

شیمی سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی گرانش جرم‌دار در حضور میدان توانی ناوردای ماکسول

علی دهقانی و سید حسین هندی

۱. بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

۲. رصدخانه ابوریحان بیرونی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: hendi@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۲۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۳/۰۶)

چکیده

در این مقاله، جواب‌های سیاه‌چاله‌ای مجانباً پاددوسیتیه گرانش جرم‌دار در حضور میدان الکترومغناطیسی غیرخطی نظریه توانی ناوردای ماکسول، در ابعاد دلخواه، بررسی و کُنش اقلیدسی متناظر با این جواب‌ها ارائه می‌شود. با استفاده از کنش اقلیدسی متناهی، تابع پارش گرانشی در آنسامبل کانونی در تمامی ابعاد محاسبه شده و سپس کمیت‌های ترمودینامیکی متناظر با سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی به دست می‌آید. با توسعه فضای فاز ترمودینامیکی، یعنی با در نظر گرفتن ثابت کیهان‌شناسی منفی متناسب با فشار ترمودینامیکی، قانون اول ترمودینامیک و سازگاری آن با رابطه اسمار بررسی می‌شود. در ادامه، معادله حالت حاکم بر سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی به دست آمده و ثابت می‌شود که معادله نقاط بحرانی این سیاه‌چاله‌ها نشان دهنده گذارهای سیاه‌چاله‌ای مشابه با گذارهای واندروالسی، شبه واندروالسی و جامد/مایع/گاز (مرتبط با نقطه سه‌گانه) در دستگاه‌های معمول ترمودینامیکی است. به طور ویژه، گذارهای واندروالسی در ابعاد $d \geq 4$ ، گذارهای شبه واندروالسی در ابعاد $d \geq 6$ و گذارهای متناظر با نقطه سه‌گانه، یعنی گذارهای سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ در ابعاد $d \geq 6$ مشاهده می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: شیمی سیاه‌چاله‌ها، گرانش جرم‌دار، نظریه توانی ناوردای ماکسول

۱. مقدمه

به عنوان یک متغیر ترمودینامیکی متناسب با فشار ترمودینامیکی

به صورت زیر در ابعاد دلخواه نظر گرفته شود [۱ و ۲]:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (1)$$

در نتیجه ورود این جمله به قانون اول و گسترش فضای فاز ترمودینامیکی، معادله حالت سیاه‌چاله‌ها می‌تواند بر حسب رفتارهای بحرانی به خصوصی، در تناظر با رفتارهای بحرانی

در دهه اخیر، نوآوری‌های بدیعی در زمینه ترمودینامیک و فضای فاز سیاه‌چاله‌های مجانباً پاددوسیتیه (AdS) روی داده است که ناشی از ورود جمله فشار-حجم به قانون اول ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها است. به منظور ورود این جمله به قانون اول، پیشنهاد شده است که ثابت کیهان‌شناسی منفی (Λ)

ارتباط دقیق بین اُفق رویداد سیاه‌چاله‌ها و حجم ویژه ترمودینامیکی v توسط تحلیل ابعادی و بازگرداندن ثابت‌های بنیادی به صورت $v = 4r_+ \ell_p^2 / (d-2)$ به دست می‌آید که در آن ℓ_p طول پلانک است [۶]. از این رو، ترمودینامیک در فضای فاز توسعه یافته مورد علاقه پژوهشگران است.

سایر پژوهش‌ها نشان داده‌اند که قطعات گمشده تناظر بین بحرانیت سیاه‌چاله‌ها و مواد معمول در طبیعت می‌تواند توسط فضازمان‌های سیاه‌چاله‌ای پیچیده‌تر و به طور ویژه در ابعاد بالا پیدا شوند. در این خصوص، در چارچوب گرانش اینشتین، می‌توان به گذار فاز بازگشتی در سیاه‌چاله‌های کر-پاددوسیت با یک پارامتر چرخان (در ابعاد $d \geq 6$) و سیاه‌چاله‌های پاددوسیت در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی غیرخطی بون-اینفلد (فقط در $d=4$) اشاره کرد [۷ و ۸]. همچنین، زمانی که پارامتر چرخان دومی به سیاه‌چاله‌های کر-پاددوسیت در ابعاد $d \geq 6$ افزوده شود، معادله حالت این نوع از سیاه‌چاله‌ها می‌تواند سه نقطه بحرانی را به عنوان جواب بپذیرد و در نتیجه همتای گرانشی نقطه بحرانی سه‌گانه ظاهر می‌شود [۹]. در این صورت به ساختار فضای فازی شبیه به مخلوط یخ، آب و بخار آب دست می‌یابیم، با این تفاوت که خط هم‌زیستی بین فازهای جامد و مایع در دستگاه‌های ترمودینامیکی استاندارد بدون نقطه انتهایی است ولی در دستگاه‌های سیاه‌چاله‌ای خط هم‌زیستی در یکی از نقاط بحرانی پایان می‌یابد.

از سوی دیگر، در نظریه‌های گرانشی تعمیم یافته، رفتار بحرانی و فضای فازهای ترمودینامیکی غنی‌تری برای سیاه‌چاله‌های پاددوسیت مشاهده می‌شود. برای مثال، در چارچوب گرانش لاولاک، گذار فاز واندروالسی معکوس، کاملاً در جهت عکس گذار فاز استاندارد واندروالسی، مشاهده می‌شود [۱۰ و ۱۱]. همچنین، سیاه‌چاله‌های پاددوسیت با اُفق رویداد تخت نیز در حضور خمش‌های مراتب بالا می‌توانند گذار فاز و رفتار بحرانی را تجربه کنند که این مورد نیز در گرانش اینشتین دیده نمی‌شود [۱۲]. در چارچوب گرانش جرم‌دار نیز، بر خلاف گرانش اینشتین، تمام سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی پاددوسیت (با اُفق‌های رویداد کروی، تخت و هذلولوی) می‌توانند

معمول در طبیعت، درک شود. اکنون، بر اساس پیشرفت‌های صورت گرفته، این ناحیه از فیزیک تحت عنوان شیمی سیاه‌چاله‌ای شناخته می‌شود [۳]. در این زمینه، اولین شاهد مربوط به سیاه‌چاله‌های باردار مجانباً پاددوسیت در چارچوب گرانش اینشتین است که گذار فاز مرتبه اولی در تشابه با گذار فاز واندروالسی را در فضای فاز توسعه نیافته (عدم حضور جمله فشار-حجم) [۴ و ۵] و همچنین در فضای فاز توسعه یافته [۶] تجربه می‌کنند. بنابراین سیاه‌چاله‌های پاددوسیت رفتاری شبیه سیال واندروالسی از خود نشان می‌دهند، از این رو یک تناظر بین سیاه‌چاله‌های پاددوسیت و سیستم‌های ترمودینامیکی معمول وجود دارد. همان‌طور که در مرجع [۶] بحث شده است، در صورت عدم حضور جمله فشار-حجم در ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها، الزاماً بعضی از کمیت‌های فزونور (نافزونور) سیاه‌چاله‌ای باید با کمیت‌های نافزونور (فزونور) سیستم‌های ترمودینامیکی مرسوم شناسایی شوند. در این رابطه، شناسایی زیر بین سیاه‌چاله‌های رایسنر-نوردشتروم در یک زمینه پاددوسیت (سیاه‌چاله‌های RN-AdS) و شار اُفق واندروالسی پیدا شده است [۴ و ۵].

سیاه‌چاله‌های RN-AdS	شار اُفق واندروالسی
Q (بار الکتریکی)	T (دما)
β (عکس دما)	P (فشار)
r_+ (شعاع اُفق رویداد)	v (حجم ویژه)

که البته شناسایی کمیتی مانند بار الکتریکی با دما، و شناسایی عکس دما با فشار عجیب به نظر می‌رسد. برای اولین بار توسط مان و کوبیزناک این مشکل شناسایی کمیت‌های فیزیکی غیر مرتبط با یکدیگر در فضای فاز توسعه یافته برطرف شد و تناظر کامل زیر به دست آمد [۶].

سیاه‌چاله‌های RN-AdS	شار اُفق واندروالسی
T (دمای هاوکینگ)	T (دما)
$P = -\Lambda / 18\pi$ (فشار)	P (فشار)
r_+ (شعاع اُفق رویداد)	v (حجم ویژه)

ابتدا برای اولین بار از طریق محاسبه کُنش اقلیدسی، تابع پارش شبه-کلاسیکی را در چارچوب گرانش جرم‌دار می‌یابیم و سپس تمام کمیت‌های ترمودینامیکی را در توافق با مرجع [۲۷]، ولی این بار تا تقریب مرتبه آخر پتانسیل‌های برهم‌کنشی گراویتون‌ها، از طریق تابع پارش استخراج می‌کنیم. سپس، در چارچوب فضای فاز توسعه یافته به بررسی قانون اول ترمودینامیک و رابطه‌ی اسمار متناظر با آن می‌پردازیم. در ادامه روی معادله‌ی حالت سیال‌گونه سیاه‌چاله‌ها تمرکز می‌کنیم و تمام رفتارهای بحرانی ممکن در مدل را، در تناظر با مواد معمول در طبیعت، توسط تحلیل نمودارهای فاز می‌یابیم و در این بین به امکان ظهور نقطه‌ی بحرانی سه‌گانه و رفتار واندروالسی نابهنجار نیز می‌پردازیم.

با این انگیزه‌ها، در این مقاله، ابتدا مروری بر کُنش و معادلات میدان گرانش جرم‌دار- ناوردای توانی ماکسول و جواب‌های سیاه‌چاله‌ای توپولوژیکی آن خواهیم داشت. در ادامه، روی شیمی سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی در نقطه‌ی بحرانی تمرکز می‌کنیم و به بررسی تمامی گذار فازهای هولوگرافیکی موجود در مدل می‌پردازیم. در نهایت این مقاله را با ارائه نتایج یافته شده به پایان می‌رسانیم.

۲. کُنش و معادلات میدان

کُنش نظریه‌ی میدان گرانشی جرم‌دار [۲۸ و ۲۹] (نسخه‌ی dRGT)، روی خمینه‌ی d -بُعدی \mathcal{M} ، در حضور لاگرانژی نظریه‌ی ناوردای توانی ماکسول، $L_p = (-\mathcal{F})^d$ ، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_b = -\frac{1}{16\pi G_d} \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + m_g^2 \sum_{i=1}^{d-2} c_i U_i(g, f) + L_p], \quad (2)$$

که در آن G_d ثابت نیوتن در ابعاد دلخواه، R نرده‌ای ریچی و Λ نیز ثابت کیهان‌شناسی در ابعاد دلخواه است و توسط رابطه‌ی $\Lambda = -(d-1)(d-2)/2\ell^2$ بر حسب شعاع فضای پاددوسیه (ℓ) مشخص می‌شود. در این کُنش، m_g پارامتر جرم گراویتون، c_i ها ثابت‌های اختیاری نظریه، $g_{\mu\nu}$ معرف متریک فیزیکی فضازمان g دترمینان آن است. تانسور متریک مرجع $f_{\mu\nu}$ نیز به عنوان یک الزام برای جرم‌دار کردن ذرات

گذار فاز از نوع واندروالسی [۱۳]، گذار فاز بازگشتی [۱۴] و یا در حضور یک میدان الکترومغناطیسی غیر خطی (از نوع بورن-اینفلد) گذار فاز سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ متناظر با نقطه‌ی سه‌گانه را تجربه کنند [۱۵]. بنابراین ساختار فضای فاز سیاه‌چاله‌ها در گرانش‌های تعمیم یافته از جمله گرانش جرم‌دار و گرانش لاولاک در قیاس با گرانش اینشتین بسیار غنی‌تر است؛ و به همین علت مورد توجه پژوهشگران هستند [۱۰-۲۵].

از انگیزه‌های مهم این تحقیق، گسترش فهم ما درباره‌ی فضای فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی پاددوسیه در چارچوب نظریه‌های گرانشی پیچیده‌تر است. با شناخت رفتارهای متفاوت در نظریه‌های تعمیم یافته گرانشی، می‌توان به وابستگی رفتارها به نظریه‌ی انتخابی پی برد، که یک ویژگی کلیدی در فهم نظریه‌ها و خروجی‌های آنها است. از این رو، ما در این مقاله به مطالعه‌ی فضای فاز ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی با تصحیحات ناشی از گراویتون‌های جرم‌دار و میدان‌های الکترومغناطیسی غیر خطی (ناشی از نظریه‌ی ناوردای توانی ماکسول) می‌پردازیم. ترمودینامیک فضای فاز توسعه یافته و گذار فازهای مربوط به این مورد اخیر، یعنی گرانش جرم‌دار- ناوردای توانی ماکسول، هنوز بررسی نشده است. لازم به ذکر است که در چارچوب این مدل، جواب‌های سیاه‌چاله‌ای پاددوسیه تا مرتبه چهارم برهم‌کُنش پتانسیل‌های گراویتونی، ابتدا در مرجع [۲۶] به منظور مطالعه‌ی رسانندگی هولوگرافیکی معرفی شدند. سپس تعمیمی از این جواب‌ها در حضور جملات خمش مراتب بالاتر (جمله‌ی گوس- بونه) در مرجع [۲۷] ارائه شد که در آن هندسه و خصوصیات ترمودینامیکی فضازمان سیاه‌چاله‌ای بررسی شده است. در مقاله‌ی اخیر، مؤلفین به بررسی قانون اول ترمودینامیک و همچنین تحلیل ظرفیت گرمایی به منظور بررسی امکان وجود رفتار بحرانی در فضای فاز توسعه نیافته (ثابت کیهان‌شناسی منفی و ثابت) پرداخته‌اند. این جواب‌های سیاه‌چاله‌ای شامل جملات پتانسیلی برهم‌کنشی گراویتون‌ها تا مرتبه چهارم هستند و در حد خمش صفر، جواب‌ها و کمیت‌های ترمودینامیکی ارائه شده در این مقاله (تا مرتبه چهارم پتانسیل‌های برهم‌کنشی) بازتولید می‌شوند. در مقاله‌ی حاضر، ما

دیزر^۱) یک یا چند درجه آزادی اضافی به صورت میدان‌های نرده ای با انرژی منفی است که در نظریه گرانش جرم‌دار ممکن است بروز کنند. وارد شدن شیخ در هر نظریه میدانی، با شمارش تعداد درجات آزادی نظریه در هر بُعد آشکار می‌شود. اثبات شده است که قسمت گرانشی مدل کنونی [۳۴]، یعنی گنش نظریه گرانش جرم‌دار با متریک مرجع تبهگن (در زبان صورت‌مندی استاکلبرگ)، می‌تواند به دو بخش مجزا تجزیه شود: یک بخش گرانشی بدون جمله جرمی با $d(d-3)/2$ درجه آزادی که به طور کمینه با بخش نرده ای (متشکل از $(d-2)$ میدان استاکلبرگ) با $(d-2)$ درجه آزادی جفت شده است. بنابراین در کل به تعداد $(d(d-1)-4)/2$ درجات آزادی سالم خواهیم داشت. به طور کلی، جفت شدن یک میدان برداری بدون جرم (لاگرانژی ماکسول) به صورت کمینه با گنش نظریه جرم‌دار این وضعیت را برهم نمی‌زند [۳۱، ۳۵ و ۳۶]. از سوی دیگر، نظریه ناوردای توانی ماکسول یک نظریه پیمانه‌ای $U(1)$ است و تعداد درجات آزادی دقیقاً مشابه نظریه الکترومغناطیس ماکسول است. جفت شدن کمینه آن با گرانش نیز، لااقل با انتخاب مناسب پارامترها، هیچ درجه آزادی جدیدی را معرفی نمی‌کند (این بیان برای نظریه الکترودینامیک غیر خطی بورن-اینفلد نیز صحیح است). اما، در صورتی که لاگرانژی نظریه گرانشی (حتی برای نظریه نسبیت عام) به صورت غیر کمینه با نظریه غیر خطی الکترودینامیکی جفت شود در این صورت امکان بروز مسئله شیخ با ترازهای انرژی منفی به وجود می‌آید [۳۷ و ۳۸]. در نهایت، اظهار نظر دقیق در مورد ناپایداری‌های شبیحی منوط به بررسی اختلالات میدان‌های استاکلبرگ، برداری و تانسوری در اطراف جواب‌های پس‌زمینه‌ای مدل و تحلیل فضای پارامتری مجاز نظریه است [۳۹].

اکنون مسئله اصلی یافتن جواب‌های سیاه‌چاله‌ای این مدل است و برای این منظور از رهیافتی که در [۳۰] ارائه شده است استفاده می‌کنیم. در بخش بعدی، جواب‌های سیاه چاله‌ای مربوط به معادلات میدان گرانشی فوق در حضور ثابت کیهان‌شناسی بررسی می‌شود.

اسپین-۲ وارد نظریه شده است (در گنش فوق، f به اختصار معرف متریک مرجع نظریه گرانش جرم‌دار است و نشان دهنده دترمینان آن نیست) [۲۸ و ۲۹]. در کنش فوق، $U_i(g, f)$ پتانسیل برهم‌کنشی گراویتون‌ها به صورت زیر است (مطابق با قرارداد مرجع‌های [۳۰، ۳۱ و ۳۲])

$$\begin{aligned} U_i &= [K]_i, \\ U_e &= [K]_e^r - [K^r]_e, \\ U_r &= [K]_r^r - r[K][K^r] + r[K^r]_r, \\ U_e &= [K]_e^r - e[K]_e^r [K^r] + e[K][K^r] + r[K^r]_e^r - e[K^r]_e, \\ U_0 &= [K]_0^0 - 1_0[K]_0^r [K^r] + r_0[K]_0^r [K^r] - r_0[K^r]_0 [K^r] \\ &\quad + 1_0[K]_0 [K^r]_0^r - r_0[K]_0 [K^r]_0 + r_0[K^r]_0^0, \end{aligned} \quad (3)$$

در یک فضا‌زمان d -بُعدی، حداکثر به تعداد $d-2$ پتانسیل برهم‌کنشی U_i وجود دارد. این پتانسیل‌ها از ترکیب‌های متفاوت تانسور متریک فیزیکی $(g_{\mu\nu})$ و تانسور متریک مرجع $(f_{\mu\nu})$ با معرفی تانسور $\mathcal{K}^\mu{}_\nu = \sqrt{g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}}$ ساخته می‌شوند که در آنها از نمادگذاری‌های فشرده $[K] = \mathcal{K}^\mu{}_\mu$ و $[K^r] = \mathcal{K}^\mu{}_\alpha \mathcal{K}^\alpha{}_\mu$ استفاده شده است. در نتیجه این انتخاب ویژه برای پتانسیل‌ها، مشاهده می‌شود که نظریه بدون شیخ است [۳۳] اکنون معادلات میدان گرانشی و الکترومغناطیسی به ترتیب با وردش گنش (۲) نسبت به تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ و پتانسیل پیمانه‌ای A_μ به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + m_g^2 \mathcal{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{r} g_{\mu\nu} L_P - r F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda \left(\frac{dL_P}{dF} \right), \quad (4)$$

$$\nabla_\mu \left[\frac{dL_P}{dF} F^{\mu\nu} \right] = 0. \quad (5)$$

در معادلات میدان فوق، $F^{\mu\nu}$ تانسور فارادی است که از پتانسیل پیمانه‌ای A_μ به صورت $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ ساخته می‌شود و $\mathcal{X}_{\mu\nu}$ نیز جمله حاصل از وردش پتانسیل‌های برهم‌کنشی گراویتون‌ها در گنش (۲) با شکل صریح زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mu\nu} &= -\frac{c_1}{r} (U_i g_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{c_2}{r} (U_e g_{\mu\nu} - r U_e K_{\mu\nu} + r K_{\mu\nu}^r) \\ &\quad - \frac{c_3}{r} (U_r g_{\mu\nu} - r U_r K_{\mu\nu} + e U_r K_{\mu\nu}^r - e K_{\mu\nu}^r) \\ &\quad - \frac{c_4}{r} (U_e g_{\mu\nu} - e U_e K_{\mu\nu} + 1_0 U_e K_{\mu\nu}^r - r_0 U_e K_{\mu\nu}^r + r_0 K_{\mu\nu}^r) \\ &\quad - \frac{c_5}{r} (U_0 g_{\mu\nu} - 1_0 U_0 K_{\mu\nu} + r_0 U_0 K_{\mu\nu}^r - e_0 U_0 K_{\mu\nu}^r + 1_0 U_0 K_{\mu\nu}^0 - 1_0 r_0 K_{\mu\nu}^0), \end{aligned} \quad (6)$$

درباره بروز شیخ در چارچوب گرانش جرم‌دار در حضور الکترودینامیک ناوردای توانی ماکسول نیز می‌توان اظهارنظری کلی کرد. منظور از ناپایداری شبیحی (یا همان شیخ بولور-^۱

۱. Boulware-Deser ghost

۳. سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی

در این بخش، جواب‌های معادلات میدان گرانشی و الکترومغناطیسی، روابط (۴) و (۵) معرفی شده در بخش پیشین، را می‌یابیم. همچنین، از این به بعد از قرارداد کوتاه‌نویسی را می‌یابیم. همچنین، از این به بعد از قرارداد کوتاه‌نویسی عبارت‌های $(d-1)$ ، $(d-2)$ و ... از d_1 و d_2 و ... استفاده می‌کنیم. اکنون متریک فیزیکی $d = n+2$ بُعدی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$ds^2 = -V(r)dt^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 h_{ij} dx_i dx_j \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (7)$$

$$h_{ij} dx_i dx_j = \begin{cases} dx_i^2 + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 x_j dx_j^2 & (k=1) \\ dx_i^2 + \sinh^2 x_1 dx_1^2 + \sinh^2 x_2 \sum_{i=2}^n \prod_{j=2}^{i-1} \sin^2 x_j dx_j^2 & (k=-1) \\ \sum_{i=1}^n dx_i^2 & (k=0), \end{cases}$$

عنصر خطی $h_{ij} dx_i dx_j$ متریک یک ابرسطح (کروی، تخت یا هذلولوی) $n = d-2$ بُعدی با حجم ω_n و خمش d, d, k است. ضریب توپولوژیکی k ، هندسهٔ افق سیاه‌چاله را تعیین می‌کند و می‌تواند مقادیر $k = +1$ (برای سیاه‌چاله‌های کروی)، $k = 0$ (برای سیاه‌چاله‌های با افق تخت) و $k = -1$ (سیاه‌چاله‌های هذلولوی) را اختیار کند. برای متریک مرجع نیز شکل قطری $f_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, c_i^2, h_{ij})$ را برمی‌گزینیم که در آن c_i یک ثابت اختیاری مثبت است [۳۰ و ۳۲]. دیده می‌شود که با این انتخاب، جواب‌های تحلیلی سیاه‌چاله‌ای در چارچوب گرانش جرم‌دار به دست می‌آیند. با جایگذاری متریک مرجع $f_{\mu\nu}$ در رابطه (۳)، پتانسیل‌های \mathcal{U}_i در تمامی ابعاد به صورت

$$\mathcal{U}_i = \left(\frac{c_i}{r}\right)^i \prod_{j=2}^{i+1} d_j, \quad (8)$$

محاسبه می‌شوند.

ابتدا، معادلات حاکم بر میدان الکترومغناطیسی را بررسی می‌کنیم. با انتخاب پتانسیل پیمانه‌ای به صورت $A_\mu = h(r)\delta_\mu^0$ و جایگذاری آن در معادلات میدان تانسوری (۵)، به معادلهٔ دیفرانسیلی زیر دست خواهیم یافت:

$$(rs-1)r \frac{d^2 h(r)}{dr^2} + d_r \frac{dh(r)}{dr} = 0. \quad (9)$$

با فرض $s \neq 1/2$ و حل معادلهٔ دیفرانسیلی فوق، پتانسیل پیمانه‌ای به صورت

$$A_\mu = \left(\frac{rs-1}{d_1-rs}\right) q r^{-\left(\frac{d_1-rs}{rs-1}\right)} \delta_\mu^0, \quad (10)$$

پیدا می‌شود که در آن q ، همان‌طور که جلوتر دیده خواهد شد، پارامتر مرتبط با بار الکتریکی فضا‌زمان است. در این صورت تنها مؤلفه‌های غیر صفر تانسور فارادی به صورت $F^{tr} = -F^{rt} = q r^{-(d_1-rs)/(rs-1)}$ خواهند بود. متناهی بودن میدان پیمانه‌ای A_μ در بی‌نهایت، شرط $1/2 < s < d_1/2$ را روی پارامتر s اعمال می‌کند. همچنین، به ازای $s=1$ به مورد آشنای پتانسیل پیمانه‌ای ایستای یک بار الکتریکی نقطه‌ای در الکترودینامیک ماکسول در ابعاد دلخواه می‌رسیم.

اکنون، با فرض متریک فیزیکی (۷)، و جایگذاری روابط (۸) و (۱۰) در معادلات میدان گرانشی (۴) به معادله دیفرانسیلی زیر برای مؤلفه‌های $r-r$ و $t-t$ معادلات میدان گرانشی می‌رسیم:

$$d_r d_r (k - V(r)) - d_r r \left(\frac{dV(r)}{dr} \right) - r \Lambda r^r + m_g^r \sum_{i=1}^{d_r} \left(c_i^i c_i r^{r-i} \prod_{j=r}^{i+1} d_j \right) - \frac{r^s (rs-1) q^{rs}}{r^{r(sd_r+1)/(rs-1)}} = 0, \quad (11)$$

و با حل آن، به تابع متریک زیر دست می‌یابیم:

$$V(r) = k - \frac{r \Lambda r^r}{d_r d_r} - \frac{m}{r d_r} + m_g^r \sum_{i=1}^{d_r} \left(\frac{c_i^i c_i}{d_r r^{i-r}} \prod_{j=r}^i d_j \right) + \frac{r^s (rs-1) q^{rs}}{d_r (d_1-rs) r^{r(sd_r+1)/(rs-1)}}. \quad (12)$$

در تابع متریک بالا، m یک ثابت انتگرال‌گیری وابسته به جرم متناهی سیاه‌چاله است. همچنین بررسی شد که تابع متریک (۱۲) در سایر مؤلفه‌های معادلات میدان تانسوری (۴) صدق می‌کند. مشهود است که به ازای $m_g = 0$ و $s=1$ به جواب‌های سیاه‌چاله‌ای رایسنر-نوردشتروم در ابعاد دلخواه می‌رسیم. اکنون وجود یک تکینگی اساسی در فضا‌زمان را می‌توان با محاسبهٔ نرده‌ای کریشمان آزمود. نرده‌ای کریشمان برای متریک ایستای (۷) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = \frac{\omega_n r^{s-1}}{r\pi} q^{rs-1}. \quad (15)$$

۴. شیمی سیاه‌چاله‌ای در نقطه بحرانی

۴.۱. تابع پارش گرانشی

برای آغاز بحث شیمی سیاه‌چاله‌ای، تابع پارش مکانیک آماری متناظر با دستگاه‌های سیاه‌چاله‌ای را در آنسامبل کانونی معرفی می‌کنیم. تابع پارش نظریه میدان آماری، که تمام اطلاعات ترمودینامیکی سیستم را در بر دارد، توسط اعمال چرخش ویک روی مولد تابعی نظریه میدان کوانتومی، که یک استمرار تحلیلی از زمان حقیقی t به زمان موهومی τ است ($t \rightarrow i\tau$)، به دست می‌آید [۴۰]. در این صورت متریک فضازمان در نشانگان اقلیدسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2 = V(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 h_{ij} dx_i dx_j \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (16)$$

این متریک در افق رویداد یک تکینگی مخروطی دارد، پس برای رفع این تکینگی و برقرار کردن شرط یکنواختی در نزدیکی افق لازم است که زمان اقلیدسی تناوب داشته باشد. از این رو، شناسایی $\tau \sim \tau + \beta$ به عنوان یک شرط لازم به دست می‌آید که در آن پارامتر β با عکس دمای هاوکینگ سیاه‌چاله رابطه زیر را دارد:

$$\beta^{-1} = T = \frac{1}{r\pi} \frac{dV(r)}{dr} \Big|_{r=r_+} = \frac{1}{r\pi d_r r_+} \left[d_r d_r k - r \Lambda r_+^r + m_g^r \sum_{i=1}^{d_r} \left(\frac{c_i c_i}{r_+^{i-r}} \prod_{j=r}^{i+1} d_j \right) \right] \quad (17)$$

$$- r^s (rs-1) q^{rs} r_+^{\frac{r+rd_r s}{rs-1}}.$$

لازم به ذکر است رابطه فوق به سادگی از طریق محاسبه گرانش سطحی و ارتباط آن با دمای هاوکینگ [۴۱] نیز تأیید می‌شود. اکنون، با الهام از فرمول‌بندی انتگرال مسیر نظریه میدان کوانتومی، فرض می‌کنیم که تابع پارش گرانشی دستگاه سیاه‌چاله‌ای نیز توسط انتگرال مسیر اقلیدسی روی متریک فیزیکی فضازمان و میدان‌های مادی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۴۲]:

$$Z = \text{Tr} [e^{-\beta H}] = \int_{PBC} D[g, A] e^{-\mathcal{I}_E[g, A]/\hbar}, \quad (18)$$

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} \right)^2 + r d_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right)^2 + r d_r d_r \left(\frac{V(r) - k}{r^2} \right)^2, \quad (13)$$

با جایگذاری تابع متریک به دست آمده در رابطه (۱۳) بررسی رفتار حدی نرده‌ای کرشمان در نزدیکی مبدأ ($r \rightarrow 0^+$) در می‌یابیم که $R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \propto r^{-rd_r}$ و بنابراین فضازمان به دست آمده یک تکینگی اساسی در مبدأ دارد. همچنین، تابع متریک (۱۲) می‌تواند یک یا چند ریشه (در این وضعیت، تکینگی اساسی فضازمان توسط یک افق رویداد پوشانده می‌شود) و یا حتی بدون ریشه (وضعیت تکینگی عربان) داشته باشد. در محاسبات ما، افق رویداد که با r_+ نمایش داده می‌شود همیشه بزرگ‌ترین ریشه حقیقی تابع متریک فرض می‌شود که در رابطه $V(r_+) = 0$ صدق می‌کند.

در ادامه، با استفاده از رابطه (۱۰)، پتانسیل الکتریکی افق رویداد سیاه‌چاله نسبت به مرجعی در بی‌نهایت فضایی به صورت:

$$\Phi = A_{\mu} \chi^{\mu} \Big|_{r \rightarrow r_+} - A_{\mu} \chi^{\mu} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \left(\frac{rs-1}{d_1 - rs} \right) q r_+^{\frac{d_1 - rs}{rs-1}}, \quad (14)$$

محاسبه می‌شود که در آن $\chi^{\mu} = (1, 0, 0, \dots)$ بردار کیلینگ زمان‌گونه برای فضازمان سیاه‌چاله‌ای ایستا است. همچنین، به دلیل آزادی پیمانه‌ای در نظریه‌های الکترومغناطیسی، اختلاف پتانسیل یک کمیت فیزیکی است و نه پتانسیل، از این رو به تعریفی از اختلاف پتانسیل نیاز داریم. تعریف فوق به سادگی این خواسته را تأمین می‌کند و همان‌طور که دیده می‌شود می‌توان مرجع را در هر جایی از فضازمان خارج از افق رویداد انتخاب کرد و اختلاف پتانسیل را نسبت به آن مرجع محاسبه کرد. در الکترومغناطیس مرسوم است که پتانسیل الکتریکی در بی‌نهایت، یعنی $r \rightarrow \infty$ ، به عنوان مرجع یا نقطه صفر پتانسیل در نظر گرفته شود. با این انتخاب، اختلاف پتانسیل Φ که نسبت به مرز فضای پاددوسیته اندازه‌گیری می‌شود، مطابق با رابطه (۱۴)، برای سیاه‌چاله به دست می‌آید. بار الکتریکی فضازمان نیز از طریق قانون گوس و محاسبه شار میدان الکتریکی در بی‌نهایت به صورت زیر به دست می‌آید

کُنش اقلیدسی متناهی $\bar{\mathcal{I}}_E$ (با جایگذاری جواب‌های کلاسیکی) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[g, A] e^{-\mathcal{I}_E[g, A]} \simeq e^{-\bar{\mathcal{I}}_E} = e^{-\beta F}. \quad (21)$$

در قسمت آخر رابطه فوق، از این نکته استفاده شده است که انرژی آزاد F و تابع پارش گرمایی یک سیستم ترمودینامیکی از طریق $F = -\beta^{-1} \ln \mathcal{Z}$ با یکدیگر رابطه دارند. در ضمن، انرژی آزاد سیستم بسته به متغیرهای ترمودینامیکی می‌تواند به عنوان انرژی آزاد هلمهولتز یا گیبس و یا سایر پتانسیل‌های ترمودینامیکی مجاز دیگر تفسیر شود.

به منظور محاسبه کُنش اقلیدسی متناهی، روش‌های متفاوتی از جمله روش کانترترم [۴۴]، نسخه هاوکینگ-ویتن (موسوم به روش تفریقی) [۴۵ و ۴۶] و ... وجود دارند. در روش کانترترم و روش‌های مشابه با آن مانند صورتمندی یورک-براون [۴۷]، علاوه بر کُنش حجمی و جمله سطحی، به انتگرال سطحی دیگری موسوم به کانترترم برای متناهی‌سازی واگرایی‌ها نیاز داریم. در این روش‌ها مشکل اساسی این است که با افزایش ابعاد فضازمان، تعداد کانترترم‌های مورد نیاز نیز افزایش می‌یابد و بنابراین برای یافتن کُنش اقلیدسی در هر بُعد باید محاسبات را دوباره انجام دهیم. اما در روش تفریقی برای فضازمان‌های مجاناً پاددوسسته، نه نیازی به جملات کانترترم هست و نه نیازی به جملات سطحی گرانشی مانند کُنش گیبونز-هاوکینگ (برای کُنش گیبونز-هاوکینگ با محاسبه مستقیم به ازای هر تابع متریک دیده می‌شود سهم این جمله صفر است [۴۵، ۴۶ و ۴۸]، زیرا یکبار برای فضازمان سیاه‌چاله‌ای ظاهر می‌شود و یکبار هم برای زمینه گرمایی پاددوسسته و سپس از هم تفریق می‌شوند. البته به جملات سطحی میدان مادی که به تانسور انرژی-تکانه مربوط می‌شوند نیاز خواهیم داشت؛ زیرا این جملات شرایط مرزی میدان‌های مادی سیاه‌چاله را تعیین می‌کنند و باید یکبار برای همیشه تعیین شوند که منجر به تعریف آنسامبل مشخصی می‌شوند. در واقع، کم شدن کُنش اقلیدسی زمینه گرمایی از کُنش اقلیدسی زمینه سیاه‌چاله‌ای مشابه یک کانترترم عمل می‌کند و واگرایی‌ها را

که در آن PBC، برای تأکید، اشاره به شرط مرزی تناوبی به صورت $\tau \sim \tau + \beta \hbar$ دارد، \bar{H} هامیلتونی متناظر با دستگاه و \mathcal{I}_E نیز کُنش در نشانگان اقلیدسی (۱۶) است (از این به بعد قرار می‌دهیم $\hbar = 1$). محاسبه انتگرال مسیر فوق به دلیل وجود تصحیحات مراتب بالا (همان تصحیحات حلقه‌ای) و واگرا شدن آنها عملاً غیر ممکن است [۴۳]؛ زیرا هنوز راهی برای بازبهنجارش نظریه‌های نسبیت عام و همچنین گرانش جرم‌دار پیدا نشده است. هاوکینگ و گیبونز نشان دادند می‌توان در رژیم شبه کلاسیکی (همان تقریب بدون تصحیحات حلقه‌ای) تابع پارش فوق را محاسبه کرد [۴۲]. برای این منظور از این نکته استفاده می‌شود که برای هر نظریه میدانی، بیشترین سهم را در انتگرال مسیر، جمله‌ای دارد که کُنش نظریه را اکسترمم می‌کند. این جمله با جایگذاری جواب‌های کلاسیکی معادلات میدان در کُنش اقلیدسی انتگرال مسیر به دست می‌آید. این جواب‌های کلاسیکی به عنوان میدان‌های پس‌زمینه، یعنی g_0 و A_0 ارجاع داده می‌شوند. با پیروی از گیبونز و هاوکینگ [۴۲]، متریک‌های g و میدان‌های مادی A را در نزدیکی میدان‌های پس‌زمینه به صورت $g = g_0 + \bar{g}$ و $A = A_0 + \bar{A}$ در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض شده است تمام متریک‌های g رفتار مجانبی پاددوسسته دارند و تمام میدان‌های پیمانه‌ای A نیز در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند. با بسط تیلور کُنش حول میدان‌های پس‌زمینه خواهیم داشت:

$$\mathcal{I}_E[g, A] = \bar{\mathcal{I}}_E[g_0, A_0] + \mathcal{I}_{E,2}[\bar{g}, \bar{A}] + \dots \quad (19)$$

که در آن $\bar{\mathcal{I}}_E[g_0, A_0]$ همان کُنش روی پوسته (کُنش اقلیدسی متناهی به ازای جایگذاری جواب‌های کلاسیکی نظریه) است. در نتیجه، برای تابع پارش گرمایی در زبان انتگرال مسیر اقلیدسی خواهیم داشت:

$$\mathcal{Z} = e^{-\bar{\mathcal{I}}_E[g_0, A_0]} \times \int_{PBC} \mathcal{D}[\bar{g}, \bar{A}] e^{-\mathcal{I}_{E,2}[\bar{g}, \bar{A}] + \dots} \quad (20)$$

این عبارت فقط در تقریب شبه کلاسیکی (تقریب بدون حلقه) به صورت $\mathcal{I}_{E,2}[\bar{g}, \bar{A}] + \dots = 0$ ، با رفع مناسب واگرایی‌ها در کُنش اقلیدسی روی پوسته، قابل محاسبه است. بنابراین، با در نظر گرفتن تقریب شبه کلاسیکی، تابع پارش گرانشی بر حسب

رفتار مجانباً پاددوسیه فضازمان است. با انجام عملیات مشابه برای فضازمان پاددوسیه در چارچوب گرانش جرم‌دار (بدون هیچ ماده و میدانی، یعنی $m=q=0$) خواهیم داشت:

$$\mathcal{I}_{AdS} = \frac{\beta_s \omega_n}{16\pi} \left[\frac{r}{\ell^r} R^{d_1} - m_g^r \sum_{i=1}^{d_1} \frac{(i-r)c_i^i c_i}{d_1-i} R^{d_1-i} \prod_{j=r}^{i+1} d_j \right], \quad (24)$$

که در آن β_s دورهٔ مربوط به فضای پاددوسیه با تابع متریک $V(r)$ در نشانگان اقلیدسی است. اکنون، با این تقاضا که دمای هاوکینگ در بی‌نهایت برای هر دو فضازمان سیاه‌چاله‌ای و همچنین پاددوسیه یکسان باشد، یعنی $\beta_s V(r)^{1/r} = \beta V(r)^{1/r}$ ، پاددوسیه از گنش فضازمان سیاه‌چاله‌ای و اعمال حد $R \rightarrow \infty$ برای گنش اقلیدسی متناهی خواهیم داشت:

$$\bar{\mathcal{I}}_E = \frac{\omega_n \beta r_+^{d_1}}{16\pi} \left[k - \frac{r_+^r}{\ell^r} + m_g^r \sum_{i=1}^{d_1} \left(\frac{(i-1)c_i^i c_i}{r_+^{i-r}} \prod_{j=r}^i d_j \right) + \frac{r^s (rs-1)^r (rsd_r-1) q^{rs}}{d_r (d_1-rs) r_+^{r(sd_r+1)/(rs-1)}} \right]. \quad (25)$$

لازم به ذکر است که بی‌تأثیر بودن گنش سطحی گیونز-هاوکینگ به سادگی با محاسبه آن برای دو پس‌زمینهٔ سیاه‌چاله‌ای و پاددوسیهٔ گرمایی و سپس استفاده از شرط $\beta_s V(r)^{1/r} = \beta V(r)^{1/r}$ دیده می‌شود. همچنین، گنش متناهی به دست آمده، در حد $m_g=0$ و $s=1$ ، به گنش اقلیدسی متناهی گرانش اینشتین-ماکسول، و در حد $m_g=0$ ، به گنش اقلیدسی متناهی گرانش اینشتین در حضور میدان ناورادی توانی ماکسول در ابعاد دلخواه تبدیل می‌شود. در حد $q=0$ نیز، گنش اقلیدسی نظریهٔ گرانش جرم‌دار برای سیاه‌چاله‌های ختنی با احتساب تمامی جملات برهم‌کنشی گراویتون‌ها به دست می‌آید.

۲.۴. ترمودینامیک در فضای فاز توسعه یافته

اکنون با استفاده از تابع پارش گرانشی به دست آمده در روابط (۲۱) و (۲۵)، کمیت‌های ترمودینامیکی به طور سراسر محاسبه می‌شوند. با در نظر گرفتن فضای فاز توسعه یافته، یعنی اعمال فرض $\Lambda = -8\pi P$ در تابع پارش گرانشی، انرژی آزاد

حذف می‌کند. در این روش، با انجام محاسبات طولانی، می‌توان شکل d -بُعدی گنش را یکبار برای همیشه به دست آورد که مهم‌ترین کمیت در شیمی سیاه‌چاله‌ها به شمار می‌رود؛ زیرا تمام اطلاعات ترمودینامیکی سیستم در آن ذخیره شده است.

در ادامه، برای محاسبهٔ گنش اقلیدسی از روش تفریقی استفاده می‌کنیم. مطابق با توضیحات فوق، گنش اقلیدسی فضازمان سیاه‌چاله‌ای با شرط مرزی آنسامبل کانونی از جمع گنش حجمی (۲) به علاوهٔ گنش سطحی مربوط به میدان الکترومغناطیسی (\mathcal{I}_{DEM})، یعنی $\mathcal{I}_{BH} = \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_{DEM}$ ، و سپس با جایگذاری جواب‌های کلاسیکی به دست آمده در آنها حاصل می‌شود. طبق شرایط آنسامبل کانونی، فرض می‌کنیم بار الکتریکی سیاه‌چاله در بی‌نهایت ثابت است. برای این منظور گنش مرزی مربوط به میدان‌های الکترومغناطیسی غیرخطی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{I}_{DEM} = \frac{-s}{r\pi G_d} \int_{\partial\mathcal{M}} d^{d_1}x \sqrt{-h} (-\mathcal{F})^{s-1} n_\mu F^{\mu\nu} A_\nu \\ = \frac{\beta \omega_n}{16\pi G_d} \left(\frac{r^{s+1} (rs-1)s}{d_1-rs} \right) q^{rs} r_+^{-\left(\frac{d_1-rs}{rs-1}\right)}. \quad (22)$$

عبارت فوق، جملهٔ سطحی‌ای را که در اثر وردش گنش حجمی (۲) نسبت به میدان پیمانهای A_μ به وجود می‌آید از بین می‌برد و در نتیجه باعث خوش‌تعریف شدن اصل وردشی برای معادلات میدان الکترومغناطیسی می‌شود. اکنون کافی است که گنش اقلیدسی مربوط به سیاه‌چاله را با محاسبهٔ مستقیم $\mathcal{I}_{BH} = \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_{DEM}$ به ازای جواب‌های سیاه‌چاله‌ای یافته شده، یعنی روابط (۷) و (۱۲)، بیابیم. بعد از انجام محاسبات طولانی، این گنش به صورت زیر به دست می‌آید (برای جزئیات بیشتر در محاسبات مربوط به قسمت گرانشی مرجع [۴۸] را ببینید)

$$\mathcal{I}_{BH} = \frac{\beta \omega_n}{16\pi} \left[\frac{r}{\ell^r} R^{d_1} - m_g^r \sum_{i=1}^{d_1} \frac{(i-r)c_i^i c_i}{d_1-i} R^{d_1-i} \prod_{j=r}^{i+1} d_j + \frac{r^{s+1} (rs-1) (d_{rs}+1) q^{rs}}{d_r (d_1-rs) r^{(d_1-rs)/(rs-1)}} \right]_{r_+}^R, \quad (23)$$

که در آن R یک حد بالا برای رفع موقتی واگرایی و در نتیجه عادی‌سازی انتگرال‌گیری است. در واقع این واگرایی ناشی از

$dM = TdS + VdP + \Phi dQ$ برقرار است که توسط تبدیل لژاندر $G = M - TS$ نیز تأیید می‌شود.

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که کمیت‌های ترمودینامیکی به دست آمده در رابطهٔ اسمار زیر صدق می‌کنند:

$$d_r M = d_r T S - r P V + \sum_{i=1}^{d_r} (i-r) C_i c_i + \frac{(d_r s + 1)}{s(r_s - 1)} \Phi Q, \quad (30)$$

که در آن کمیت C_i به صورت زیر است:

$$C_i = \left(\frac{\partial M}{\partial c_i} \right)_{S, P, Q, c_j \neq i} = \frac{\omega_n}{16\pi} m_g^r c_s^i r_+^{d_i+1} \prod_{j=r}^i d_j. \quad (31)$$

رابطهٔ اسمار (۳۰) به همراه رابطهٔ (۳۱) پیشنهاد می‌کند که ثابت‌های جفت‌شدگی نظریهٔ گرانش جرم‌دار نیز به عنوان متغیر ترمودینامیکی در نظر گرفته شوند. در این صورت، ضرایب جفت‌شدگی c_i به عنوان کمیت ترمودینامیکی فزونور و C_i به عنوان پتانسیل ترمودینامیکی نافزونور متناظر تعبیر می‌شوند و در نتیجه قانون اول ترمودینامیک به صورت $dM = TdS + VdP + \Phi dQ + \sum_{i=1}^{d_r} C_i dc_i$ تعمیم می‌یابد که در

سازگاری با رابطه اسمار است. همان‌طور که دیده می‌شود در رابطهٔ (۳۰)، برای ثابت جفت‌شدگی c_r جمله‌ای در رابطه اسمار (به ازای $i=2$) وجود ندارد. در واقع، این به دلیل صفر بودن وزن مقیاسی ضریب c_r است که البته از بحث مقیاسی معرفی شده در مرجع [۱] نیز تأیید می‌شود. در نتیجه، ثابت جفت‌شدگی c_r در قانون اول ترمودینامیک سهمی ندارد (پس $dc_r = 0$)؛ زیرا مطابق با رابطهٔ اسمار برای آن نمی‌توان یک پتانسیل همیوگ (C_r) غیرصفر تعریف کرد.

۳.۴. بحرانیت P - V در فضای فاز توسعه یافته

برای بررسی رفتار بحرانی سیاه‌چاله‌ها، ابتدا معادلهٔ حالت را با استفاده از معادلهٔ (۱۷) و جانشانی $\Lambda = -8\pi P$ در آن به صورت زیر می‌یابیم:

$$P = \frac{d_r T}{r r_+} - \frac{d_r d_r k}{16\pi r_+^r} - \frac{m_g^r}{16\pi} \sum_{i=1}^{d-r} \left(\frac{c_i c_i}{r_+^i} \prod_{j=r}^{i+1} d_j \right) + \frac{r^s (r_s - 1) q^{r_s}}{16\pi r_+^{r_s d_r / (r_s - 1)}}. \quad (32)$$

سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی به دلیل وابستگی به کمیت‌های Q ، T و P به عنوان انرژی آزاد گیبس (G) در آنسامبل کانونی تفسیر می‌شود. بنابراین، انرژی آزاد گیبس با استفاده از رابطهٔ (۲۱) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$G = -\beta^{-1} \ln Z(T, P, Q) = \frac{\omega_n r_+^{d_r}}{16\pi} \left[k - \frac{16\pi P r_+^r}{d_r d_r} + m_g^r \sum_{i=1}^{d_r} \left(\frac{(i-1) c_i c_i}{r_+^{i-r}} \prod_{j=r}^i d_j \right) + \frac{r^s (r_s - 1)^r (r_s d_r - 1) q^{r_s}}{d_r (d_r - r_s) r_+^{r(s d_r + 1) / (r_s - 1)}} \right]. \quad (26)$$

در ادامه جرم ADM (با تفسیر آنتالپی در فضای فاز توسعه یافته) سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(S, P, Q) = \frac{d_r \omega_n r_+^{d_r}}{16\pi} \left[k + \frac{16\pi P r_+^r}{d_r d_r} + m_g^r \sum_{i=1}^{d_r} \left(\frac{c_i c_i}{d_r r_+^{i-r}} \prod_{j=r}^i d_j \right) + \frac{r^s (r_s - 1)^r q^{r_s}}{d_r (d_r - r_s) r_+^{r(s d_r + 1) / (r_s - 1)}} \right]. \quad (27)$$

آنتروپی نیز، به عنوان کمیت فزونور متناظر با دما، توسط روابط معمول ترمودینامیکی یا مکانیک سیاه‌چاله‌ها به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P, Q} = \frac{\omega_n}{r} r_+^{d_r}, \quad (28)$$

که در توافق با قانون مساحت ($S = A / 4$) است. حجم ترمودینامیکی نیز، بنا به تعریف فضای فاز توسعه یافته، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S, Q} = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T, Q} = \frac{\omega_n}{d_r} r_+^{d_r}. \quad (29)$$

اکنون می‌توان بررسی کرد پتانسیل الکتریکی و دما به ترتیب از طریق روابط ترمودینامیکی $\Phi = -(\partial G / \partial Q)_{P, T}$ و $T = (\partial M / \partial S)_{P, Q}$ در توافق با روابط (۱۴) و (۱۷) به دست می‌آیند. در نتیجه، با توجه به روابط فوق، قانون اول ترمودینامیک در نمایش انرژی آزاد گیبس به صورت $dG = -SdT + VdP + \Phi dQ$ برقرار است. لازم به ذکر است که در نمایش آنتالپی نیز قانون اول به صورت

به دست آورد. مهم‌ترین نتیجه‌ای که از رابطه (۳۵) گرفته می‌شود این است که به علت وجود جمله متناظر با گرانش جرم‌دار، سیاه‌چاله‌های پاددوسیه با هندسه‌های تخت ($k=0$) یا هذلولوی ($k=-1$) در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی غیر خطی نیز می‌توانند گذار فاز و رفتار بحرانی متناظر را، به ازای تمامی مقادیر مجاز برای پارامترهای q و s ، تجربه کنند. پارامتر s نیز تصحیحی، علاوه بر جرم گراویتون‌ها، در شعاع بحرانی و در نتیجه دما و فشار بحرانی ایجاد می‌کند. در حد گرانش اینشتین، یعنی جانشانی مقادیر $m_g=0$ و $s=1$ ، به رابطه $r_c = \sqrt{6}q / \sqrt{k}$ برای شعاع بحرانی افق رویداد دست می‌یابیم که فقط برای مورد آشنای $k=+1$ به ازای تمامی مقادیر q جواب قابل قبول دارد.

اکنون با انتخاب پارامترهای سیاه‌چاله به صورت $m_g = c_s = c_r = c_t = q = 1$ ، یک گذار فاز مرتبه اول واندروالسی را مطابق شکل‌های ۱، ۲ و ۳ ایجاد می‌کنیم. در این صورت نقطه بحرانی با مشخصات $r_c = 1/25197$ ، $T_c = 0/194502$ و $P_c = 0/020919$ به دست می‌آید. همان‌طور که در نمودارهای همدمای $P-r_+$ (شکل ۱) مشهود است در $T < T_c$ یک فرورفتگی وجود دارد که نشان دهنده یک تراکم منفی غیر فیزیکی است و در نهایت سیستم تحت تأثیر یک گذار فاز مرتبه اول، که از نمودار $G-T$ (شکل ۳) استنباط می‌شود، به مخلوطی از فازهای متفاوت می‌رود. همچنین، بر اساس رابطه ساخت ماکسول، بخش نوسانی مربوط به همدمای $T < T_c$ توسط یک خط هم‌فشار جایگزین می‌شود. در شکل ۲ نیز منحنی‌های هم‌فشار در صفحه $T-r_+$ نمایش داده شده‌اند که نشان می‌دهد رفتار نوسانی هم‌فشارها در محدوده زیر فشار بحرانی (یعنی $P < P_c$) رخ می‌دهد. از نمودار $G-T$ رفتار دم-چلچله‌ای معروف دیده می‌شود که دلالت بر یک گذار فاز مرتبه اول واندروالسی دارد. در ضمن، از آنجا که رفتار بحرانی در $T > T_c$ دیده نمی‌شود، بنابراین خط هم‌زیستی در نمودار فشار-دما به نقطه بحرانی (T_c, P_c) منتهی می‌شود.

اکنون با تحلیل عددی اثر پارامتر غیرخطی s را روی داده‌های بحرانی بررسی می‌کنیم. مطابق با جدول ۱، با تنظیم

همان‌طور که خواهیم دید این معادله حالت می‌تواند رفتارهای بحرانی متنوعی را بپذیرد. به منظور مشاهده این رفتارها، باید نقاط بحرانی معادله فوق را پیدا کنیم. مطابق با دستورالعمل مکانیک آماری، نقاط بحرانی همان نقاط عطف منحنی‌های هم‌دما در نمودارهای فشار-حجم ($P-v$) هستند که از شرط‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial r_+}\right)_T = 0, \quad (33)$$

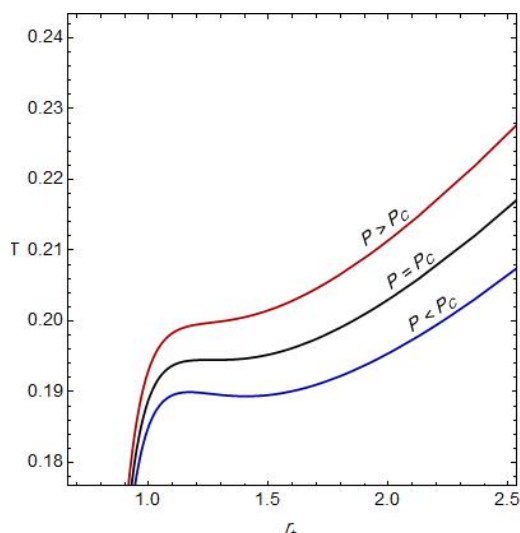
$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_T = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r_+^2}\right)_T = 0.$$

در رابطه بالا، v حجم ویژه ترمودینامیکی است و با افق رویداد رابطه $v = 4r_+^2 \ell_p^3 / d_r$ را دارد (ℓ_p طول پلانک است). از این رو، به دلیل وابستگی خطی کمیت‌های v و r_+ به یکدیگر، در ادامه این مقاله تحلیل‌ها را در صفحه $P-r_+$ انجام می‌دهیم؛ زیرا بحرانیت در صفحه $P-v$ ، بحرانیت در صفحه $P-r_+$ را ایجاد می‌کند و بالعکس. با استفاده از روابط (۳۲) و (۳۳) معادله حاکم بر نقاط بحرانی به صورت زیر به دست می‌آید:

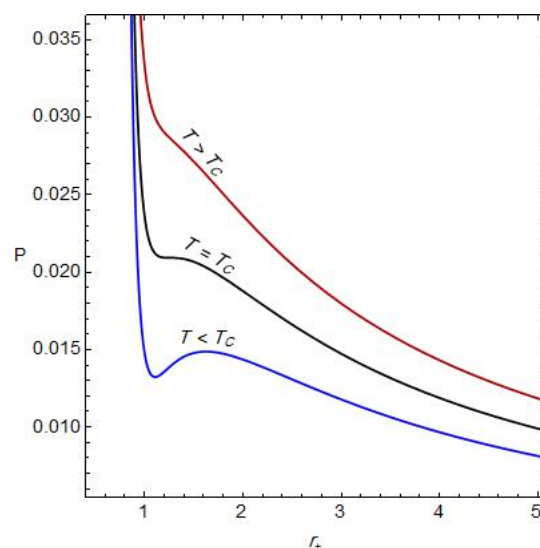
$$d_r (k + m_g^2 c_s^2 c_r) r_+^{d_r} - \frac{r_s^s s (r_s d_r + 1) q^{r_s}}{(r_s - 1) r_+^{d_r / (r_s - 1)}} + m_g^2 \sum_{i=3}^{d_r} \left(i(i-1) c_s^i c_r^i r_+^{d_r - i} \prod_{j=3}^{i+1} d_j \right) = 0, \quad (34)$$

حل دقیق رابطه فوق به دلیل پیچیدگی معادله حالت سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی میسر نیست و بنابراین با روش‌های عددی باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم. به منظور مطالعه بحرانیت در مقاله پیش رو، برای پتانسیل‌های برهم‌کنشی گراویتون‌ها (U_i)، تا تقریب مرتبه چهارم گرانش جرم‌دار ($i=1, 2, 3, 4$) در نظر گرفته می‌شود. ابتدا رفتار بحرانی واندروالسی را بررسی می‌کنیم که مطابق با تحلیل‌های صورت گرفته در فضازمان‌های با ابعاد $d \geq 4$ رخ می‌دهند. فقط در $d=4$ بعد می‌توان شکل تحلیلی نقطه (شعاع) بحرانی را به صورت:

$$r_c = \left(\frac{r_s^{s/2} \sqrt{s(rs+1)} q^s}{\sqrt{(k + m_g^2 c_s^2 c_r)(rs-1)}} \right)^{rs-1}, \quad (35)$$



شکل ۲. نمودار $T-r_+$ متناظر با گذار فاز واندروالسی برای سیاهچاله‌ای با افق تخت ($k=0$) در ۴- بُعد. پارامترها به صورت $m_g = c_s = c_r = c_t = q = 1$ و $s = 3/5$ تنظیم شده‌اند.

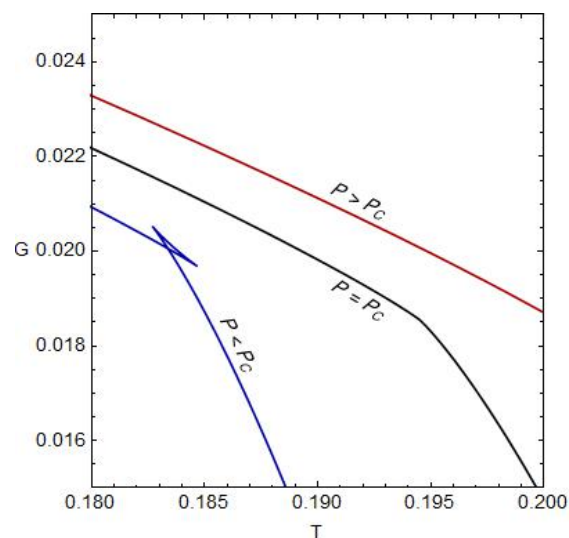


شکل ۱. نمودار $P-r_+$ متناظر با گذار فاز واندروالسی برای سیاهچاله‌ای با افق تخت ($k=0$) در ۴- بُعد. پارامترها به صورت $m_g = c_s = c_r = c_t = q = 1$ و $s = 3/5$ تنظیم شده‌اند.

جدول ۱. گذار فاز واندروالسی در ۴- بُعد. پارامترهای سیاهچاله‌ای به صورت $m_g = c_s = c_r = c_t = 1, q = 0/1$ تنظیم شده‌اند.

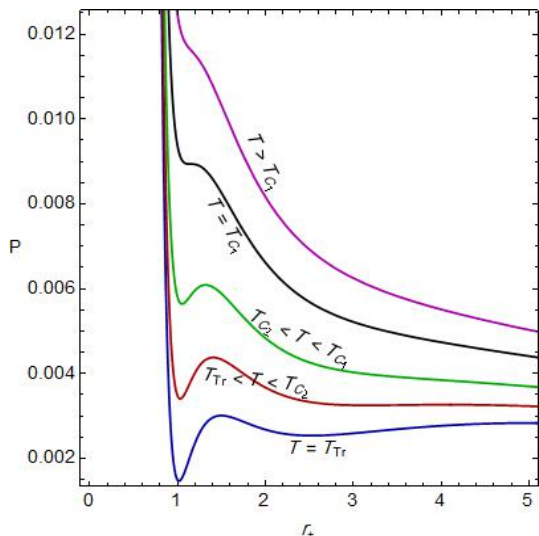
s	P_c	r_c	T_c	$P_c r_c / T_c$
۰/۶	۰/۰۳۱۹	۱/۰۹۲۳	۰/۲۲۱۸	۰/۱۵۷۱
۰/۷	۰/۰۲۹۳	۰/۱۴۲۱	۰/۲۱۵۷	۰/۱۵۵۱
۰/۸	۰/۰۲۷۲	۱/۱۸۹۲	۰/۲۱۰۸	۰/۱۵۳۷
۰/۹	۰/۰۲۵۳	۰/۲۳۸۹	۰/۲۰۶۰	۰/۱۵۲۱
۱	۰/۰۲۳۴	۱/۲۹۲۷	۰/۲۰۱۲	۰/۱۵۰۲
۱/۱	۰/۰۲۱۵	۱/۳۵۱۱	۰/۱۹۶۳	۰/۱۴۸۰
۱/۲	۰/۰۱۹۷	۱/۴۱۴۲	۰/۱۹۱۴	۰/۱۴۵۶
۱/۳	۰/۰۱۸۰	۱/۴۸۱۸	۰/۱۸۶۵	۰/۱۴۳۰
۱/۴	۰/۰۱۶۴	۱/۵۵۴۰	۰/۱۸۱۶	۰/۱۴۰۳

چراچوب شیمی سیاهچاله‌ای امکان وجود رفتارهای بحرانی پیچیده‌تر مانند گذار فاز بازگشتی و گذار فاز در نقطه بحرانی سه‌گانه را بررسی می‌کنیم. مشخصه بارز گذار فاز بازگشتی در $P_c r_c / T_c$ توابعی نزولی بر حسب پارامتر s هستند. اکنون در

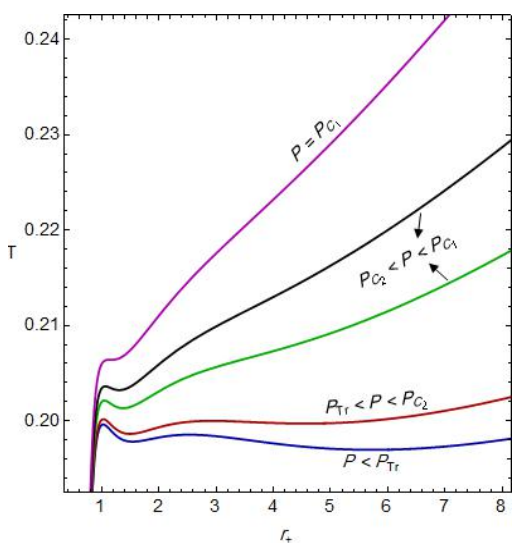


شکل ۳. نمودار متناظر با گذار فاز واندروالسی برای سیاهچاله‌ای با افق تخت ($k=0$) در ۴- بُعد. پارامترها به صورت $m_g = c_s = c_r = c_t = q = 1$ و $s = 3/5$ تنظیم شده‌اند.

پارامترهای نظریه در ۴- بُعد از فضا-زمان، بحرانیّت را می‌توان برای تمام مقادیر مجاز پارامتر غیرخطی s (در اینجا $0/5 < s < 1/5$) مشاهده کرد. همان‌طور که از جدول ۱ استنباط می‌شود شعاع بحرانی (r_c) یک تابع افزایشی بر حسب پارامتر s است در حالی که کمیت‌های P_c ، T_c و نسبت



شکل ۴. نمودار $p-r_+$ متناظر با نقطه سه‌گانه و گذار فاز سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ برای سیاه‌چاله‌ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g=c_0=1$ ، $c_1=2$ ، $c_2=0/1$ ، $c_3=-0/1$ ، $c_4=0/6$ ، $c_5=0/1$ و $q=1/5$ تنظیم شده‌اند.



شکل ۵. نمودار $T-r_+$ متناظر با نقطه سه‌گانه و گذار فاز سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ برای سیاه‌چاله‌ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g=c_0=1$ ، $c_1=2$ ، $c_2=0/1$ ، $c_3=-0/1$ ، $c_4=0/6$ ، $c_5=0/1$ و $q=1/5$ تنظیم شده‌اند.

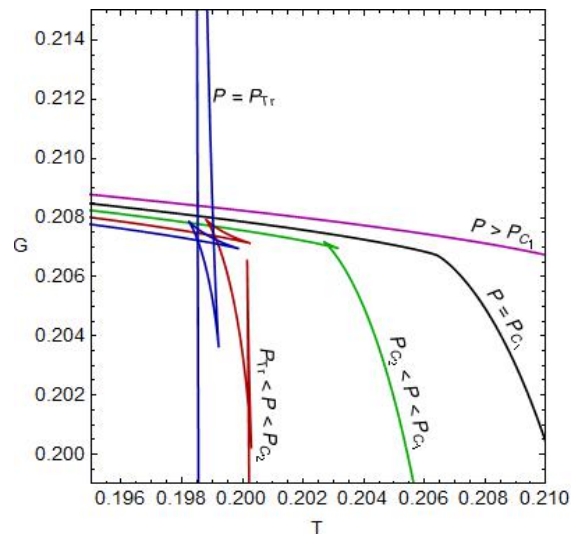
مرسوم رخ می‌دهد. به محض این که فشار سیستم کمی کمتر از فشار مربوط به نقطه بحرانی دوم می‌شود، یعنی $P \approx P_{C_2}$ ، دو گذار فاز واندروالسی (دو رفتار دم چلچله‌ای پی‌درپی) مشاهده می‌شود. این دو گذار فاز از نوع مرتبه اول هستند و بنابراین

سیاه‌چاله‌ها، یک گذار فاز مرتبه اول واندروالسی است که با یک گذار فاز مرتبه صفر همراهی می‌شود [۷]. همان‌طور که در مرجع [۲۵] تأکید شده است، شرط لازم برای رخ دادن این نوع از رفتار بحرانی این است که معادله حاکم بر نقاط بحرانی (۳۴) دو نقطه بحرانی فیزیکی (در اینجا یعنی دو شعاع بحرانی با دما و فشار متناظر مثبت) را بپذیرد. توسط تحلیل‌های عددی در ابعاد $d=5$ و $d=6$ ، وجود دو نقطه بحرانی با شرایط فیزیکی ($P \geq 0$ و $T \geq 0$)، در هیچ ناحیه‌ای از فضای فاز ترمودینامیکی یافت نشد. همچنین، در ابعاد بالاتر ($d \geq 7$)، که فضای فاز ساختار پیچیده‌تری دارد، این وضعیت بررسی شد و مدرکی دال بر وجود گذار فاز بازگشتی پیدا نشد. این مورد عجیب به نظر می‌رسد زیرا، همان‌طور که جلوتر خواهیم دید، وجود سه نقطه بحرانی با شرایط فیزیکی تأیید می‌شود. در حالت خاص $s=1$ ، به طور تحلیلی می‌توان نشان داد که سیاه‌چاله‌های باردار نظریه گرانش جرم‌دار، در ابعاد $d=5$ و $d=6$ ، نمی‌توانند رفتار بازگشتی را برای گذار فاز تجربه کنند. از این رو، ما حدس می‌زنیم که گذار فاز بازگشتی در آنسامبل کانونی سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی گرانش جرم‌دار-ناوردای توانی ماکسول وجود نداشته باشد.

در این مرحله، وجود نقطه بحرانی سه‌گانه و گذار فاز سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ متناظر را بررسی می‌کنیم. با تنظیم مناسب ضرایب جفت‌شدگی در ابعاد $d \geq 6$ ، معادله حالت (۳۲) می‌تواند سه نقطه بحرانی با فشار و دماهای مثبت را بپذیرد که شرط لازم و نه کافی برای داشتن رفتار بحرانی متناظر با نقطه سه‌گانه است [۲۵]. فشار متناظر با این نقاط بحرانی را از بزرگ‌ترین تا کوچک‌ترین به ترتیب با P_{C_1} ، P_{C_2} و P_{C_3} نشان می‌دهیم. برای مثال مذکور، داده‌های بحرانی به صورت $T_{C_1}=0/206401$ ، $P_{C_1}=0/001939$ ، $T_{C_2}=0/200128$ ، $P_{C_2}=0/003347$ و $T_{Tr}=0/191521$ ، $P_{Tr}=0/002102$ به دست آمده‌اند و نمودارهای $T-r_+$ و $G-T$ مربوطه نیز به ترتیب در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود در محدوده فشار $P_{C_2} < P < P_{C_1}$ ، یک گذار فاز مرتبه اول سیاه‌چاله‌ای بزرگ/کوچک با رفتار واندروالسی

می‌دهد و مورد بحث مرجع [۴۹] بوده است. این رفتار زمانی رخ می‌دهد که معادله حاکم بر نقاط بحرانی (۳۴) سه شعاع بحرانی با دما و فشارهای متناظر مثبت را پیش‌بینی کند، اما در تفاوت با وضعیت نقطه سه‌گانه، فقط در یکی از نقاط بحرانی، انرژی آزاد گیبس کمینه شود. بنابراین فقط یک نقطه بحرانی فیزیکی باقی خواهد ماند. در نتیجه انتظار داریم رفتاری شبیه گذار فاز واندروالسی با اندکی تفاوت در شکل دم‌چلچله‌ای استاندارد را مشاهده کنیم. این وضعیت در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ به تصویر کشیده شده است. در این مثال، تمام پارامترهای سیاه‌چاله‌ای مانند مورد پیشین در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ تنظیم شده‌اند؛ با این تفاوت که پارامتر غیر خطی از $s = 1/5$ به $s = 1/3$ تغییر کرده است. در این صورت مشاهده می‌کنیم که رفتار بحرانی متناظر با نقطه سه‌گانه از بین می‌رود و در عوض رفتاری شبه واندروالسی پدیدار می‌شود. هم‌دماها و هم‌فشارها در نمودارهای $P-r_+$ و $T-r_+$ (در شکل‌های ۷ و ۸)، از نظر کیفی، مانند هم‌تاهایشان در شکل‌های ۱ و ۲ برای گذار فاز واندروالسی استاندارد هستند. از سوی دیگر، از نمودار $G-T$ در شکل ۹ مشهود است فقط یک گذار فاز مرتبه اول (و نه بیشتر) در محدوده فشار $P < P_{C_1}$ رخ می‌دهد اما رفتار دم‌چلچله‌ای در جزئیات دچار تغییراتی می‌شود. برای مثال، مطابق نمودار بزرگ نمایی شده در شکل ۹، بر حسب تنظیم پارامترهای سیاه‌چاله‌ای، در یکی از گوشه‌ها رفتاری شبیه رفتاری بازگشتی مشاهده می‌شود که البته به دلیل کمینه نشدن انرژی آزاد گیبس عملاً هیچ تغییر فیزیکی به خصوصی در تعداد فازها رخ نمی‌دهد. این مورد با رسم نمودار $P-T$ به طور قطع اثبات می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱۰ نشان داده‌ایم، نمودار $P-T$ برای این وضعیت دقیقاً مشابه به رفتار واندروالسی استاندارد است که در آن دو ناحیه سیاه‌چاله‌ای بزرگ و کوچک توسط یک خط هم‌زیستی (مرتبه اول) از یکدیگر جدا می‌شوند.

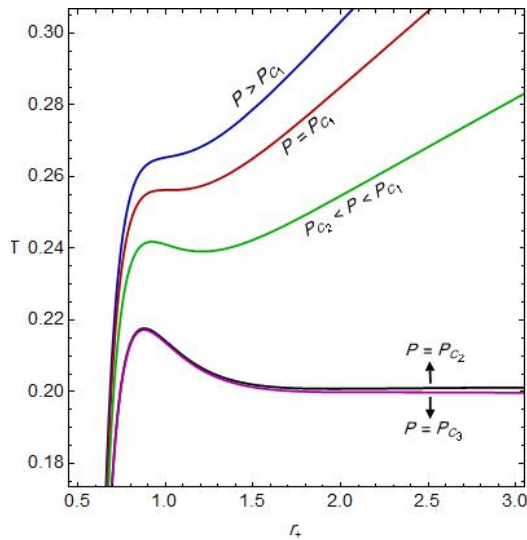
در پایان، بررسی‌های ما نشان می‌دهند در چارچوب گرانش جرم‌دار-ناوردای توانی ماکسول تا تقریب مرتبه چهارم، پتانسیل برهم‌کنشی گراویتون‌ها، فقط گذار فازهای واندروالسی، شبه واندروالسی و گذار فاز سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ



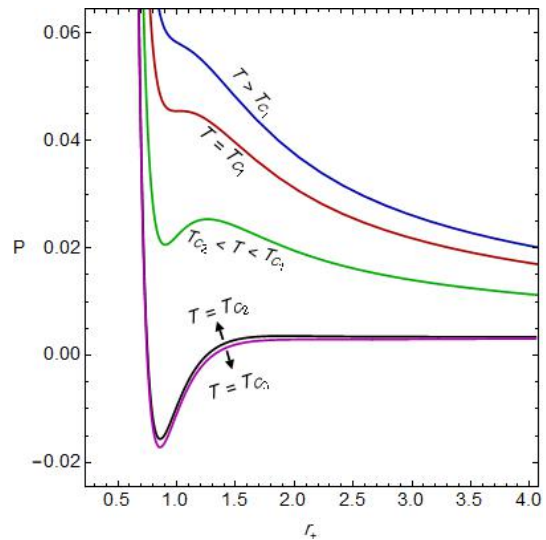
شکل ۶. نمودار $G-T$ متناظر با نقطه سه‌گانه و گذار فاز سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ برای سیاه‌چاله‌ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g = c_s = 1$ ، $c_1 = 2$ ، $c_2 = 0/1$ ، $c_3 = -0/1$ ، $c_4 = 0/6$ ، $c_5 = 0/1$ و $q = 1/5$ تنظیم شده‌اند.

دالالت بر رفتار سه‌فازی سیستم دارند. این رفتار سه‌فازی نیز از نمودار $P-r_+$ در شکل ۴، برای منحنی هم‌دما $P_{Tr} < P < P_{C_1}$ که دارای دو قسمت با تراکم منفی غیر فیزیکی است درک می‌شود. در نتیجه انتظار داریم که با کاهش تدریجی فشار به نقطه بحرانی سه‌گانه (T_{Tr}, P_{Tr}) دست یابیم. همان‌طور که مشهود است، با کاهش تدریجی دما، زمانی که فشار در بازه $P_{Tr} < P < P_{C_1}$ قرار دارد، دو گذار فاز واندروالسی روی می‌دهد و این گذار فازها سرانجام در فشار مشخص P_{Tr} با یکدیگر ترکیب می‌شوند و نسخه گرانشی نقطه بحرانی سه‌گانه را تشکیل می‌دهد. در ضمن، از آنجا که انرژی آزاد گیبس در نقطه بحرانی سوم (T_{C_1}, P_{C_1}) کمینه نمی‌شود، بنابراین این نقطه غیر فیزیکی است. لازم به ذکر است این نوع از رفتار بحرانی در تمامی ابعاد $d \geq 6$ ، با تنظیم مناسب پارامترهای نظریه، دیده می‌شود.

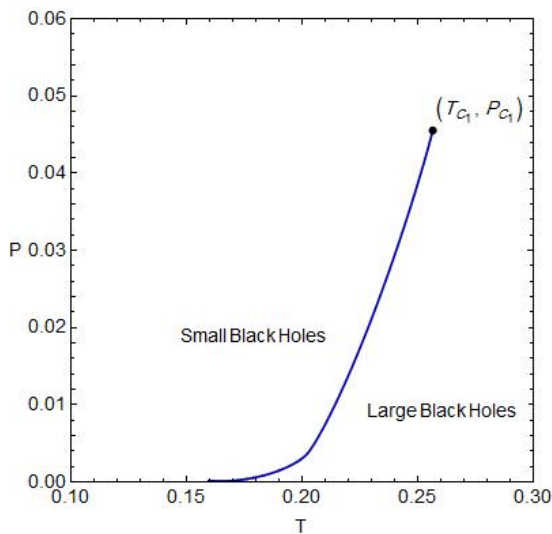
نوع دیگری از رفتار بحرانی در چارچوب مدل مورد بحث مشاهده می‌شود که در اینجا تحت عنوان گذار فاز (یا رفتار بحرانی) شبه واندروالسی ارجاع داده می‌شود و در شباهت با وضعیتی است که در سیاه‌چاله‌های باردار گوس-بونه رخ



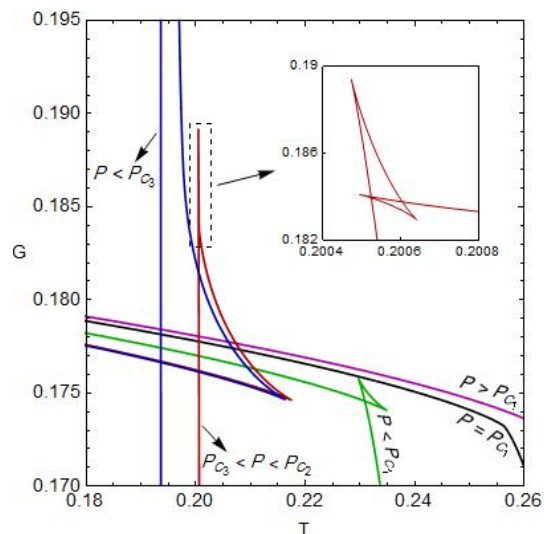
شکل ۸. نمودار $T-r_+$ متناظر با نقطه سه گانه و گذار فاز سیاه چاله ای کوچک/متوسط/بزرگ برای سیاه چاله ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g=c_o=1$ ، $c_1=2$ ، $c_r=0/1$ ، $c_f=0/6$ ، $c_p=-0/1$ و $s=1/3$ تنظیم شده اند.



شکل ۷. نمودار $P-r_+$ متناظر با نقطه سه گانه و گذار فاز سیاه چاله ای کوچک/متوسط/بزرگ برای سیاه چاله ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g=c_o=1$ ، $c_1=2$ ، $c_r=0/1$ ، $c_f=0/6$ ، $c_p=-0/1$ و $s=1/3$ تنظیم شده اند.



شکل ۱۰. نمودار $P-T$ و خط هم زیستی متناظر برای سیاه چاله ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g=c_o=1$ ، $c_1=2$ ، $c_r=0/1$ ، $c_f=0/6$ ، $c_p=-0/1$ و $s=1/3$ تنظیم شده اند.



شکل ۹. نمودار $G-T$ متناظر با نقطه سه گانه و گذار فاز سیاه چاله ای کوچک/متوسط/بزرگ برای سیاه چاله ای با افق تخت ($k=0$) در ۶- بعد. پارامترها به صورت $m_g=c_o=1$ ، $c_1=2$ ، $c_r=0/1$ ، $c_f=0/6$ ، $c_p=-0/1$ و $s=1/3$ تنظیم شده اند.

بازگشتی چندگانه و احتمالاً رفتار بازگشتی استاندارد امکان پذیر نیست.

متناظر با نقطه سه گانه می تواند حضور داشته باشند و وجود سایر فازها مانند گذار فاز واندروالسی معکوس، رفتار

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با معرفی کُنش اقلیدسی متناهی و در نتیجه تابع پارش شبه کلاسیکی، جواب‌های سیاه‌چاله‌ای نظریه گرانش جرم‌دار در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی غیرخطی منتج از نظریه توانی ناوردای ماکسول، به بررسی ترمودینامیک در فضای فاز توسعه یافته پرداختیم. با محاسبه کمیت‌های ترمودینامیکی از طریق تابع پارش نشان دادیم که این کمیت‌ها در قانون اول ترمودینامیک صدق می‌کنند، همچنین رابطه‌ی اسمار مربوط به این جواب‌ها ارائه شد.

دستگاه‌های معمول در طبیعت در هنگام گذار فاز، یک تغییر اندازه (حجم) را به دلیل تغییر در نیروهای مؤثر بین مولکولی تجربه می‌کنند. در تمام گذارهای فاز ارائه شده در فضای فاز توسعه یافته و همچنین این مقاله، سیاه‌چاله ماهیت (سیاه چاله‌ای) خودش را در یک پس‌زمینه پاددوسسته حفظ می‌کند (پس سیاه‌چاله باقی می‌ماند) ولی اندازه آن متناسب با تغییر کمیت‌های ترمودینامیکی‌اش، در شباهت با دستگاه‌های معمول در طبیعت، تغییر می‌کند. این ویژگی می‌تواند دلیل بر وجود یک ساختار میکروسکوپی برای سیاه‌چاله‌ها باشد (برای بحث پیش‌گامانه در زمینه ساختار میکروسکوپی سیاه‌چاله‌های پاددوسسته مرجع [۵۰] را ببینید). از این رو در سال‌های اخیر، این نوع از گذارهای فاز صرفاً سیاه‌چاله‌ای به طور ویژه مورد علاقه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. بنابراین، بر خلاف گذار فاز هاوکینگ- پیچ که یک گذار فاز از یک فضا‌زمان سیاه‌چاله‌ای به یک فضا‌زمان غیر سیاه‌چاله‌ای (سالیتون مجانباً پاددوسسته) است [۴۵]، در مبحث شیمی سیاه‌چاله‌ای، گذار فاز بدون تغییر ماهیت فضا‌زمان در سطح سیاه‌چاله‌ای باقی می‌ماند که پدیده‌ای کلیدی است.

با تمرکز روی فضای فاز سیاه‌چاله‌ها، بحرانیت در صفحه $P-r_+$ (و در نتیجه $P-v$) را بررسی کردیم و برای کامل‌تر شدن بحث، نمودارهای $T-r_+$ و $G-T$ متناظر را نیز مورد مطالعه قرار دادیم. در نتیجه ورود پارامتر غیرخطی s به نظریه، مانند جرم گراویتون‌ها، به طور کلی فضای فاز ترمودینامیکی افزایش می‌یابد و در نتیجه بحرانیت در محدوده بسیار

وسیع‌تری نسبت به گرانش جرم‌دار مشاهده می‌شود. در این خصوص، نشان دادیم که گذار فاز واندروالسی به ازای تمامی مقادیر مجاز برای پارامترهای q و s ، برای تمامی سیاه‌چاله‌های توپولوژیکی ($k = 0, \pm 1$)، در ابعاد $d \geq 4$ رخ می‌دهد. مطابق با نمودار $G-T$ در شکل ۳، دیده می‌شود که در نقطه بحرانی یک گذار فاز مرتبه اول رخ می‌دهد.

با انجام تحلیل‌ها در آنسامبل کانونی برای سیاه‌چاله‌های باردار به دست آمده، هیچ شاهدهی مبنی بر وجود رفتار گذار فاز بازگشتی در فضای فاز توسعه یافته پیدا نشد. البته پیش‌بینی می‌شود این رفتار در آنسامبل کانونی بزرگ قابل مشاهده باشد. همچنین، در حضور میدان الکترومغناطیسی غیر خطی توانی ناوردای ماکسول امکان وجود مشابه گرانشی نقطه سه‌گانه نیز تأیید شد. البته لازم به ذکر است که در حد گراویتون‌های بدون جرم ($m_g = 0$)، نظریه به گرانش اینشتین- توانی ناوردای ماکسول تبدیل می‌شود که در آن رفتار بحرانی متناظر با نقطه سه‌گانه مشاهده نمی‌شود. در واقع، منشأ نقطه بحرانی سه‌گانه، پتانسیل‌های برهم‌کنشی گراویتون‌هاست که فضای فاز را به اندازه کافی برای رخ دادن این پدیده غنی می‌سازد. نقاط بحرانی سه‌گانه و گذار فازهای سیاه‌چاله‌ای کوچک/متوسط/بزرگ متناظر دقیقاً در ابعاد $d \geq 6$ ظاهر می‌شوند. در این خصوص، مطابق با شکل‌های ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰، پارامتر الکترومغناطیسی غیرخطی s می‌تواند باعث ناپدید شدن یا ظاهر شدن نقطه بحرانی سه‌گانه برای گذار فاز شود. همچنین مقایسه میدان‌های توانی ناوردای ماکسول با میدان‌های الکترومغناطیسی غیرخطی ناشی از نظریه بورن- اینفلد جالب است. همان‌طور که در مرجع [۱۵] برای نظریه گرانش جرم‌دار- بورن- اینفلد نشان داده شده است، گذار فاز واندروالسی در ابعاد $d \geq 4$ و نقطه بحرانی سه‌گانه در $d = 5$ بعد مشاهده شده است (تحلیل ابعاد بالاتر این پدیده بررسی نشده است). در نتیجه در حضور میدان‌های توانی ناوردای ماکسول و یا بورن- اینفلد، گذار فاز واندروالسی در ابعاد یکسانی ($d \geq 4$) رخ می‌دهد. ولی نقطه بحرانی سه‌گانه در حضور میدان‌های توانی ناوردای ماکسول در $d = 6$ بعد شروع به ظاهر شدن می‌کند، ولی در حضور

ناهنجاری در شکل دم‌چلچله‌ای استاندارد در نمودار $G-T$ ، مشاهده می‌شود.

در چارچوب این مدل، احتمال وجود رفتارهای بحرانی دیگر نیز بررسی شد. از آنجا که معادله حاکم بر نقاط بحرانی (۳۴) تا تقریب مرتبه چهارم پتانسیل‌های برهم‌کنشی گراویتون‌ها، به تعداد یک و یا حداکثر سه نقطه را به عنوان جواب می‌تواند بپذیرد، وجود رفتارهای بحرانی دیگر منتفی است. برای غنی‌تر شدن فضای فاز لازم است که خمش‌های مراتب بالا و یا جملات مراتب بالاتر پتانسیل در نظر گرفته شود و در این موارد رفتارهای بحرانی بدیعی پیش‌بینی می‌شود.

میدان‌های بورن-اینفلد، این پدیده در $d=5$ (و احتمالاً ابعاد بالاتر آن) می‌تواند مشاهده می‌شود.

در ادامه، با تنظیم مناسب پارامتر غیرخطی s رفتار بحرانی دیگری در ابعاد $d \geq 6$ ، که تحت عنوان گذار فاز شبه‌واندوالسی ارجاع داده شد، در شباهت با سیاه‌چاله‌های باردار گوس-بوننه ۶- بعدی بروز می‌کند. با تحلیل این پدیده بحرانی، نشان دادیم که معادله حاکم بر نقاط بحرانی، همیشه سه نقطه بحرانی را پیش‌بینی می‌کند که دوتا از این نقاط بحرانی به دلیل کمینه نکردن انرژی آزاد گیس غیرفیزیکی هستند. در نتیجه یک نقطه بحرانی فیزیکی متناظر با رفتار شبه‌واندروالسی، با مقداری

مراجع

1. D Kastor, S Ray, and J Traschen, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 195011.
2. B P Dolan, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 127503.
3. D Kubiznak, R B Mann, and M Teo, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 063001.
4. A Chamblin, R Emparan, C V Johnson, and R C Myers, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 104026.
5. Chamblin, R Emparan, C V Johnson, and R C Myers, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 064018.
6. D Kubiznak and R B Mann, *JHEP* **07** (2012) 033.
7. N Altamirano, D Kubiznak, and R B Mann, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 101502.
8. S Gunasekaran, R B Mann, and D Kubiznak, *JHEP* **11** (2012) 110.
9. N Altamirano, D Kubiznak, R B Mann, and Z Sherkatghanad, *Class. Quant. Grav.* **31** (2014) 042001.
10. J X Mo and W B Liu, *EPJC* **74** (2014) 2836.
11. A M Frassino, D Kubiznak, R B Mann, and F Simovic, *JHEP* **09** (2014) 080.
12. R A Hennigar, *JHEP* **09** (2017) 082.
13. S H Hendi, R B Mann, S Panahiyan, and B Eslam Panah, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 021501(R).
14. D Zou, R Yue, and M Zhang, *EPJC* **77** (2017) 256.
15. M Zhang, D Zou, and R Yue, *Adv. High Energy Phys.* **2017** (2017) 3819246.
16. Z Sherkatghanad, B Mirza, Z Mirzaeyan, and S A H Mansoori, *Int. J. Mod. Phys. D* **26** (2014) 1750017.
17. J Xu, L M Cao, and Y P Hu, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 124033.
18. B Mirza and Z Sherkatghanad, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 084006.
19. R A Hennigar, W G Brenna, and R B Mann, *JHEP* **07** (2015) 077.
20. R G Cai, L M Cao, L Li, and R Q Yang, *JHEP* **09** (2013) 005.
21. D Zou, Y Liu, and B Wang, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 044063.
22. S Wei and Y Liu, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 044014.
23. W Xu, H Xu, and L Zhao, *EPJC* **74** (2014) 2970.
24. S H Hendi, S Panahiyan, S Upadhyay, and B Eslam Panah, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 084036.
25. S H Hendi and A Dehghani, *EPJC* **79** (2019) 227.
26. A Dehyadegari, M K Zangeneh, and A Sheykhi, *Phys. Lett. B* **773** (2017) 344.
27. S H Hendi, B Eslam Panah, and S Panahiyan, *Fortschr. Phys. (Prog. Phys.)* **2018** (2018) 1800005.
28. C de Rham and G Gabadadze, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 044020.
29. C de Rham, G Gabadadze, and A J Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 231101.
30. D Vegh, Holography without translational symmetry, arXiv: 1301.0537
31. R G Cai, Y P Hu, Q Y Pan, and Y L Zhang, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 024032.
32. S H Hendi, S Panahiyan, and B Eslam Panah, *JHEP* **01** (2016) 129.
33. S F Hassan and R A Rosen, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 041101.
34. L Alberte and A Khmelnsky, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 064053.
35. M Blake and D Tong, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 106004.
36. R A Davison, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 086003.
37. J B Jiménez, L Heisenberg, G J Olmo, and D Rubiera-Garcia, *Phys. Rep.* **727** (2018) 1.
38. V I Afonso, G I Olmo, E Orazi, and D Rubiera-Garcia, *EPJC* **78** (2018) 866.
39. L Alberte and A Khmelnsky, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 046006.
40. T Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351.
41. J M Bardeen, B Carter, and S W Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161.
42. G W Gibbons, S W Hawking, *Phys. Rev. D* **15**

47. D J Brown and J W York, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 1407.
48. A Dehghani, S H Hendi, and R B Mann, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 084026.
49. S W Wei and Y X Liu, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 044057.
50. S W Wei and Y X Liu, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 111302.
- (1977) 2752.
43. G 't Hooft, M Veltman, *Ann. Phys. Theor. A* **20** (1974) 69 .
44. P Kraus, F Larsen, and R Siebelink, *Nucl. Phys. B* **563** (1999) 259.
45. S Hawking and D N Page, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.
46. E Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505.