$I_{r_c}^{\text{joint}} = \frac{\Omega_{k,d-1}}{\Lambda \pi G} (1+\mathcal{A}) r_c^{d-1} \log \frac{|f^\gamma(r_c)|}{\alpha_\gamma \alpha_\gamma \alpha_\gamma},$$

$$I_{r_m}^{\text{joint}} = -\frac{\Omega_{k,d-1}}{\Lambda \pi G} (1+\mathcal{A}) r_m^{d-1} \log \frac{|f(r_m)|}{\alpha_\gamma \alpha_\gamma}, \quad (22)$$

$$I_{r_c}^{\text{joint}} = -\frac{\Omega_{k,d-1}}{\Lambda \pi G} (1+\mathcal{A}) r_c^{d-1} \log \frac{|f(r_c)|}{\alpha_\gamma \alpha_\gamma}.$$

کنش کل نقاط اتصال مجموع کل کنش‌های اتصال است.

$$I^{\text{joint}} = I_{r_c}^{\text{joint}} + I_{r_m}^{\text{joint}} + I_{r_c}^{\text{joint}}. \quad (23)$$

چون اندازه بردارهای عمود بر سطح نور گونه صفر هستند می‌توانند هر ضریبی داشته باشند، یا به عبارت دیگر نمی‌توان آنها را بهنجار کرد؛ بنابراین در کنش اتصال یک نوع ابهام وجود دارد [۱۶] که برای از بین بردن این ابهام باید یک جمله شمارنده^۲ اضافه کنیم.

$$I^{\text{ambiguity}} = \frac{\Omega_{k,d-1}}{\Lambda \pi G} (1+\mathcal{A}) \int d\lambda \sqrt{\gamma} r^{d-1} |\Theta| (\log |\Theta| + c), \quad (24)$$

که

$$\Theta = \frac{\partial_\lambda \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{d-1}{r} \frac{\partial r}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial r}{\partial \lambda} = k^r = \pm \alpha_i. \quad (25)$$

بعد از کمی محاسبه می‌توان دید:

۲. Counter term

۱. Null

تصحیحات مراتب بالاتر انحنای، حد بالای لویید روی نرخ تغییرات پیچیدگی همچنان درست است؛ به شرط این که از تعریف درست انرژی و در نتیجه جرم در تئوری گرانشی مربوطه استفاده کنیم. این مشاهده و نتیجه با مطالعات قبلی [۱۷] برای محاسبه پیچیدگی هولوگرافی در حضور تصحیحات مرتبه دوم انحنای که با روش کاملاً متفاوتی انجام شده است در سازگاری کامل است.

۳. نتیجه گیری

همان طور که در محاسبات این مقاله نشان داده شده است، اگر در کنش اینشتین-هیلمبرت جمله‌های جدیدی از مرتبه R^2 و روشن شوند آهنگ تغییر پیچیدگی هولوگرافی در زمان‌های زیاد همچنان مقداری ثابت خواهد بود. توجه داشته باشیم که در حضور جملات مراتب بالاتر تانسور انحنای، مقدار جرم سیاهچاله شوارتزشاید نسبت به جرم همین سیاهچاله در تئوری اینشتین-هیلمبرت متفاوت خواهد بود. مقدار ثابتی که در زمان‌های زیاد، آهنگ تغییر پیچیدگی به صورت مجانبی به آن نزدیک می‌شود متناسب با همین انرژی تصحیح یافته خواهد بود و در نتیجه حد لویید دوباره در زمان‌های زیاد برای این تئوری‌های حاوی مشتقات مراتب بالاتر متریک برقرار خواهد شد. همان طور که در مقدمه ذکر شده است نرخ تغییرات پیچیدگی علاوه بر سیاهچاله‌های خنثی، برای سیاهچاله‌های باردار و چرخان نیز در تئوری اینشتین-هیلمبرت محاسبه شده است. جالب است که محاسباتی انجام شود و نتیجه به دست آمده از محاسبات این مقاله برای آن سیاهچاله‌ها نیز بررسی شود؛ یعنی به طور دقیق مورد بررسی قرار داد که آیا برای این سیاهچاله‌ها در تئوری (۱)، نرخ تغییرات پیچیدگی دوباره بر حسب جرم تصحیح یافته، تکانه زاویه‌ای، بار الکتریکی و پتانسیل شیمیایی قابل بازنویسی می‌باشد یا خیر.

$$I^{\text{ambiguity}} = -\frac{\Omega_{k,d-1}}{\lambda\pi G} (1+A) \left(r_c^{d-1} \log \left[\frac{1}{\alpha_r \alpha_r \alpha_r \alpha_r} \frac{r_c^{\ddagger}}{(d-1)^{\ddagger}} \right] - r_c^{d-1} \log \left[\frac{1}{\alpha_r \alpha_r} \frac{r_m^{\ddagger}}{(d-1)^{\ddagger}} \right] - r_m^{d-1} \log \left[\frac{1}{\alpha_r \alpha_r} \frac{r_m^{\ddagger}}{(d-1)^{\ddagger}} \right] - \left(\frac{\ddagger}{d-1} + \gamma c \right) (\gamma r_c^{d-1} - r_c^{d-1} - r_m^{d-1}) \right). \quad (26)$$

حال باید تمام کنش‌ها را با هم جمع کنیم تا کنش کل به دست آید.

$$I^{\text{total}} = I^{\text{bulk}} + I^{\text{GH}} + I^{\text{joint}} + I^{\text{ambiguity}} \\ = \frac{\Omega_{k,d-1}}{\lambda\pi G} (1+A) \left(-\gamma (r_m^d - r_c^d) t_R - r_c^d \left(\partial_r f(r) + \frac{\gamma(d-1)}{r} f(r) \right) \Big|_{r=r_c} \left(t_R + r^*(r_c) - r^*(r) \right) + r_c^{d-1} \log \left[\frac{|f(r_c)|^{\ddagger} (d-1)^{\ddagger}}{r_c^{\ddagger}} \right] - r_m^{d-1} \log \left[\frac{|f(r_m)| (d-1)^{\ddagger}}{r_m^{\ddagger}} \right] - r_c^{d-1} \log \left[\frac{|f(r_c)| (d-1)^{\ddagger}}{r_c^{\ddagger}} \right] - r_m^{d-1} \log \left[\frac{|f(r_m)| (d-1)^{\ddagger}}{r_m^{\ddagger}} \right] - \gamma d \int_{r_m}^{r_c} dr r^{d-1} \left(r^*(r_c) - r^*(r) \right) - \gamma d \int_{r_c}^{r_m} dr r^{d-1} \left(r^*(r_c) - r^*(r) \right) + \left(\frac{1}{d-1} + c \right) (\gamma r_c^{d-1} - \gamma r_m^{d-1} - \gamma r_c^{d-1}) \right). \quad (27)$$

بنابراین

$$\frac{dC}{dt} \Big|_{R^{\ddagger}\text{-Theory}} = (1+A) \frac{dC}{dt} \Big|_{\text{EH}}, \quad (28)$$

در زمان‌های بزرگ، آهنگ رشد پیچیدگی مقدار ثابتی خواهد داشت.

$$\frac{dC}{dt} \Big|_{R^{\ddagger}\text{-Theory}} = (d-1) \frac{\Omega_{k,d-1} \omega^{d-\ddagger}}{\lambda\pi G} (1+A), \quad (29)$$

همان طور که در بالا ذکر شد، جرم سیاهچاله در نظریه (۱)

$$M = (d-1) \frac{\Omega_{k,d-1} \omega^{d-\ddagger}}{\lambda\pi G} (1+A) \quad (30)$$

است. پس آهنگ تغییر پیچیدگی می‌شود:

$$\frac{dC}{dt} \Big|_{R^{\ddagger}\text{-Theory}} = \ddagger M. \quad (31)$$

که نشان می‌دهد در زمان‌های زیاد، نرخ تغییرات پیچیدگی هولوگرافی در حضور تصحیحات مراتب دوم و سوم تانسور انحنای به کنش اینشتین-هیلمبرت، با حد لویید سازگار است. توجه داشته باشیم که رابطه (۳۱) به ما می‌آموزد که با وجود

مراجع

1. N Margolus and L B Levitin, *Physica D* **120** (1998)

12. A B Zamolodchikov, "Expectation value of composite-eld T - T in two-dimensional quantum",-eld theory, hep-th/0401146 [INSPIRE].
13. F A Smirnov and A B Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **915** (2017) 363.
14. L McGough, M Mezei, and H Verlinde, *Journal of High Energy Physics* **04** (2018) 010.
15. M Alishahiha, A Faraji Astaneh, A Naseh and M H Vahidinia, *Journal of High Energy Physics* **1705** (2017) 009.
16. L Lehner, R C Myers, E Poisson and R D Sorkin, *Phys. Rev. D* **94**, 8 (2016) 084046.
17. T Padmanabhan, *Mod. Phys. Lett. A* **29**, 08 (2014) 1450037.
18. J D Brown and J W York, *Phys. Rev. D* **47**:1407 (1993).
2. S Lloyd, *Nature* **406** Aug (2000), quant-ph/9908043.
3. J D Bekenstein, *Lett. Nuovo Cim.* **4**, (1972) 737.
4. J D Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
5. J D Bekenstein, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 3292.
6. M Van Raamsdonk, "Gen. Rel. Grav." **42** (2010) 2323.
7. L Susskind, *Fortsch. Phys.* **64** (2016) 49
8. W Cottrell and M Montero, *Complexity is Simple*, arXiv:1710.01175.
9. D Carmi, S Chapman, H Marrochio, R C Myers and S Sugishita, *Journal of High Energy Physics***1711**, 188
10. A R Brown, D A Roberts, L Susskind, B Swingle and Y Zhao, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 191301.
11. A R Brown, D A Roberts, L Susskind, B Swingle and Y Zhao, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 086006.