

## ناپایداری تشدید ابر اکسیونی

رضا عبادی<sup>۱</sup> و محمدحسین نامجو<sup>۱</sup>

۱. پژوهشکده نجوم، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM)، تهران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

پست الکترونیکی: mh.namjoo@ipm.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۰۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۱/۲۱)

### چکیده

وجود ذرات به اندازه کافی سبک در نظریه بنیادی توصیف کننده جهان پیرامونی، می‌تواند باعث ناپایداری سیاهچاله‌های چرخان شود که به این پدیده آبرتابش گفته می‌شود. به طور خاص اکسیون و ذرات شبه-اکسیونی نامزدهای مناسبی برای ایجاد چنین پدیده‌ای هستند. در اثر این ناپایداری، ابر اکسیونی با چگالی بالا در اطراف سیاهچاله تشکیل می‌شود. به سیستم ساهیچاله و ابر اکسیونی، اتم گرانشی اطلاق می‌شود. بررسی تحول این اتم گرانشی می‌تواند منجر به کشف اکسیون شود و یا قیده‌های جدیدی بر فضای پارامتری اکسیون‌ها معرفی کند. با در نظر گرفتن جملات برهم‌کنشی اکسیون-فوتون و نیز اکسیون با خودش می‌توان دید که ابر اکسیونی تحت شرایطی ناپایدار می‌شود. منشأ این ناپایداری‌ها تشدید پارامتری است که می‌تواند اثرات مشاهده‌پذیر داشته باشد. ما در این مقاله، با در نظر گرفتن باقی عوامل مؤثر در تحول ابر اکسیونی حد بالا برای نرخ این ناپایداری به دست می‌آوریم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که برای ساده‌ترین مدل‌های اکسیونی این ناپایداری با نرخ بسیار کمی اتفاق می‌افتد؛ چرا که قبل از مؤثر شدن تشدید، خود برهم‌کنش ذرات باعث رمبش ابر اکسیونی می‌شود. ولی برای برخی مدل‌های خاص، تشدید می‌تواند به مقدار کافی بزرگ باشد تا اثرات مشاهده‌پذیر ایجاد کند. به علاوه، نشان خواهیم داد که تشدید ناشی از خود برهم‌کنش هیچ‌گاه به حد مؤثر خود نمی‌رسد.

واژه‌های کلیدی: اکسیون، سیاهچاله کر، ناپایداری آبرتابش، اتم گرانشی، تشدید پارامتری

### ۱. مقدمه

جفت‌شدگی با بعد جرمی چهار اکسیون با ذرات مدل استاندارد می‌شود. جفت‌شدگی با بعد جرمی بالاتر است؛ مثلاً جفت‌شدگی اکسیون-فوتون با بعد جرمی پنج  $g_{\gamma} \phi F^* F$ ، مجاز است. به دلیل قیده‌های آزمایشی، ثابت  $g_{\gamma}$  باید کوچک باشد. اما این جفت‌شدگی به فوتون می‌تواند اثرات مشاهده

اکسیون در ابتدا به عنوان راه حلی دینامیکی برای مسئله بار-پارینه نظریه نیروی قوی مطرح شد [۱-۳]. اکسیون QCD یک میدان شبه-نرده‌ای است که از شکست خودبه‌خود تقارن پیچی-کوئین حاصل می‌شود. تقارن انتقال تقریبی مانع از

اکسیون‌ها به فوتون توسط سازوکار تشدید پارامتری است [۲۳-۲۴]. در اثر این ناپایداری تشدید تابش‌های لیزرگونه با بسامد متناسب با جرم اکسیون قابل پیش‌بینی هستند. ما در این مقاله، این ناپایداری تشدید را بررسی دقیق خواهیم کرد و حد بالایی برای نرخ آن به دست خواهیم آورد. با مطالعه این حد بالا، نتیجه می‌گیریم که اثرات مشاهده‌تای این ناپایداری تنها برای دسته خاصی از مدل‌های اکسیونی قابل انتظار است. برای باقی مدل‌ها، توقع بر این است که ابر اکسیونی قبل از اهمیت پیدا کردن تشدید پارامتری، دچار رمبش شده و به درون سیاهچاله بریزد. همچنین، خود برهم‌کنش ذرات را بررسی کرده و برای اولین بار، نشان خواهیم داد که تشدید پارامتری ناشی از آن، همواره ضعیف‌تر از تشدید پارامتری به دلیل جفت‌شدگی با فوتون خواهد بود.

توجه شود- همان‌طور که اشاره شد- در این مقاله دو نوع ناپایداری مورد مطالعه قرار می‌گیرد، که دقت در متمایز بودن آنها اهمیت خواهد داشت. یکی ناپایداری آبرتایش است که در آن تولید ذرات اکسیونی توسط سیاهچاله چرخان رخ می‌دهد. دیگری ناپایداری تشدید است که در آن ذرات (فوتون یا اکسیون) توسط تشدید پارامتری- در ابر اکسیونی ایجاد شده حول سیاهچاله- تولید می‌شوند.

روند این مقاله به این صورت است: در بخش ۲ و ۳ به مرور نظریه میدان اکسیون و ناپایداری آبرتایش می‌پردازیم. در بخش ۴ ناپایداری از جنس تشدید پارامتری در پیکربندی همگن از اکسیون را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۵ ناپایداری ابر اکسیونی را بررسی می‌کنیم، یک توصیف ساده تحلیلی از این ناپایداری ارائه می‌کنیم و نتایج تحلیلی حاصل از این توصیف را با نتایج عددی به دست‌آمده مقایسه می‌کنیم. در بخش ۶ حد لازم برای رخ دادن ناپایداری تشدید را به دست می‌آوریم. در نهایت، در بخش ۷ به جمع‌بندی و بحث در مورد نتایج به دست‌آمده می‌پردازیم.

## ۲. اکسیون در نظریه QCD

نظریه QCD از مسأله بار- پارینه نظریه نیروی قوی رنج می‌برد. جمله مشتق کامل

پذیر داشته باشد. آزمایش‌های مختلفی بر این اساس به دنبال کشف اکسیون‌ها هستند، مثل آزمایش IAXO [۴] و آزمایش CAST [۵].

انگیزه دیگر برای در نظر گرفتن اکسیون یا ذرات شبه اکسیونی به عنوان ذرات جدید کشف نشده، ماده تاریک است. تاکنون شاهد قابل اعتنایی بر ماهیت ماده تاریک وجود نداشته است، با این وجود نامزدهای مختلفی برای آن مطرح هستند که WIMP به عنوان یکی از مشهورترین آنها است. اما با وجود آن که بخش قابل توجهی از فضای پارامتری آن توسط آزمایش‌های مختلف بررسی شده است، شواهدی بر وجود آن یافت نشده است. با توجه به این که اکسیون‌ها جفت‌شدگی بسیار ضعیف با مدل استاندارد دارند و ذرات با طول عمر بالا هستند، به عنوان نامزدهای ماده تاریک مطرح هستند [۶-۱۱]. آزمایش‌هایی وجود دارند که به دنبال ماده تاریک اکسیونی هستند؛ مثل آزمایش ADMX [۱۲] و آزمایش MADMAX [۱۳].

یک ایده جالب که در سال‌های اخیر مطرح شده است، بررسی مدل‌های اکسیون با استفاده از اثرات مشاهده‌تای کیهانی و اختر فیزیکی آنها است. تاکنون پیشنهاد‌های مختلفی در این راستا وجود داشته‌اند؛ از آن جمله تبدیل اکسیون به فوتون در میدان مغناطیسی اطراف ستاره‌های نوترونی [۱۴] و اثرات قطبشی روی نور پالسارها [۱۵]. یک ایده دیگر که توجه بسیاری را به خود جلب کرده است مربوط می‌شود به ناپایداری ابرتایش در سیاهچاله‌های چرخان [۱۶] و ستاره‌های نوترونی [۱۷-۱۹]. در اثر این ناپایداری، سیاهچاله یا ستاره با از دست دادن انرژی چرخشی خود ذرات اکسیونی را تولید می‌کند که در نهایت باعث تشکیل یک ابر اکسیونی در اطراف آن می‌شود. اگر درجات آزادی اکسیونی در طبیعت وجود داشته باشند افت‌وخیزهای کوانتومی آنها به عنوان بذره‌های اولیه این ناپایداری عمل می‌کنند.

تحولات بعدی ابر اکسیونی اثرات مشاهده پذیر متفاوتی دارد [۲۰]. یکی از آنها امواج گرانشی ساطع‌شده توسط ابر می‌باشد که امکان مشاهده آن توسط آشکارسازهای فعلی و آینده امواج گرانشی بررسی شده است [۲۱-۲۲]. از دیگر پیشنهادات اخیر، ناپایداری ابر اکسیونی در اثر تبدیل

جفت‌شدگی با فرمیون‌ها به خاطر تقارن انتقال موجود در بوزون شبه-گلدستون به صورت  $(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi)$   $\partial_\mu (\phi / f_a)$  است. این جفت‌شدگی در سطح تک‌حلقه به جفت‌شدگی مؤثر با الکترومغناطیس منجر می‌شود.

$$g_{\phi\gamma} \phi E \cdot B = -\frac{g_{\phi\gamma}}{4} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (5)$$

ضریب جفت‌شدگی  $g_{\phi\gamma}$  در مدل‌های اکسیون که بر مبنای نظریه QCD هستند قابل محاسبه است [۳۰]:

$$g_{\phi\gamma} = \frac{\beta}{f_a}; \quad \beta = \frac{\alpha c_{\phi\gamma}}{2\pi}, \quad (6)$$

که در رابطه بالا  $\alpha = 1/137$  ثابت ساختار ریز است و داریم

$$c_{\phi\gamma} = \frac{\varepsilon}{C} - \frac{2}{3} \frac{\xi + m_u / m_d}{1 + m_u / m_d}, \quad (7)$$

که در آن  $\varepsilon$  و  $C$  به ترتیب نابهنجاری‌های الکترومغناطیسی و رنگ هستند. به عنوان مثال در مدل KSVZ [۳۱] و [۳۲]

$$c_{\phi\gamma} = -1/95 \quad (\varepsilon / C = 0) \quad \text{DFSZ} [33] \quad \text{و} \quad c_{\phi\gamma} = 0/72 \quad (\varepsilon / C = 8/3)$$

بنابراین در ساده‌ترین مدل‌های اکسیون  $c_{\phi\gamma} \sim O(1)$  و در نتیجه  $\beta \sim O(10^{-1})$ . اما برای برخی سناریوهای غیراستاندارد، می‌تواند  $\beta \sim O(1)$  باشد [۳۵].

کنشی که شامل میدان‌های شبه نرده‌ای اکسیون و الکترومغناطیس و همچنین برهم‌کنش بین آنها است به این صورت می‌باشد:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{g_{\phi\gamma}}{4} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right], \quad (8)$$

که در آن  $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  دوگان شدت میدان است و  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = e^{\mu\nu\alpha\beta} / \sqrt{-g}$  که در آن نماد تماماً پاد متقارن لوی-چویتا است با  $e^{1234} = 1$ .

معادلات حرکت به دست آمده از کنش (۸) به این صورت هستند:

$$\square \phi + V'(\phi) = -\frac{g_{\phi\gamma}}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (9)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -g_{\phi\gamma} \partial_\mu \phi \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (10)$$

بازنویسی معادله (۱۰) بر حسب میدان پیمانه‌ای  $A_\mu$  با انتخاب پیمانه  $A_\mu = \partial_\mu A^0 = 0$  چنین است:

$$\square A^i + g_{\phi\gamma} \varepsilon^{ijk} [\partial_i \phi \partial_j A_k - \partial_j \phi \partial_i A_k] = 0, \quad (11)$$

$$L_{\theta QCD} = \frac{\theta_{QCD}}{32\pi^2} Tr G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (1)$$

می‌تواند از طریق نابهنجاری‌ها<sup>۱</sup> در کنش نظریه ظاهر شود. در آن  $G_{\mu\nu}$  شدت میدان گلوئون و  $\tilde{G}^{\mu\nu}$  میدان دوگان آن است. این جمله تقارن CP را نقض می‌کند و به دوقطبی الکتریکی نوترون سهم می‌دهد [۲۵].

$$d_n = 3/6 \times 10^{-16} \theta_{QCD} e \cdot cm, \quad (2)$$

که  $e$  بار الکترون است. حد بالای موجود برای دوقطبی الکتریکی نوترون،  $|d_n| \leq 2/9 \times 10^{-26} e \cdot cm$  (۹۰٪ CL) نشان می‌دهد که  $\theta_{QCD} \leq 10^{-10}$  [۲۶]. کوچک بودن غیرطبیعی این جمله مسئله معروف بار-پارینه نظریه نیروی قوی است.

اکسیون یک راه حل برای توجیه این عدد کوچک است. در این راه حل یک میدان دینامیکی به جمله  $G\tilde{G}$  جفت می‌شود که در انرژی‌های بالا به تقارنی به نام تقارن پچی-کوئین  $(U(1)_{PQ})$  احترام می‌گذارد. در انرژی  $f_a$  این تقارن به صورت خودبه‌خود شکسته می‌شود و مقدار انتظاری خلأ میدان دینامیکی به گونه‌ای اختیار می‌شود که در مجموع ضریب جملاتی شبیه به رابطه (۱) در لاگرانژی صفر می‌شود [۲۷]. اکسیون، بوزون شبه-گلدستون می‌باشد که مربوط به این شکست خودبه‌خود تقارن است [۳-۱].

در انرژی از مرتبه  $\Lambda_{QCD}$  فیزیک غیراختلالی مربوط به QCD مهم می‌شود و اکسیون پتانسیل به شکل زیر را اختیار می‌کند:

$$V(\phi) = m_u \Lambda_{QCD}^3 [1 - \cos(N_{DW} \phi / f_a)], \quad (3)$$

که در آن  $\Lambda_{QCD} \sim 200 \text{ MeV}$  و  $m_u \approx 2/2 \text{ MeV}$  جرم کوآرک بالا است.  $N_{DW}$  نیز یک عدد طبیعی است و تعداد خلأها را تعیین می‌کند؛ ما در ادامه آن را یک فرض می‌کنیم. بنابراین، در حد دامنه میدان کوچک که پتانسیل قابل بسط دادن است، جرم اکسیون چنین خواهد بود:

$$m_{\phi, QCD} \approx 6 \times 10^{-6} eV \left( \frac{10^{12} \text{ GeV}}{f_a} \right). \quad (4)$$

## ۱.۲ جفت‌شدگی اکسیون با مدل استاندارد

جفت‌شدگی اکسیون با ذرات مدل استاندارد توسط تقارن‌ها کنترل می‌شود و در منابع [۲۸-۲۹] محاسبه شده‌اند.

اطراف آن خواهد بود. این نوع ناپایداری، آبرتابش نام دارد. برای این که این ناپایداری اتفاق بیافتد، باید دو شرط اساسی فراهم شوند که در ادامه به آنها می‌پردازیم.

شرط اول این که رشد میدان بوزونی زمانی اتفاق می‌افتد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\omega}{m} < \Omega_H = \frac{a}{\sqrt{M} r_+}, \quad (15)$$

که در آن  $\omega$ ،  $m$ ،  $a = J/M$  و  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$  به ترتیب بسامد، عدد زاویه‌ای مربوط به بسط هارمونیک میدان بوزونی، اسپین سیاهچاله و شعاع افق بیرونی سیاهچاله هستند [۱۶].

شرط دوم برای ناپایداری آبرتابش این است که میدان بوزونی باید در اطراف سیاهچاله محبوس شود. در غیر این صورت ذرات تولید شده به فواصل دور فرار خواهند کرد و امکان ناپایداری از بین خواهد رفت [۴۳]. این اتفاق برای ذرات با جرم غیر صفر می‌تواند رخ دهد. به عبارت دیگر، جرم میدان در اطراف سیاهچاله، به صورت طبیعی شرط محبوس شدن را تولید می‌کند. محبوس شدن زمانی مؤثر خواهد بود که طول موج کامپتون مربوط به میدان با جرم  $m_\phi$  (یعنی  $C\hbar/m_\phi$ )، قابل مقایسه با- ولی کمی بزرگ‌تر از- شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله  $R_{Sch} = 2GM/C^2$  باشد. بنابراین پارامتر بی‌بعد مربوطه چنین است:

$$\alpha = \frac{GMm_\phi}{C\hbar} \approx 0.7 \frac{M}{M_\odot} \frac{m_\phi C^2}{10^{-11} eV}, \quad (16)$$

و درخواست خواهیم کرد که  $\alpha \leq 1$  [۱۶ و ۲۰].

از دو شرط بالا نتیجه می‌شود که سیاهچاله‌ای با اسپین بیشتر از یک مقدار بحرانی در حضور میدان بوزونی جرم‌دار، ناپایدار است. آشکارسازهای امواج گرانشی در آینده خواهند توانست جرم و اسپین تعداد زیادی سیاهچاله را با دقت کافی اندازه‌گیری کنند. با استفاده از این داده‌ها می‌توان فضای پارامتری میدان‌های سبک بوزونی را مقید کرد [۲۲].

### ۱.۳. نرخ ناپایداری آبرتابش

به دلیل وجود افق رویداد سیاهچاله که یک رویه یک طرفه می‌باشد، حل‌های میدان نرده‌ای، شرط مرزی خاصی را ارضاء

با این فرض که میدان اکسیون همگن است و یا این که متمرکز در ناحیه‌ای از مرتبه  $1/m_\phi$  است به این معادله منجر می‌شود:

$$\square A^i + g_{\phi\gamma} \partial_t \phi (\nabla \times \vec{A})^i \approx 0. \quad (12)$$

اگر پتانسیل (۳) را در حد میدان کوچک بسط دهیم خواهیم داشت

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots; \quad \lambda = -\frac{m_\phi^2}{f_a^2} < 0. \quad (13)$$

در این صورت معادله حرکت مربوط به اختلالات میدان اکسیون  $\delta\phi$ ، زمانی که داشته‌باشیم  $\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$  چنین خواهد بود:

$$\left( \square + m_\phi^2 + \lambda \bar{\phi}^2 \right) \delta\phi \approx 0, \quad (14)$$

که در آن از جفت‌شدگی به فوتون صرف نظر شده است. معادلات اخیر، مبنای محاسبات در بخش‌های بعدی خواهند بود.

### ۳. ناپایداری آبرتابش

آبرتابش پدیده‌ای شناخته شده در سیستم‌های کلاسیکی دارای اتلاف است [۳۶ و ۳۷]. مشخصه چنین سیستمی وجود جملات اتلافی متناسب با مشتق اول میدان در معادله حرکت می‌باشد. نشان داده می‌شود که در پس زمینه‌های چرخان، برای مدهای زاویه‌ای مشخص به‌ازای سرعت‌زاویه‌ای بزرگ‌تر از یک مقدار بحرانی (که در ادامه به بررسی آن پرداخته می‌شود) ضریب جمله اتلافی به صورت مؤثر تغییر علامت می‌دهد و به صورت عکس عمل می‌کند. در این حالت منبعی که با گرفتن انرژی باعث اتلاف می‌شد با از دست دادن انرژی عامل پدیده آبرتابش می‌شود [۱۶].

افق سیاهچاله به عنوان یک رویه یک طرفه عامل وجود اتلاف در سیستم‌های مورد علاقه این مطالعه می‌باشد. همان طور که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد ذرات بوزونی بسیار سبک می‌توانند سیاهچاله‌های چرخان را ناپایدار کنند [۳۸-۴۲]. در طی این فرایند، دامنه اختلالات میدان بوزونی در اطراف سیاهچاله با جذب انرژی چرخشی آن رشد می‌کند. نتیجه این ناپایداری سیاهچاله، تشکیل یک ابر اکسیونی در

که جرم میدان در حضور نیروی گرانشی سیاهچاله ایجاد می‌کند، گرفتار شده و ابر آکسیونی را تشکیل می‌دهند. به مجموعه سیاهچاله و ابر آکسیونی، اتم گرانشی اطلاق می‌شود. در ادامه خواهیم دید که اتم گرانشی شباهت زیادی به اتم هیدروژن دارد.

ذرات تولید شده توسط سازوکار آبرتابش، تکانه بسیار کم نسبت به جرمشان دارند [۲۰]. در نتیجه حد غیرنسبیتی معادله (۱۸) برای بررسی ابر آکسیونی مطلوب خواهد بود. به منظور مطالعه حد غیرنسبیتی جواب‌های این معادله، باز تعریف میدان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\phi(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2m\phi}} \left( e^{-im\phi t} \psi(t, r) + e^{im\phi t} \psi^*(t, r) \right), \quad (21)$$

$\pi(t, r) = -i \sqrt{\frac{m\phi}{r}} \left( e^{-im\phi t} \psi(t, r) - e^{im\phi t} \psi^*(t, r) \right)$ , که در آن  $\pi(t, r)$  تکانه، مزدوج مربوط به  $\phi(t, r)$  است و  $\psi(t, r)$  یک میدان نرده‌ای مختلط می‌باشد که نسبت به  $e^{im\phi t}$  کند تغییر است. این یک باز تعریف یک‌به‌یک است که دو درجه آزادی را به دو درجه آزادی دیگر مربوط می‌کند [۴۸]. از آنجا که در حد غیرنسبیتی جرم میدان از هر کمیت بعددار دیگر بزرگ‌تر است، عامل‌هایی مانند  $e^{im\phi t}$  نسبت به بقیه متغیرهای وابسته به زمان با سرعت بسیار بیشتری تحول خواهند یافت. از آنجا که این عوامل، نوسانی هستند، جملاتی که این عامل‌ها در آنها ظاهر می‌شوند- در مقیاس‌های زمانی به اندازه کافی بزرگ- به صورت میانگین، قابل صرف نظر کردن خواهند بود.

با جایگذاری رابطه (۲۱) در معادله کلاین-گوردون (رابطه (۱۸)) و صرف نظر کردن از جملات نوسانی، به معادله شرودینگر در پس زمینه کر خواهیم رسید. اما از آنجا که ابر آکسیونی از شعاع شوارتزشیلد فاصله دارد، می‌توان متریک را برای فاصله‌های دور بسط داد و به معادله ساده شده زیر رسید:

$$i \dot{\psi}(t, r) = \left[ \frac{-\nabla^2}{2m\phi} - \frac{\alpha}{r} \right] \psi(t, r), \quad (22)$$

این معادله شبیه به معادله اتم هیدروژن با ثابت ساختار ریز داده شده در رابطه (۱۶) است [۴۹]. بنابراین می‌توان معادله

می‌کنند. این شرط مرزی در افق رویداد باعث می‌شود که ویژه مقادیر سیستم علاوه بر بخش حقیقی، بخش موهومی اختیار کنند [۲۰]:

$$\omega_{nlm} \rightarrow \omega_{nlm} + i \Gamma_{nlm}, \quad (17)$$

راجع به قسمت حقیقی ویژه مقادیر در بخش بعد بحث خواهد شد و در اینجا قسمت موهومی- که در واقع نرخ تولید ذرات توسط آبرتابش است- را ارائه خواهیم داد. چون این اثر به افق رویداد سیاهچاله مربوط می‌شود برای محاسبه آن نیاز داریم معادله کلاین-گوردون میدان نرده‌ای، یعنی

$$\left( \square - m_\phi^2 \right) \phi(t, r) = 0, \quad (18)$$

را در پس‌زمینه سیاهچاله کر حل کنیم [۴۴-۴۶] متریک کر<sup>۱</sup> در مختصات بویر-لیندکوئست<sup>۲</sup> به صورت زیر است:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{R_{sch} r}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \frac{2 R_{sch} a r}{\Sigma} dt d\phi + \left( r^2 + a^2 + \frac{R_{sch} a^2 r}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (19)$$

که در آن  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ،  $a = J/M$ ،  $R_{sch} = 2GM$  و  $\Delta = r^2 - R_{sch} r + a^2$  پارامترهایی هستند که بر اساس جرم سیاهچاله ( $M$ ) و تکانه زاویه‌ای ( $J$ ) تعریف می‌شوند.

در حالت کلی نرخ ناپایداری  $\Gamma_{nlm}$  با محاسبات عددی مشخص می‌شود [۴۰]. اما در حد  $\alpha \ll 1$ ، می‌توان عبارتی تحلیلی برای آن به دست آورد که به تقریب دت‌ویلر<sup>۳</sup> معروف است [۳۸ و ۴۷]:

$$\Gamma_{nlm} = \frac{r_+}{M} C_{nlm}(\alpha) (m \Omega_H - \omega) \alpha^{l+o}, \quad (20)$$

$$C_{nlm}(\alpha) \equiv \frac{r_+^{l+1} (n+l)!}{n^{2l+2} (n-l-1)!} \left[ \frac{l!}{(2l)!(2l+1)!} \right]^2 \prod_{j=1}^l \left[ j^2 \left( 1 - \frac{a^2}{M^2} \right) + \left( \frac{am}{M} - \frac{r+\alpha}{M} \right)^2 \right].$$

### ۲.۳. اتم گرانشی

همان‌طور که اشاره شد، ناپایداری آبرتابش باعث تولید ذرات آکسیونی حول سیاهچاله می‌شود. این ذرات در چاه پتانسیلی

۱. Kerr metric

۲. Boyer-Lindquist

۳. Detweiler

این بخش برای شروع این مسئله را بررسی می‌کنیم و از نتایج آن برای ارائه یک توصیف تحلیلی از نرخ ناپایداری ابر آکسیونی استفاده خواهیم کرد.

در حد میدان کوچک که میدان آکسیونی در کمینه پتانسیل خود نوسان می‌کند خواهیم داشت:

$$\phi(t, r) = \phi_0 \cos(m_\phi t), \quad (25)$$

که  $\phi_0$  یک پارامتر ثابت است. در این صورت، معادلات حرکت (۱۱) و (۱۴) به این شکل بازنویسی می‌شوند:

$$\square A^i - g_{\phi\gamma} m_\phi \phi_0 \sin(m_\phi t) (\nabla \times \vec{A})^i = 0, \quad (26)$$

$$\left( \square + m_\phi^2 + \lambda \phi_0^2 \cos^2(m_\phi t) \right) \delta\phi = 0. \quad (27)$$

اگر میدان‌های  $A_i$  و  $\delta\phi$  را در فضای فوریه بسط دهیم و تابع مدهای آنها را به ترتیب با  $v_k(t)$  و  $s_k(t)$  نشان دهیم، معادلات بالا بدین شکل در می‌آیند:

$$v_k'' + \left[ k^2 - \xi g_{\phi\gamma} m_\phi k \phi_0 \sin(m_\phi t) \right] v_k = 0, \quad (28)$$

$$s_k'' + \left( k^2 + m_\phi^2 + \lambda \phi_0^2 \cos^2(m_\phi t) \right) s_k = 0, \quad (29)$$

که در معادله (۲۸)  $\xi$  دو قطبش راستگرد و چپگرد مربوط به فوتون را نشان می‌دهد که می‌تواند  $\pm$  باشد. هردو این معادلات جزو خانواده کلی از معادلات دیفرانسیل یعنی معادلات متیو<sup>۱</sup> هستند.

$$x_k'' + \omega_k^2(t) x_k = 0, \quad (30)$$

که در آن  $\omega_k(t)$  بسامد وابسته به زمان متناوب است. رفتار معادلات متیو شناخته شده است و تشدید پارامتری در آنها دیده می‌شود [۳۴]. توجه شود که برای تشدید پارامتری، احتیاج به یک هسته اولیه است که باعث تحریک سیستم آکسیونی و رخ دادن تشدید می‌شود. این هسته اولیه می‌تواند از افت و خیزهای کوانتومی - که از جمله آن واپاشی اختلالی آکسیون‌ها است - ایجاد شود.

#### ۱.۴. نتایج تحلیلی در حد میدان کوچک

نرخ ناپایداری (نمای فلوکت<sup>۲</sup>) برای معادله متیو که حالت خاصی از معادله هیل<sup>۳</sup> است در حد دامنه کوچک شناخته شده

ویژه مقداری مربوط به  $\phi_{nlm}(t, r) = e^{-im_\phi t} R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$  را حل کرد و ویژه مقادیر مشابه اتم هیدروژن را به دست آورد:

$$\omega_{nlm} \approx m_\phi \left( 1 - \frac{\alpha}{2n^2} \right), \quad (23)$$

که ترازهای انرژی اتم گرانشی را نشان می‌دهد. ویژه توابع مربوطه در فاصله  $R_n \approx n^2 (GM/\alpha^2)$  بیشترین مقدار را اختیار می‌کنند. در حالتی که  $\alpha \ll 1$  داریم  $R_n \gg GM$ ، که فرض دور بودن از سیاهچاله را تأیید می‌کند.

علیرغم شباهت‌های این سیستم با اتم هیدروژن، تفاوت‌های اساسی نیز وجود دارد. اول آن که ذرات تشکیل دهنده اتم گرانشی بوزون هستند، در نتیجه اصل طرد پاولی برای آنها صادق نیست. بنابراین، تعداد زیادی از ذرات در یک تراز انرژی می‌توانند جای بگیرند و ابر آکسیونی می‌تواند بسیار چگال شود. دوم آن که به دلیل وجود افق رویداد سیاهچاله، تحول سیستم کاملاً هرمیتی نیست که باعث ناپایداری آبرتایش می‌شود و در بخش قبل به آن پرداختیم.

با توجه به رابطه (۲۰) اولین ویژه مقداری که بیشترین نرخ ناپایداری را دارد  $n=2, l=m=1$  است. با استفاده از تشابه اتم گرانشی و اتم هیدروژن می‌توان ویژه حالت متناظر با این تراز را به راحتی به دست آورد. پس از بازنویسی آن برای میدان  $\phi$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi(t, r) &= \Phi(r) \cos(\varphi - m_\phi t) \sin \theta, \\ \Phi(r) &= \phi_0 \rho e^{-\rho/\alpha}, \quad \rho = r m_\phi \alpha, \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $\phi_0$  دامنه میدان است که در اثر ناپایداری آبرتایش رشد می‌کند.

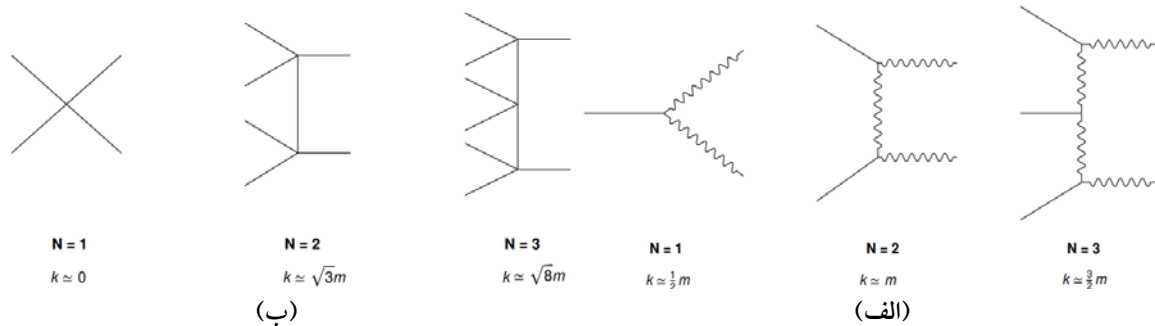
#### ۴. ناپایداری تشدید در پیکربندی همگن

میدان کلاسیک آکسیونی در حد غیرنسبیتی، نوسان همدوس دارد. در این بخش ما تشدید پارامتری ناشی از این نوسان‌های همدوس - که منجر به تولید فوتون یا ذرات نسبیتی می‌شود - را بررسی می‌کنیم. برای شروع، یک پیکربندی همگن را مطالعه می‌کنیم [۵۰ و ۵۱]. سیستم همگن آکسیونی تحت گرانش و خودبرهم‌کنش آکسیون ناپایدار است [۵۲]. ما در

۱. Mathieu equation

۲. Floquet exponent

۳. Hill



شکل ۱. فرایندهای مربوط به (الف) تشدید فوتون و (ب) تشدید آکسیونی در حد میدان کوچک.

#### ۲.۴. نتایج حل عددی

در حالت کلی می‌توان معادلات (۲۸) و (۲۹) را با روش‌های عددی حل کرد. برای به دست آوردن نرخ ناپایداری در معادلات متیو، روش استاندارد فلوکت برای محاسبه عددی وجود دارد که به صورت زیر است [۵۴]، معادله (۳۱) را با دو شرط اولیه مستقل از هم زیر حل می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ x_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (35)$$

ماتریس (۳۵) را در یک دوره تناوب با استفاده از معادله (۳۱) تحول می‌دهیم و نتایج را در لحظه نهایی یک دوره تناوب به دست می‌آوریم. نتیجه آن ماتریسی است که نام آن را  $M$  می‌گذاریم. ادامه تحول سیستم با این ماتریس مشخص می‌شود؛ تحول جواب‌ها بعد از  $P$  دوره تناوب با  $M^P$  داده می‌شود. بنابراین رفتار سیستم با ویژه مقادیر  $M$  مشخص می‌شود. نمای فلوکت که رفتار نمایی سیستم را مشخص می‌کند با  $\mu_i = \ln(\lambda_i/T)$  داده می‌شود که  $\lambda_i$  هر کدام از ویژه مقادیر  $M$  است و  $T$  دوره تناوب است.

نتایج عددی این فرایند برای محاسبه نمای فلوکت از معادلات (۲۸) و (۲۹) در شکل ۲ آورده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که نرخ ناپایداری از طریق تشدید فوتونی، تنها برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ از  $\beta$  (یعنی جفت‌شدگی فوتون با اکسیون) قابل ملاحظه است. از رابطه (۶) و بحث‌های مطرح شده در اطراف آن نتیجه می‌شود که ناپایداری برای ساده‌ترین مدل‌های اکسیون مهم نیست و تنها در سناریوهای غیراستاندارد می‌تواند مهم باشد. همچنین ناپایداری از طریق تشدید آکسیونی نرخ بسیار کمی

است. اگر معادله متیو به شکل زیر پارامتر بندی شده باشد

$$\ddot{x}_k + [A - 2B \cos(2\tau)]x_k = 0, \quad (31)$$

در حدی که  $A \gg B$  (رژیم تشدید باریک) مرکز  $N$ -امین نوار ناپایداری در  $A = N^2 + O(B)$  است و نرخ ناپایداری با رابطه زیر داده می‌شود [۵۳]:

$$\mu_N = \frac{m}{\epsilon N} \frac{B^N}{(N-1)!}. \quad (32)$$

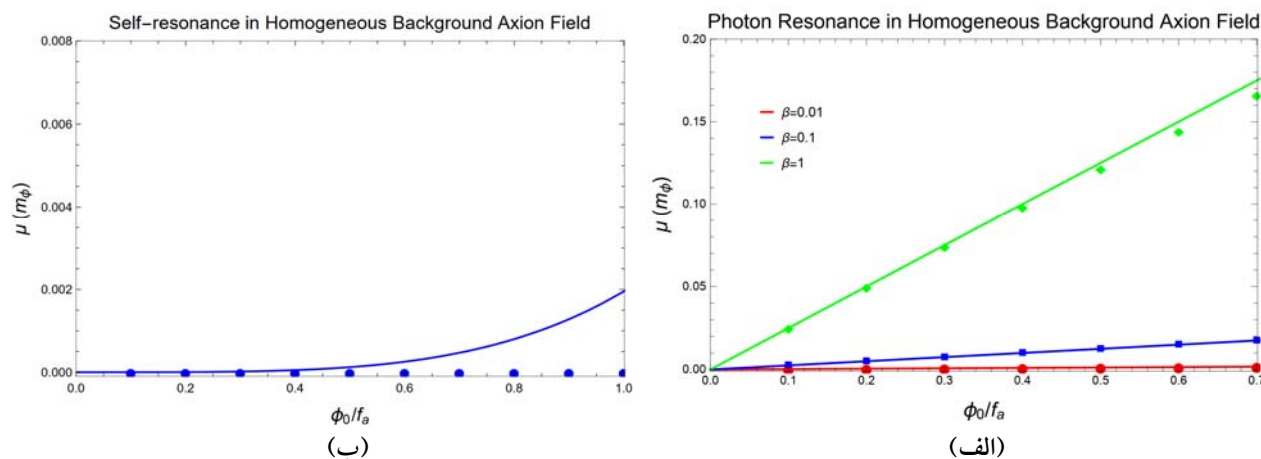
اگر معادلات (۲۸) و (۲۹) را با معادله (۳۱) مقایسه کنیم زمانی که  $k \gg g\phi_\gamma m_\phi \phi_0$  و  $k^2 + m_\phi^2 \gg \lambda \phi_0^2$  در رژیم تشدید باریک برای تشدید فوتونی و آکسیونی هستند و بیشینه نرخ ناپایداری در این حد از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\mu_{\text{homog}}^\gamma = \frac{g\phi_\gamma m_\phi \phi_0}{\epsilon}, \quad (33)$$

$$\mu_{\text{homog}}^{\delta\phi} = \frac{1}{2 \times 16^2} \frac{\lambda^2 \phi_0^2}{m_\phi^2}, \quad (34)$$

نرخ ناپایداری بیشینه (۳۳) مربوط به اولین نوار ناپایداری است. منشأ آن نابودی یک اکسیون و تولید دو فوتون با تکانه  $k \approx m_\phi/2$  است (شکل ۱. الف). نرخ ناپایداری بیشینه (۳۴) مربوط به دومین نوار از ناپایداری مربوط به اختلالات آکسیونی هست. اولین نوار در خود برهم‌کنش اکسیون فرایند بدیهی تبدیل دو اکسیون با تکانه کوچک به دو اکسیون با تکانه کوچک است، که مورد علاقه ما نخواهد بود. دومین نوار مربوط به فرایند تبدیل چهار اکسیون غیرنسبیتی به دو اکسیون نسبیتی با  $k \approx \sqrt{3} m_\phi$  خواهد بود (شکل ۱. ب).

۱. در این مرجع به اشتباه به جای ضریب  $1/4$ ، ضریب  $1/2$  آورده شده است.



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نرخ ناپایداری در پیکربندی همگن (الف) تشدید فوتون و (ب) تشدید آکسونی. (نقاط نتایج حل عددی هستند و خطوط روابط تحلیلی (۳۱) و (۳۲) را نشان می‌دهند.

$$A_{l\lambda}^E(k, r) = -\frac{1}{k} \nabla \times A_{l\lambda}^M(k, r), \quad (38)$$

که دو مؤلفه بدون دیورژانس از پایه‌های هماهنگ کروی برداری هستند و بیانگر دو قطبش فوتون در این مختصات هستند. همچنین  $j_l(kr)$  تابع بسل کروی است. با توجه به  $\nabla \times A_{l\lambda}^{E(M)}(k, r) = -k A_{l\lambda}^{M(E)}(k, r)$  معادله حرکت به این صورت در می‌آید:

$$= \int \frac{k^\gamma dk}{(2\pi)^\gamma} \sum_{l\lambda} \left[ \begin{array}{l} \left[ \ddot{v}_{l\lambda} + (k^\gamma - m_\phi k g_{\phi\gamma} \cos(m_\phi t) \Phi(r)) v_{l\lambda} \right] \times \\ \left( A_{l\lambda}^E(k, r) + A_{l\lambda}^M(k, r) \right) \\ + \left[ \ddot{w}_{l\lambda} + (k^\gamma - m_\phi k g_{\phi\gamma} \cos(m_\phi t) \Phi(r)) w_{l\lambda} \right] \times \\ \left( A_{l\lambda}^E(k, r) - A_{l\lambda}^M(k, r) \right) \end{array} \right] \quad (39)$$

ناپایداری‌های مورد بررسی به دلیل ماهیت تشدید آنها نرخی متناسب با تعداد ذرات تولید شده موجود در محیط دارند. بنابراین اگر علاقمند به پیدا کردن بیشینه نرخ ناپایداری باشیم کافی است نرخ ناپایداری حاصل از ذراتی را در نظر بگیریم که بیشترین مدت حضور در سیستم را قبل از خارج شدن از آن دارند (به منظور جزئیات بیشتر به بخش ۳-۵ مراجعه شود). این خواسته باعث می‌شود تا بتوانیم در حل معادلات ساده‌سازی انجام دهیم. توجه شود که طبق معادله (۲۴) تجمع اکسیون‌ها در صفحه استوایی رخ می‌دهد. بنابراین فوتون‌هایی که در صفحه استوایی سیاهچاله زندگی می‌کنند به

دارد. در بخش‌های بعدی این مسائل را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم.

## ۵. ناپایداری تشدید در ابر اکسیونی

در این بخش به بررسی تشدید در ابر اکسیونی تشکیل شده در اطراف سیاهچاله چرخان- که دارای پیکربندی غیرهمگن است- می‌پردازیم. این کار مستلزم حل معادلات (۱۱) و (۱۴) است زمانی که میدان اکسیونی پس زمینه با رابطه (۲۴) داده شود.

### ۱.۵. تولید فوتون با تشدید پارامتری

با توجه به تقارن‌های موجود در مسئله، میدان برداری پیمانه‌ای الکترومغناطیسی را در پایه‌های متعامد هماهنگ‌های کروی برداری بسط می‌دهیم [۳۵ و ۵۵].

$$A_\perp(t, r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^\gamma} \sum_l \sum_{\lambda=-l}^l \left[ \begin{array}{l} a_+(k) \left( A_{l\lambda}^E(k, r) + A_{l\lambda}^M(k, r) \right) v_{l\lambda}(t, k) \\ + a_-(k) \left( A_{l\lambda}^E(k, r) - A_{l\lambda}^M(k, r) \right) w_{l\lambda}(t, k) + h.c \end{array} \right] \quad (36)$$

که در آن  $A_\perp(t, r)$  بخش فیزیکی میدان پیمانه‌ای است که عمود بر راستای انتشار است.  $v_{l\lambda}$  و  $w_{l\lambda}$  تابع مدهای مربوط به دو درجه آزادی فیزیکی میدان پیمانه‌ای هستند. همچنین داریم:

$$A_{l\lambda}^M(k, r) = \frac{-i}{\sqrt{l(l+1)}} [r \times \nabla] \left( j_l(kr) i^l Y_{l\lambda}(\theta, \phi) \right), \quad (37)$$



مشخصه رشد آن نسبت به نرخ تشدید پارامتری بسیار کندتر است [۵۶]. بنابراین از وابستگی زمانی آن صرف نظر می‌کنیم و محاسبات پیش رو را مانند حالت همگن بر حسب پارامتر بدون بعد  $\phi_0 / f_a$  انجام می‌دهیم. در بخش ۶ خواهیم دید که ناپایداری ابر اکسیونی حد بالایی روی  $\phi_0 / f_a$  می‌گذارد.

روش حل عددی مشابه روش بیان شده برای پیکربندی همگن است (روش فلوکت). با این تفاوت که در این حالت اندازه برداری که باید با زمان حل شود  $2N$  است و ماتریسی که تحول را مشخص می‌کند یک ماتریس  $2N \times 2N$  خواهد بود. بعد از حل عددی معادلات جفت شده در یک دوره تناوب و به دست آمدن ماتریس تحول، ویژه مقادیر آن را محاسبه می‌کنیم و از روی آن نرخ تشدید را به دست می‌آوریم  $\mu_i = \ln(\lambda_i / T)$ .

نتایج این محاسبات در شکل ۳ آمده است. به مانند حالت همگن، نتایج نشان می‌دهد که ناپایداری برای  $\beta$  های کوچک و در نتیجه ساده‌ترین مدل‌های اکسیون بی‌اهمیت ولی برای  $\beta$  های از مرتبه یک می‌تواند مهم باشد.

## ۵.۲. تولید اکسیون نسبی با تشدید پارامتری

برای بررسی نرخ ناپایداری اکسیونی در سیستم ابر اکسیونی مراحل مشابه با آنچه برای ناپایداری فوتونی صورت گرفت قابل انجام است. اختلالات مربوط به اکسیون‌های نسبی را بر حسب هماهنگ‌های کروی بسط می‌دهیم:

$$\delta\phi(t, r) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{l\lambda} \left[ a_-(k) u_{l\lambda}(t, k) Y_{l\lambda}(\theta, \varphi) j_l(kr) + h.c. \right]. \quad (43)$$

که در  $u_{l\lambda}$  تابع مد است. معادله حرکت مربوطه، زمانی که به صفحه استوایی محدود شویم (همان استدلال مربوط به تشدید فوتونی در این حالت نیز صادق است چراکه اختلالات اکسیونی مورد علاقه ذرات نسبی هستند) به این شکل نوشته می‌شود:

$$= \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \sum_{l\lambda} \left[ u_{l\lambda} + \left( k^2 + m_\phi^2 + \lambda \sin^2(m_\phi t) \Phi^2(r) \right) u_{l\lambda} \right] \times Y_{l\lambda}(\theta, \varphi) j_l(kr), \quad (44)$$

این معادله با محاسباتی مشابه با حالت فوتونی، به معادله زیر

دلیل احساس بیشترین طول ممکن از ابر، طولانی‌ترین زمان حضور در سیستم را قبل از فرار از آن دارند و در نتیجه امکان ایجاد تشدید بیشتری نیز خواهند داشت. بنابراین برای یافتن بیشینه نرخ ناپایداری با تقریب خوبی کافی است که معادله محدود شده به صفحه را در نظر بگیریم. در این صورت فقط تابعیت شعاعی ابر اکسیونی مهم خواهد بود.

همچنین با توجه به تقارن‌های موجود، انتظار می‌رود که مد مربوط به  $l=1$  بیشترین ناپایداری را تجربه کند. بنابراین خود را محدود به کانال  $l=1$  می‌کنیم. اگر از خاصیت‌های تعامد و کامل بودن هماهنگ‌های کروی برداری استفاده کنیم به معادله زیر می‌رسیم:

$$\ddot{\Phi}_{1d}(k, t) + k^2 z_{1,0}(k, t) \Phi_{1d}(k, t) - m_\phi g_{\phi\gamma} k \cos(m_\phi t) \int \frac{dk'}{2\pi} z_{1,0}(k, t) \Phi_{1d}(k' - k), \quad (40)$$

که در آن  $\Phi_{1d}(k) = z_{1,0}(k, t) = v_{1,0}(k, t) + w_{1,0}(k, t)$  تبدیل فوریه یک‌بعدی مربوط به تابعیت شعاعی ابر اکسیونی است.

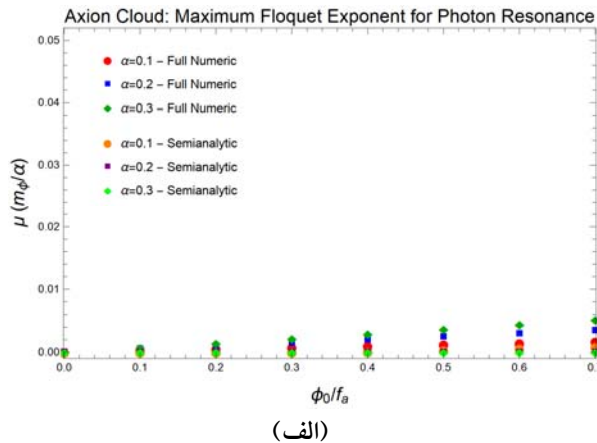
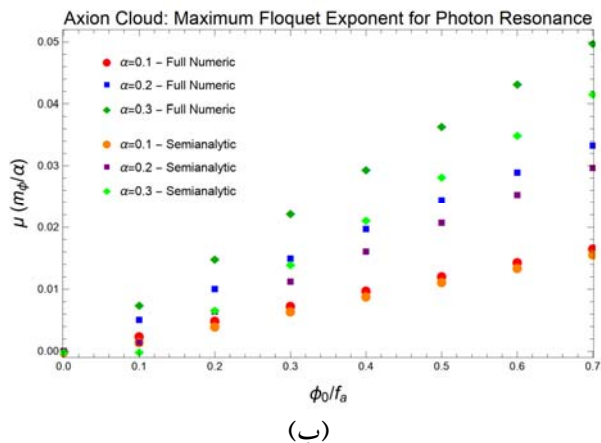
$$\Phi_{1d}(k) = \int_0^\infty dr \Phi(r) \cos(kr) = \frac{\phi_0}{2} \frac{1 - \varepsilon(k/m_\phi \alpha)^2}{m_\phi \alpha \left( 1 + \varepsilon(k/m_\phi \alpha)^2 \right)}. \quad (41)$$

از رابطه (۴۱) مشخص می‌شود که  $\Phi_{1d}(k)$  در ناحیه  $k/m_\phi \alpha \leq O(1)$  متمرکز شده است که تقریب استفاده شده در به دست آوردن رابطه (۴۰) را تأیید می‌کند.

برای حل عددی معادله (۴۰) از آنجایی که تمام مدهای مختلف با هم جفت شده‌اند باید فضای  $k$  را گسسته کنیم

$$k = \frac{2\pi n}{L}; \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad (42)$$

به صورتی که اندازه جعبه انتگرال‌گیری  $L \gg 1/m_\phi \alpha$ . انتظار ما از مطالب مطرح شده در بخش مربوط به پیکربندی همگن آن است که بیشترین تشدید در تکانه  $k \approx m_\phi/2$  صورت گیرد. بنابراین در حل عددی تعداد  $N$  تا از مدها در اطراف  $m_\phi/2$  را در نظر می‌گیریم و معادلات جفت شده آنها را حل می‌کنیم. ما در محاسبات عددی،  $\tilde{L} = L/m_\phi = 3$  و  $N/\tilde{L} = 1$  را انتخاب می‌کنیم تا قسمت اصلی تابع  $\Phi_{1d}(k-k')$  موجود در انتگرال‌ده، پوشش داده شود. همچنین دامنه ابر اکسیونی است که توسط فرایند آبرتابش تولید شده است و با گذشت زمان به دلیل تداوم این فرایند بزرگ‌تر می‌شود. اما زمان



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نرخ ناپایداری فوتونی در ابر آکسیونی. نتایج حل عددی و نتایج حاصل از توصیف تحلیلی بیان شده در بخش ۳-۵ سازگاری خوبی با هم دارند. (الف)  $\beta = 0.1$  و (ب)  $\beta = 1$ .

داریم بیشترین نرخ تشدید را داشته باشند). نتایج را با انتخاب  $\tilde{L} = 20$  و  $N/\tilde{L} = 1$  به دست می‌آوریم که در شکل ۴ آورده شده است و حاکی از آن است که تشدید آکسیونی به ازای تمام پارامترهای قابل قبول بسیار کوچک است و اهمیت نخواهد داشت.

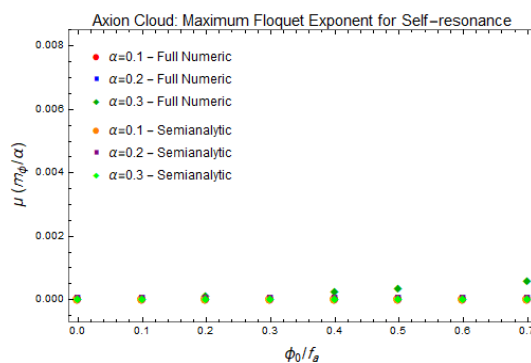
### ۳.۵. توصیف تحلیلی از نرخ ناپایداری تشدید

در این بخش سعی داریم نرخ تشدید به دست آمده از حل عددی معادلات حرکت را با توصیفی تحلیلی توجیه کنیم. نسبت به پیکربندی همگن، ابر آکسیونی یک اندازه زمانی جدید وارد مسئله می‌کند؛ زمانی که طول می‌کشد تا ذره نسبیتی از ابر فرار کند

$$\mu_{escape} \sim \frac{v}{R_{cloud}} \sim v m_\phi \alpha, \quad (47)$$

که در آن  $v$  سرعت ذره نسبیتی است که برای فوتون  $v = 1$  و برای آکسیون‌های نسبیتی نوار دوم  $v = \sqrt{3}/2$ . این ذرات نسبیتی تنها در مدت زمانی که درون ابر آکسیونی قرار دارند فرصت تحریک سیستم و در نتیجه تشدید پارامتری را خواهند داشت و اگر نرخ تشدید پارامتری کندتر از نرخ فرار ذرات از ابر آکسیونی باشد، تشدید پارامتری در عمل رخ نخواهد داد. بنابراین، یک تقریب بسیار خوب برای نرخ تشدید برای یک ابر متمرکز به شکل زیر است [۳۴]:

$$\mu = \begin{cases} \mu_{homog} - \mu_{escape}, & \mu_{homog} > \mu_{escape} \\ 0, & \mu_{homog} < \mu_{escape} \end{cases}, \quad (48)$$



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نرخ ناپایداری آکسیونی در ابر آکسیونی. نتایج نشان می‌دهند که به ازای تمام مقادیر ممکن پارامترها این نوع از تشدید با نرخ بسیار کمی رخ می‌دهند.

تقلیل پیدا می‌کند:

$$\ddot{u}_1(k', t) + \left( k'^2 + m_\phi^2 \right) u_1(k', t) + \lambda \sin^2(m_\phi t) \int \frac{dk}{2\pi} u_1(k, t) \tilde{\Phi}_d^\vee(k - k'), \quad (45)$$

که در آن

$$\tilde{\Phi}_d^\vee(k) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dr \Phi^\vee(r) \cos(kr) = \frac{\phi_0^\vee}{m_\phi \alpha} \frac{1 - \left( k / m_\phi \alpha \right)^2}{\left( 1 + \left( k / m_\phi \alpha \right)^2 \right)^3}, \quad (46)$$

از روش حل عددی مشابه بخش قبل برای حل معادله (۴۵) استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که باید مدهای مورد نظر را حول  $k = \sqrt{3} m_\phi$  در نظر بگیریم (متناظر با ذراتی که انتظار

چگالی ابر از حد معینی بیشتر شود جمله سوم (خود-برهم کنش آکسیون) نیز سهمی به اندازه جملات اول و دوم خواهد داشت. اگر چگالی میدان آکسیونی به این حد برسد اثرات خود-برهم کنش باعث می شود که سیستم دچار رمبش شود، مقداری از انرژی آن به سیاهچاله برگردد و مقداری هم به صورت امواج گرانشی آزاد شود [۵۷ و ۵۸]. این اتفاق باعث از بین رفتن ابر آکسیونی می شود و در نتیجه تشدید پارامتری موضوعیت نخواهد داشت. این رخداد مشابه پدیده یوزنوا<sup>۱</sup> در چگاله‌ها در فیزیک ماده چگال است [۵۹].

بنابراین نتایج به دست آمده برای نرخ ناپایداری‌ها تا زمانی اعتبار دارند که انرژی پتانسیل گرانشی بزرگ‌تر از انرژی پتانسیل ناشی از خود-برهم کنش باشد. به عبارت دیگر رابطه زیر باید برقرار باشد:

$$\int \frac{\alpha}{r} |\psi \psi^*| d^3r > \int \frac{\lambda}{\sqrt{2} m_\phi} |\psi \psi^*|^2 d^3r, \quad (52)$$

که سمت چپ انرژی پتانسیل گرانشی و سمت راست انرژی پتانسیل خود-برهم کنش است. با استفاده از پیکربندی معادله (۲۴) و توجه به این که  $\psi \sim \sqrt{2} m_\phi \phi$  است، خواهیم داشت:  $\alpha / f_a < \sqrt{128/15} \alpha$  این حد به ازای  $\alpha = 0.23$  به صورت  $\alpha / f_a < 0.67$  در می آید که با نتایج شبیه‌سازی‌های [۵۷ و ۵۸] سازگار است. زمانی که چگالی ابر آکسیونی توسط مکانیزم آرتابش به حدی برسد که نامساوی بالا نقض شود، ابر آکسیونی رمبش خواهد کرد.

### ۶.۱. تشدید فوتونی

با توجه به رابطه (۳۳) و روابط ارائه شده در بخش ۳.۵ شرط آن که این ناپایداری روی دهد به این صورت است:

$$\frac{g_{\phi\gamma} m_\phi (\cdot/5 \phi)}{\epsilon} = \beta \frac{0.5 m_\phi \phi}{\epsilon f_a} > \frac{m_\phi \alpha}{\epsilon/8}, \quad (53)$$

که  $\beta = g_{\phi\gamma} f_a$  اگر از شرط  $\alpha / f_a < \sqrt{128/15} \alpha$  استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\beta > 0.57, \quad (54)$$

این حد برای  $\beta$  تأییدی بر این نتیجه است که تشدید فوتونی برای ساده‌ترین مدل‌های آکسیونی که  $\beta \sim O(0.1)$  مؤثر نیست

که در آن  $\mu_{homog}$  نرخ تشدید پارامتری در پیکربندی همگن است که با محاسبات عددی داده می شود. در حد دامنه میدان کوچک  $\mu_{homog}$  توسط معادلات تحلیلی (۳۳) و (۳۴) داده می شوند. برای محاسبه  $\mu_{escape}$  از طول ابر که در آن، مقدار میدان بیشتر از نصف مقدار بیشینه آن است

$$(R_{cloud} = 4/893 / m_\phi \alpha) \text{ استفاده می کنیم:}$$

$$\mu_{escape} \approx \frac{v m_\phi \alpha}{\epsilon/893}, \quad (49)$$

و مقدار دامنه میدان که برای محاسبه  $\mu_{homog}$  در حل عددی بخش ۴ مورد نیاز است از رابطه زیر داده می شود [۵۴]:

$$\langle \phi \rangle = \frac{I}{R_{cloud} FWHM} \int dr |\phi(r)| \approx 0.092 \phi, \quad (50)$$

نقاط موجود در شکل‌های ۳ و ۴ که مربوط به محاسبات شبه-تحلیلی هستند از این روش محاسبه شده‌اند. این نتایج همخوانی قابل قبول این توصیف تحلیلی از نرخ تشدید را با مقادیر محاسبه شده از حل عددی معادلات نشان می دهد.

### ۶. حد پایین جفت‌شدگی برای ناپایداری تشدید

در این بخش با بررسی‌های تحلیلی و ملاحظات فیزیکی، حد پایین جفت‌شدگی مورد نیاز برای رخ دادن تشدید پارامتری مؤثر در ابر آکسیونی را ارائه خواهیم داد. ابتدا با بررسی دامنه اعتبار موقعیت فیزیکی فرض شده برای ابر آکسیونی، حد بالا برای دامنه میدان آکسیونی به دست می آوریم. سپس با استفاده از این حد و نرخ تحلیلی ارائه شده در بخش ۵-۳ حدهای بالا بر ناپایداری تشدید از جنس فوتون و آکسیون‌های نسبی را به دست می آوریم.

معادله شرودینگر (۲۲) تنها با در نظر گرفتن جمله جرمی در بسط پتانسیل (۱۳) به دست آمده است. اگر جمله برهم کنش چهارتایی آکسیون را نیز در نظر بگیریم به معادله زیر می رسیم:

$$i \dot{\psi}(t, r) = \left[ -\frac{\nabla^2}{2m_\phi} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\sqrt{2} m_\phi} |\psi \psi^*| \right] \psi(t, r), \quad (51)$$

پروفایل محاسبه شده برای ابر آکسیونی در بخش‌های قبل حاصل رقابت جملات اول (جنبشی) و دوم (پتانسیل گرانشی) در سمت راست معادله (۵۱) است. اما زمانی که

احتمالی لیزر گونه الکترومغناطیسی حاصل از تشدید در ابر اکسیونی در ساده‌ترین مدل‌های اکسیون کار نمی‌کند. اما این‌گونه ناپایداری را برای مدل‌های غیراستاندارد با  $\beta > 0.57$  متصور هستیم. بنابراین، به طور کلی نتیجه می‌گیریم که پدیده تشدید در ابر اکسیونی به سختی قابل مشاهده خواهد بود، مگر آن که اکسیونی در طبیعت وجود داشته باشد که توسط معدودی از نظریه‌های غیراستاندارد پیش‌بینی می‌شود.

چگالی ابر اکسیونی در اثر ناپایداری آبرتابش افزایش پیدا می‌کند. اگر چگالی اکسیون‌ها به حدی برسد که بسط پتانسیل نوسانی اکسیون اعتبار خود را از دست بدهد، برای حل دقیق تحول ابر اکسیونی باید آن را در حضور شکل کامل پتانسیل (۳) بررسی کنیم. برخی کارها از جمله [۵۷ و ۵۸] از طریق حل عددی تلاش‌هایی در این راستا انجام داده‌اند و برخی نتایج آنها با تخمین به دست آمده در بخش ۶ سازگاری دارد. قدم بعدی در این راستا بررسی تحول سیستم در این حد و در حضور جفت‌شدگی به فوتون می‌باشد.

### سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله از هم فکری علیرضا طالبیان اشکذری کمال سپاس‌گزاری را دارند. رضا عبادی از حمایت‌های پژوهشگاه دانش‌های بنیادی و پژوهشکده نجوم این مؤسسه قدردانی می‌کند.

و تنها برای برخی مدل‌های غیراستاندارد این امکان وجود دارد.

### ۲.۶. تشدید اکسیون‌های نسبیتی

با استفاده از رابطه (۳۴) و روابط بخش قبل، تشدید اکسیون‌های نسبیتی زمانی اتفاق می‌افتد که:

$$\frac{1}{2 \times 10^{16}} \frac{\lambda^2 (0.5\phi)^4}{m_\phi^3} = \frac{0.5^4}{2 \times 10^{16}} m_\phi \left(\frac{\phi}{f_a}\right)^4 > \frac{\sqrt{3} m_\phi \alpha}{2 \cdot 4/8}, \quad (55)$$

این رابطه به ازای  $\alpha = 0.23$  حد پایین  $\phi / f_a > 3/6$  را برای تشدید اکسیونی معرفی می‌کند. این رابطه علاوه بر این که با حد بالای به دست آمده از رابطه (۵۲) (یعنی  $\phi / f_a < 0.67$ ) در تناقض است، با حد لازم برای اعتبار بسط پتانسیل (۱۳) (حد میدان کوچک) نیز در تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که قبل از این که تشدید اکسیونی به صورت مؤثر رخ دهد، خود-برهم‌کنش اکسیونی مهم می‌شود که رمبش ابر اکسیونی را به دنبال خواهد داشت.

### ۷. جمع‌بندی و بحث

در این کار، مسئله ناپایداری ابر اکسیونی در اثر تشدید فوتونی و تشدید اکسیون‌های نسبیتی را بررسی کردیم. روش‌های تحلیلی به کار برده‌شده- در همخوانی با نتایج عددی- نشان دادند که تشدید از طریق خود-برهم‌کنش اکسیونی و تولید اکسیون‌های نسبیتی به صورت مؤثر روی نمی‌دهد. همچنین ادعاهای مطرح شده در [۲۳ و ۲۴] مبنی بر سیگنال‌های

### مراجع

1. R D Peccei and H R Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440.
2. S Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 223.
3. F Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 279.
4. E Armengaud *et al.*, [IAXO Collaboration], *arXiv:1904.09155 [hep-ph]*.
5. B Lakic *et al.*, [CAST Collaboration], *PoS HEP 2005* (2006) 022.
6. L F Abbott and P Sikivie, *Phys. Lett. B* **120**, (1983) 133. [*Phys. Lett.* **120 B** 133 (1983)].
7. M Dine and W Fischler, *Phys. Lett. B* **120** (1983) 137. [*Phys. Lett.* **120 B** 137 (1983)].
8. J E Kim and G Carosi, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 557.
9. J Preskill, M B Wise and F Wilczek, *Phys. Lett. B*
10. L Bergstrom, *New J. Phys.* **11** (2009) 105006.
11. M Fairbairn, R Hogan, and D J E Marsh, *Phys. Rev. D* **91**, 2 (2015) 023509.
12. N Du *et al.*, [ADMX Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **120**, 15 (2018) 151301 doi:10.1103/Phys. Rev. Lett. 120. 151301 [arXiv:1804.05750 [hep-ex]].
13. B Majorovits *et al.*, [MADMAX interest Group], *arXiv:1712.01062 [physics.ins-det]*.
14. B.R Safdi, Z Sun, and A Y Chen, *arXiv:1811.01020 [astro-ph.CO]*.
15. T Liu, G Smoot, and Y Zhao, *arXiv:1901.10981 [astro-ph.CO]*.
16. R Brito, V Cardoso, and P Pani, *Lect. Notes Phys.* **906** (2015) 1.

38. S L Detweiler, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2323.
39. V Cardoso and S Yoshida, *JHEP* **0507** (2005) 009.
40. S R Dolan, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 084001.
41. W E East and F Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 4 (2017) 041101.
42. W E East, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 13 (2018) 131104.
43. W H Press and S A Teukolsky, *Nature* **238** (1972) 211.
44. S A Teukolsky, *Astrophys. J.* **185** (1973) 635.
45. W H Press and S A Teukolsky, *Astrophys. J.* **185** (1973) 649.
46. S A Teukolsky and W H Press, *Astrophys. J.* **193** (1974) 443.
47. D N Page, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 198.
48. M H Namjoo, A H Guth, and D I Kaiser, *Phys. Rev. D* **98**, 1 (2018) 016011.
49. D Baumann, H S Chia, and R A Porto, *Phys. Rev. D* **99**, 4 (2019) 044001.
50. M Yoshimura, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 873.
51. M Yoshimura, hep-ph/9603356.
52. I I Tkachev, *Phys. Lett. B* **261** (1991) 289.
53. A Riotto and I Tkachev, *Phys. Lett. B* **484** (2000) 177.
54. C Chicone, “*Ordinary Differential Equations with Applications*”. Springer-Verlag, New York (1999).
55. K. T. Hecht, *Quantum Mechanics*, Springer (2000).
56. M Boskovic, R Brito, V Cardoso, T Ikeda, and H Witek, *Phys. Rev. D* **99**, 3 (2019) 035006.
57. H Yoshino and H Kodama, *Prog. Theor. Phys.* **128** (2012) 153.
58. H Yoshino and H Kodama, *Class. Quant. Grav.* **32**, 21 (2015) 214001.
59. E A Donley, N R Claussen, S L Cornish, J L Roberts, E A Cornell, and C E Wieman, *Nature* **412** (2001) 295.
17. F V Day and J I McDonald, *arXiv:1904.08341* [hep-ph].
18. V Cardoso, R Brito and J L Rosa, *Phys. Rev. D* **91**, 12 (2015) 124026.
19. V Cardoso, P Pani, and T T Yu, *Phys. Rev. D* **95**, 12 (2017) 124056.
20. A Arvanitaki and S Dubovsky, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 044026.
21. A Arvanitaki, M Baryakhtar, and X Huang, *Phys. Rev. D* **91**, 8 (2015) 084011.
22. R Brito, S Ghosh, E Barausse, E Berti, V Cardoso, I Dvorkin, A Klein, and P Pani, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 13 (2017) 131101.
23. J G Rosa and T W Kephart, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 23 (2018) 231102.
24. T Ikeda, R Brito, and V Cardoso, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 8 (2019) 081101.
25. A Hook, *arXiv:1812.02669* [hep-ph].
26. C A Baker *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 131801.
27. C Vafa and E Witten, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 535.
28. J E Kim, *Phys. Rept.* **150** (1987) 1.
29. M Srednicki, *Nucl. Phys. B* **260** (1985) 689.
30. D J E Marsh, *Phys. Rept.* **643** (2016) 1 [*arXiv:1510.07633* [astro-ph.CO]]
31. J E Kim, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 103.
32. M A Shifman, A I Vainshtein, and V I Zakharov, *Nucl. Phys. B* **166** (1980) 493.
33. M Dine, W Fischler and M Srednicki, *Phys. Lett.* **104** B 199 (1981).
34. A R Zhitnitsky, *Sov. J. Nucl. Phys.* **31** (1980) 260.
35. M P Hertzberg and E D Schiappacasse, *JCAP* **1811**, 11 (2018) 004.
36. Y B Zel’dovich, **1971**. *Pis. Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **14**, 270 (1971).
37. Y B Zel’dovich **1972**. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **62** (1971) 2076.