

## تحول بُعد فراکتالی تعمیم یافته میدان چگالی ماده تاریک در شبیه‌سازی ایلاستریس

مهدی یوسف‌زاده و سید محمد صادق موحد

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۹۸۳۹۶۹۴۱۱، تهران

پست الکترونیکی: m.s.movahed@ipm.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۳/۲۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۶/۴)

### چکیده

مطالعه ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، از رهیافت میدان‌های تصادفی اطلاعات مهمی در خصوص شرایط اولیه و تحول آنها فراهم می‌کند. در این مقاله با تکیه بر ویژگی‌های مقیاسی میدان‌های تصادفی، خواص هندسی میدان چگالی ماده تاریک را در شبیه‌سازی‌های  $N$ -ذره‌ای بررسی می‌کنیم. برای این منظور خاصیت مقیاسی مربوط به خطوط هم‌چگالی در میدان‌های  $(1+2)$  بُعدی بریده شده از میدان  $(1+3)$  بُعدی، شبیه‌سازی‌های  $N$ -ذره‌ای ماده تاریک را که توسط بُعد فراکتالی تعمیم یافته  $D_q$  قابل کمی شدن است، بررسی می‌کنیم. خاصیت مقیاسی برای میدان مذکور در تمام انتقال به سرخ‌های موجود در شبیه‌سازی، برقرار است. کل کانتورهای هم‌تراز چگالی در بزرگ‌ترین انتقال به سرخ قابل دسترس، ماهیت یک شکل هندسی منظم دارند اما با کاهش انتقال به سرخ، میدان مذکور خاصیت چندفراکتالی پیدا می‌کند. با توجه به ناگوسیت میدان در انتقال به سرخ کم، منشأ این چند فراکتالی غالباً همین انحراف تابع توزیع از حالت گوسی است. تحول نمای مقیاسی  $D_q$  بر حسب انتقال به سرخ نشان می‌دهد که به ازای  $q$ های مثبت، ماهیت تک‌فراکتالی تقریباً حفظ می‌شود و این در حالی است که این نما برای  $q$ های منفی به شدت به انتقال به سرخ وابسته است و از این رو می‌تواند به عنوان معیاری حساس به منظور یافتن تمایز بین مدل‌های مختلف تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، مورد توجه قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: میدان تصادفی، خواص مقیاسی، شبیه‌سازی  $N$ -ذره‌ای ماده تاریک

### ۱. مقدمه

کهکشان‌ها و خوشه‌ها توسط زنجیره‌ها<sup>۱</sup> و رشته‌مان‌ها<sup>۲</sup> به هم متصل می‌شوند و شبکه کیهان<sup>۳</sup> را می‌سازند. با توجه به داده‌هایی که در آینده از ساختارهای بزرگ مقیاس کیهان در دسترس قرار خواهد گرفت (مانند داده‌هایی ماهواره اقلیدس [۳])، امکان بررسی ساختارهای کیهانی و همچنین

با توجه به داده‌های رصدی توزیع سه بُعدی کهکشان‌ها که توسط مساح‌های مختلف ارائه شده است، می‌توان خواص توپولوژی و هندسی متعددی را در انتقال به سرخ‌های متفاوت و همچنین تراز چگالی‌های مختلف مورد بررسی قرار

داد [۱ و ۲].

۱. Chains

۲. Filaments

۳. Cosmic web

بررسی دقیق‌تر توزیع ماده تاریک و همچنین ماهیت انرژی تاریک در انتقال به سرخ‌های مختلف (کمتر از ۳) و همچنین ضریب سویدگی فراهم خواهد شد [۴]. برای بررسی روند تحول کیهان و این که این روند تحول از چه فیزیکی پیروی می‌کند، بررسی شبیه‌سازی‌ها N-ذره‌ای مانند شبیه‌سازی ایلاستریس<sup>۱</sup> اهمیت پیدا می‌کند و ابزارهای آماری نیز در این زمینه نقش مهمی ایفا می‌کنند.

مشخص شده است که می‌توان افت‌وخیزهای اولیه کیهان را با کمک رهیافت توصیف میدان‌های تصادفی، بررسی کرد، لذا تمامی متغیرهایی که از آن بیرون می‌کشیم ماهیت تصادفی دارند. با در نظر گرفتن این ماهیت تصادفی می‌توانیم پیش‌بینی‌هایی برای اختلالات اولیه و تحول آن داشته باشیم. در نهایت با مطالعه ساختارهای بزرگ، این امکان فراهم می‌شود که روی مدل‌های کیهان‌شناسی قید گذاشت.

به منظور مشخصه‌یابی و مدل‌سازی میدان‌های تصادفی، روش‌های مختلفی وجود دارد. مطالعه خواص توپولوژی (خواص سراسری) و خواص هندسی (خواص موضعی) از جمله، روش‌های مطالعه خواص آماری به حساب می‌آید. مطالعه میدان‌های بزرگ مقیاس کیهانی با توجه به ماهیت تصادفی که دارد الزاماً ما را به سمت استفاده از روش‌های مشخصه‌یابی پیچیده و قابل اعتمادی سوق می‌دهد [۵].

برای یافتن ویژگی‌ها و فیزیک جدید باید به مشخصه‌یابی دقیق میدان‌های تصادفی کیهانی پردازیم. تجربه نشان داده است که دستگاه‌ها در نقطه بحرانی و در نزدیکی گذار فاز خواص مقیاسی دارند. لذا می‌توان گفت که شرط لازم برای این که دستگاهی در نزدیکی نقطه بحرانی خود قرار گیرد، وجود رفتار خودمتشابهی است که توسط نماهای مقیاسی، مشخص می‌شود. در این میان با الهام از فرایند تراوش، گذارهای هندسی و همچنین خاصیت خودمتشابهی سطوح زبر، ما ریخت‌شناسی میدان ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی را مد نظر قرار دادیم. در مرجع [۶] تلاش شده است با محاسبه تابعی‌های مینکوفسکی، ردپای کیهان‌شناخت  $f(R)$  در مقایسه با کیهان‌شناخت LCDM بررسی شود. در این مقاله ما به جای توجه

به فراوانی‌های حاصل از مطالعه ریخت‌شناسی تابعی‌های مینکوفسکی، به مطالعه نمای مقیاسی بعد فراکتالی تعمیم‌یافته مربوط به میدان چگالی شبیه‌سازی N-ذره‌ای ایلاستریس، می‌پردازیم و قصد داریم علاوه بر این که مقیاسی بودن این میدان را با این ابزار بررسی کنیم، تحول آن را نیز مورد مطالعه قرار دهیم.

این مقاله در ادامه دارای ساختار زیر است: در بخش دوم درباره خاصیت خودتشابهی، حلقه‌های پربند و بعد فراکتالی تمام پربندها صحبت خواهیم کرد. در بخش سوم به توصیف داده‌ها پرداخته و شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای و به طور خاص شبیه‌سازی ایلاستریس را معرفی خواهیم کرد. در بخش چهارم نتایج حاصل از محاسبه بعد فراکتالی تعمیم‌یافته حلقه‌های هم‌چگال از میدان تصادفی ماده تاریک در انتقال به سرخ‌های مختلف که توسط شبیه‌سازی ایلاستریس داده شده است را ارائه می‌کنیم. در پایان در مورد نتایج بحث خواهیم کرد و پیشنهادهای برای ادامه این کار ارائه خواهیم داد.

## ۲. توصیف ابزار: فراکتال‌ها و حلقه‌های هم‌چگال (کانتور یا پربند)

فراکتال‌ها به ساختارهای هندسی گفته می‌شود که هر بخش آن شبیه به کل آن شکل است و در واقع هر بخش از ساختار با کل ساختار همانند استو به این خاصیت خودمتشابهی می‌گویند که به عنوان تقارن در حال گسترش<sup>۱</sup> یا تقارن در حال آشکار شدن<sup>۲</sup> شناخته می‌شوند و دو نمونه از این فراکتال‌ها در شکل ۱ آورده شده است [۷].

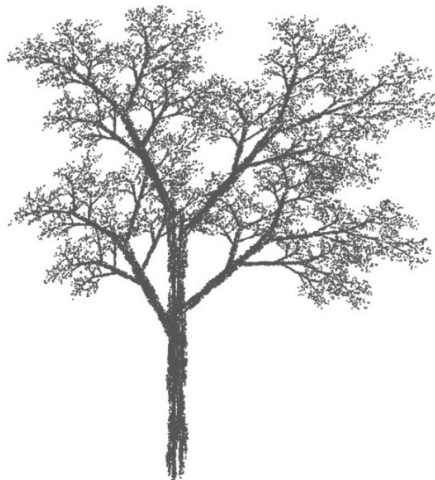
اگر این تکرار و شباهت در هر مقیاسی دقیقاً یکسان باشد به آن خود متشابه متناسب<sup>۳</sup> می‌گویند که همسانگرد است و اگر هر جز شکل در همه جهات به نسبت ثابتی رشد نکند به آن خود متناسب<sup>۴</sup> گفته می‌شود که دیگر شکل همسانگرد نیست

<sup>۱</sup>. Expanding symmetry

<sup>۲</sup>. Unfolding symmetry

<sup>۳</sup>. Affine self-similar

<sup>۴</sup>. Self Affinity



شکل ۱. نمونه‌ای از فراکتال‌های تعینی [۷ و ۸].

یافتن پربندهای همتراز و در نتیجه تعیین خواص مقیاسی آنها استفاده می‌کنیم [۱۱].

در این بخش نوع تعمیم یافته بُعد فراکتالی را معرفی می‌کنیم. با تعیین  $p(i, l)$  که نشان دهنده احتمال حضور یک ویژگی خاص (در اینجا احتمال عبور پربند) در جزء  $i$ ام میدان چگالی که با اجزایی به طول  $l$  شبکه‌بندی شده است، تابع پارش<sup>۲</sup> زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$Z(q, l) = \sum_{(i=1)}^{N(l)} p(i, l)^q, \quad (1)$$

در این عبارت  $N(l)$  تعداد قسمت‌های میدان چگالی است که با اجزایی با ابعاد  $l$  شبکه‌بندی شده است و پارامتر  $q$  عددی دلخواه است. بُعد فراکتالی تعمیم یافته  $D_q$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(Z(q, l))}{\ln(l)}, \quad (2)$$

واضح است که هرچه توانایی ما برای کوچک‌تر کردن  $l$  افزایش یابد، دقت ابزارمان نیز بیشتر می‌شود. اگر  $q=0$  باشد مقدار  $Z$  در رابطه ۱ برابر با  $N(l)$  خواهد شد که نشان دهنده تعداد خانه‌های به طول  $l$  است. بنابراین  $D_0$  بُعد فراکتالی تمام پربندها نامیده می‌شود. اگر  $q=1$  باشد

$$D_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(l)} p(i, l) \ln(p(i, l))}{\ln(l)} \propto \sum p \ln(p)$$

داریم

[۹]. همچنین ما خودتشابهی تقریبی را نیز داریم که با بزرگ‌نمایی در مقیاس‌های مختلف شکل موجود، در شکل تقریباً (و نه دقیقاً) مشابه شکل اولیه است. با الهام از خودتشابهی در اشکال هندسی، می‌توان، این خاصیت را در سایر کمیت‌ها جستجو کرد. برای مثال هنگامی که با سطوح ناهموار کار می‌کنیم، ارتفاع کمیتهی فراکتالی اما با مقیاس ناهمگن است؛ یعنی با بزرگ‌نمایی‌های غیر یکسان در دو راستای افقی  $x$  و عمودی (ارتفاع)  $h(x)$  می‌توان سطح ناهموار اولیه را حفظ کرد و همان طور که در بالا گفتیم دارای ویژگی خود تناسب دارند و به آنها فراکتال‌های غیر همگن گفته می‌شود.

یک حلقه پربند شامل خطوط بسته‌ای است که یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از اتصال نقاط همتراز (هم ارتفاع) به یکدیگر ساخته می‌شوند. اگر هدف بررسی نظریه تراوش و خوشه‌یابی باشد، نقاط بیش از تراز را به هم وصل می‌کنیم تا برای نمونه بفهمیم گذار فاز در چه تراز از سیستم رخ داده است [۱۰]. در غیر این صورت معمولاً نقاط همتراز را به هم وصل می‌کنیم. در این مقاله از پربندهای به دست آمده از اتصال نقاط همتراز بهره گرفتیم که نمایشی از این حلقه‌ها را در بخش نتایج آورده‌ایم. در این مقاله ما از الگوریتم مارچینگ اسکویر<sup>۱</sup> برای

۲. Partition function

۱. Marching squares

نقطه‌ای خاص با متوسط میدان مقایسه می‌شود. به همین دلیل این میدان‌ها را قبل از بررسی بهنجار می‌کنیم. مورد دیگر این که در هموارسازی‌های این کار ما از تابع هموار کننده گوسی بهره گرفته‌ایم تا از خطاهای پیش آمده جلوگیری کنیم [۱۲].

در شبیه‌سازی‌های N ذره‌ای برای جلوگیری از واگرایی ذره‌هایی که به هم بسیار نزدیک می‌شوند از تابع پتانسیل گرانشی تعمیم یافته زیر استفاده می‌کنند:

$$\phi = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}, \quad (3)$$

که در آن پارامتر  $\epsilon$  نقش هموار کردن پتانسیل گرانشی را دارد. در میدان‌های چگالی، توزیع شرایط اولیه شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای از یک توزیع خاص به نام گلس<sup>۱</sup> می‌آید که اولین بار توسط وایت پیشنهاد داده شد. برای ایجاد میدان چگالی با این تابع توزیع، ابتدا یک شبیه‌سازی با توزیع یکنواخت ایجاد کرده و سپس بین ذرات نیروی عکس گرانشی در نظر می‌گیرند و اجازه می‌دهند شبیه‌سازی به اندازه کافی تحول یابد. در نهایت این تابع توزیع شامل تعدادی نقطه فراچگال خواهد شد که در تشکیل ساختارها کمک می‌کند [۱۳ و ۱۴].

پروژه شبیه‌سازی ایلاستریس مجموعه‌ای از شبیه‌سازی‌های هیدرودینامیکی بزرگ مقیاس تشکیل کهکشان است [۱۵]. یکی از این شبیه‌سازی‌ها، Illustris نام دارد که بین این مجموعه از بالاترین دقت برخوردار است و حجم  $75 \text{ Mpc/h}$  را پوشش می‌دهد. دقت جرمی ماده تاریک آن  $m_c = 6.126 \times 10^6 M_\odot / h$  بوده و دقت جرمی ماده باریونی آن  $m_c = 1.126 \times 10^6 M_\odot / h$  است. در  $z = 0$  نیروهای گرانشی با مقیاس  $\epsilon = 710 \text{ pc}$  نرم شده‌اند. کوچک‌ترین سلول گاز هیدرودینامیکی نیز  $48 \text{ pc}$  است. ما تحول دینامیکی  $2 \times 1820^3$  عنصر مختلف را دنبال می‌کنیم و به طور فعال  $1820^3$  دنبال کننده مونته‌کارلو را تحت نظر داریم که ما را به تعداد کل ۱۸ میلیارد ذره می‌رساند. همان طور که اشاره شد اندازه فیزیکی طول جعبه  $l$

معیاری از آنتروپی دستگاه است و برای  $q = 2$  نیز داریم

$$D_r = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_{i=1}^{N(l)} (p(i,l)p(i,l)))}{\ln(l)}$$

که نمادی از همبستگی است.

در این مقاله می‌خواهیم بعد فراکتالی تعمیم یافته که معرفی کردیم را برای حلقه‌های هم‌چگالی در شبیه‌سازی ایلاستریس، تعیین کنیم.

### ۳. توصیف داده‌ها: شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای

#### ایلاستریس

مسئله تحول یک سامانه سه ذره‌ای یا بیشتر (مثلاً سه ذره جرم‌دار که بین آنها نیروی جاذبه وجود دارد) به صورت تحلیلی قابل حل نیست و برای دانستن وضعیت هر یک از اجزای سامانه در هر زمان، باید به دنبال حل عددی مسائل باشیم. حال در یک دستگاه که میلیاردها ذره وجود دارد، تحول آن به شدت غیر خطی بوده و تنها راه حل شبیه‌سازی‌های عددی است. مسئله تشکیل ساختارها در کیهان‌شناسی به دلیل پیچیدگی و گسترده بودن دامنه مقیاس‌ها تنها از طریق شبیه‌سازی‌های عددی به صورت دقیق بررسی می‌شود. نوع خاصی از این شبیه‌سازی‌ها، شبیه‌سازی‌های N-ذره‌ای نام دارد و معمولاً همه مواد را مثل ماده تاریک فرض کرده (ذرات با هم برخورد ندارند) و تنها گرانش است که وضعیت آینده این دستگاه را مشخص می‌کند. بخش مهمی از این نوع شبیه‌سازی‌ها به نحوی در نظر گرفته می‌شوند که در آن ذرات ماده تاریک از باریون‌ها اثر نمی‌پذیرند. با در نظر گرفتن معادلات هیدرودینامیکی، دگرگونی باریون‌ها و تحول کهکشان‌ها (و اجزای آن) به شبیه‌سازی اضافه می‌شود که در تحلیل‌های اخترفیزیکی بسیار کاربرد دارد. در این بخش به دنبال شبیه‌سازی میدان تصادفی کیهانی هستیم که این میدان می‌تواند میدان سه‌بعدی چگالی، میدان سرعت و یا افت‌وخیزهای دمایی تابش زمینه کیهان باشد [۵].

میدان تباین چگالی به عنوان معرفی برای تحول ساختارهای بزرگ به کار گرفته می‌شود. معمولاً میدان تباین چگالی در

۱. Glass distribution

جدول ۱. مجموعه پارامترهای کیهان‌شناسی به دست آمده توسط داده‌های ماهواره WMAP9 [۱۸].

پارامتر	مقدار
$H_0$	$70.4 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
$\Omega_{CDM}$	۰/۲۷۲۶
$\Omega_{DE}$	۰/۷۲۷۴
$A_s$	$0.42 \times 10^{-9}$
$\Omega_b$	۰/۰۴۵
$n_s$	۰/۹۶۳

$$P(\Theta|X) = \frac{\mathcal{L}(X|\Theta)P(\Theta)}{\int \mathcal{L}(X|\Theta)P(\Theta)d\Theta} \quad (۴)$$

جملات اول و دوم در صورت کسر، به ترتیب درست‌نمایی و توزیع اولیه<sup>۳</sup> نامگذاری می‌شوند. توزیع اولیه شامل همه قیدهای اولیه مرتبط با پارامتر مدل است. در موردی که هیچ قید اضافی روی پارامتر مدل و تابع پسینی آن نداشته باشیم  $P(\Theta|X)$  متناسب با تابع درست‌نمایی خواهد شد. اگر هیچ گونه همبستگی میان اندازه‌گیری‌ها وجود نداشته باشد، و همچنین قضیه حد مرکزی صادق باشد، آنگاه تابع درست‌نمایی به صورت حاصل ضرب توابع گوسی و به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}(X|\Theta) \sim \exp\left(\frac{-\chi^2(\Theta)}{2}\right) \quad (۵)$$

اکنون با تعیین تابع درست‌نمایی، می‌توان در ترازهای مختلف خطاهای مربوط به  $\Theta$  را نیز تعیین کرد. به این ترتیب با در نظر گرفتن این که در این مطالعه پارامترهای آزاد همان نمای مقیاسی است که به عنوان بُعد فراکتالی تعمیم یافته معرفی شد، می‌توانیم مقدار و خطای آن را برای داده‌های خود، تعیین کنیم.

مطالعه خاصیت مقیاسی از چند وجه قابل توجه است: اول این که وجود چنین خاصیتی به معنای وجود خاصیت خودمشابهی است و لذا برای مدل‌سازی می‌توان از توابع همگن که رفتار خوش تعریفی بر حسب مقیاس دارند، استفاده کرد. دوم آن که از شروط لازم برای این که دستگاه در نزدیکی

شبیه‌سازی برابر  $75 \text{ Mpc/h}$  است و شامل که  $1820$  پیکسل می‌شود. مدل‌های تشکیل کهکشان شامل رشد سیاه‌چاله‌های ابرجرم، تکامل ستاره‌ای، بازیافت گازی، هسته‌های فعال کهکشانی و ... می‌شود که نشان دهنده هیدرودینامیک بسیار دقیق آن است. همچنین اجرای این شبیه‌سازی بر مبنای کد محاسباتی Arepo است که توسط مرجع [۱۶] توسعه داده شده است. آنچه که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد تبیین چگالی نرم شده ماده تاریک است که با توجه به درجه تفکیک شبیه‌سازی به صورت  $\delta_m(x, y, z)$  داده می‌شود. هر تراز تبیین چگالی به صورت  $v \equiv \delta_m / \sigma_\delta$  در نظر گرفته می‌شود.

نتایج این شبیه‌سازی در زمان حاضر با مشاهدات همعوانی خوبی دارد و در  $z=0$  حدود ۴۰ هزار کهکشان در انواع مختلف درون شبیه‌سازی وجود دارد [۱۵]. شروع اجرای این شبیه‌سازی از انتقال به سرخ ۱۲۷ تا انتقال به سرخ صفر است و داده‌ها در ۱۳۶ تصویر لحظه‌ای در انتقال به سرخ‌های مختلف ذخیره شده است. پارامترهای کیهان‌شناسی برای شرایط اولیه این شبیه‌سازی بر اساس نتایج WMAP9 در نظر گرفته شده است که مقدار آن در جدول ۱ آمده است.

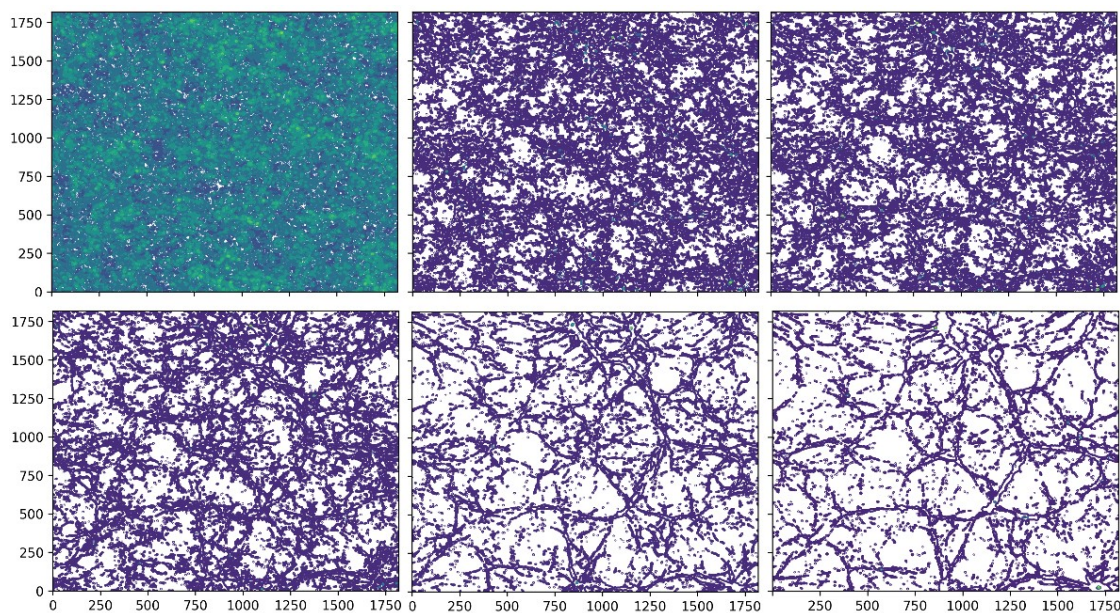
#### ۴. نتایج

در بخش‌های قبل ابزارها و داده‌های مورد استفاده را معرفی کردیم. در این بخش با محاسبه تابع پارش و بررسی خاصیت مقیاسی آن، بُعد فراکتالی تعمیم یافته مربوط به برش‌هایی از شبیه‌سازی ایلاستریس را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه خطای آماری ناشی از محاسبات عددی، از روش درست‌نمایی<sup>۱</sup> در تمام نتایج استفاده می‌کنیم [۱۷]. برای این منظور اندازه‌گیری‌ها و پارامترهای مدل را به ترتیب با  $\{X\}$  و  $\{D_q, v\}$ :  $\{\Theta\}$  نشان می‌دهیم. مطابق با قضیه بی‌ز<sup>۲</sup> احتمال شرطی مدل و پارامترها برای مشاهده‌ای خاص به صورت احتمال پسینی است:

۱. Likelihood

۲. Bayesian

۳. Prior



شکل ۲. نمایش حلقه‌های پر بندی همه ترازها. بالا از سمت چپ: برای انتقال به سرخ‌های ۴۶/۸، ۷/۲ و ۴/۹. پایین از سمت چپ: برای انتقال به سرخ‌های ۱، ۳ و صفر.

دریابیم. پس اندازه این برش‌ها  $1820 \times 1820$  خواهد بود. برای هموارسازی بهتر در سه جهت ممکن، سه برش هفت لایه از شبیه‌سازی چگالی ماده تاریخ فراهم کرده و نماها را برای برش‌های دوم، چهارم و ششم محاسبه می‌کنیم. بنابراین از هر شبیه‌سازی ۲۷ برش  $1820 \times 1820$  خواهیم داشت و نماها را برای آنها محاسبه و گزارش می‌کنیم.

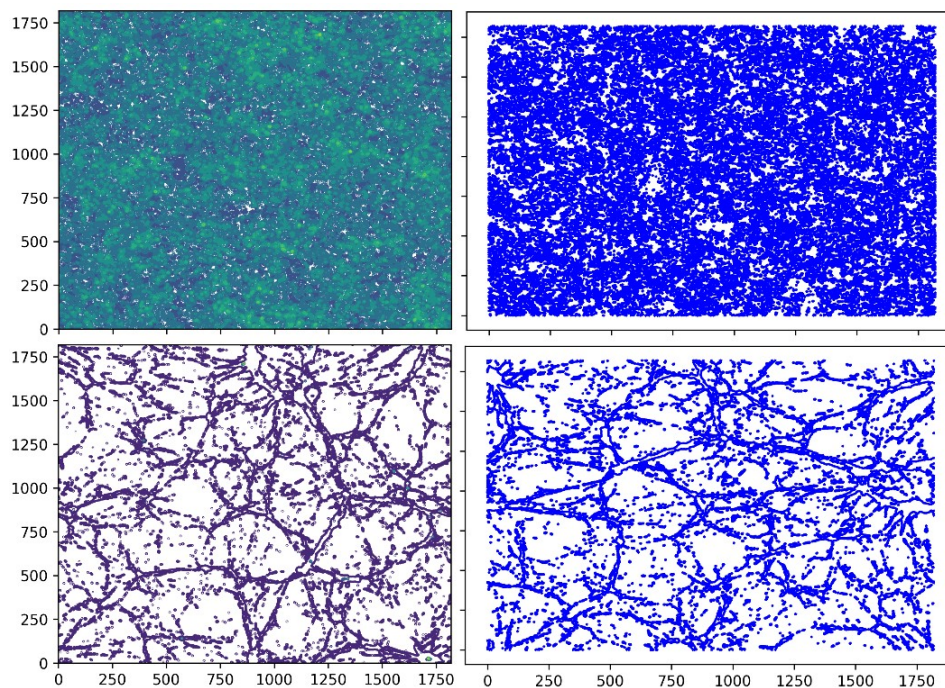
با توجه به این که نمای مقیاسی  $D_q$  برای حلقه‌های پر بندی محاسبه می‌شود پس در اولین قدم باید نسبت به حلقه‌های پر بند اطلاعات کلی را استخراج کنیم. بنابراین ابتدا نمایشی از همه پر بندها (در تمامی ترازها) را برای ۶ انتقال به سرخ مختلف در شکل ۲ نشان می‌دهیم. سپس در شکل ۳ تعداد حلقه‌های پر بند در تراز صفر (تراز میانگین) و تمام پر بندها را با هم مقایسه می‌کنیم. این مقایسه نشان می‌دهد که اکثر حلقه‌های پر بندها در تراز صفر حضور دارند و ما نیز حلقه‌های پر بندی همین تراز را توسط ابزارهایمان بررسی خواهیم کرد.

در قدم اول روابط توانی را برای نمای در حالت خاص  $q=0$  (بعد فراکتالی تمام پر بندها) بررسی می‌کنیم تا کارایی ابزار مورد نظر را دریابیم. به همین منظور یک برش

نقطه بحرانی خودش باشد، وجود خاصیت مقیاسی است. لذا یافتن چنین خاصیتی ما را ترغیب می‌کند که سایر ویژگی‌هایی که نشان دهنده وجود گذار فاز در دستگاه مورد مطالعه است را بررسی کنیم (برای توضیح بیشتر در خصوص اهمیت وجود گذار فاز در کیهان می‌توان به این نکته اشاره کرد که برخی از ناهنجاری‌های مشاهده شده در کیهان متقدم و متأخر را می‌توان با در نظر گرفتن وجود گذار فاز طی تحول کیهان توضیح داد [۱۹ و ۲۰]) سوم آن که این خاصیت نشان می‌دهد که با کمیت‌های محدودی می‌توان توصیف مؤثری از دستگاه مورد مطالعه، و بسته به این که در چه مقیاسی دستگاه را مطالعه می‌کنیم، فراهم کرد. این نماها ممکن است تحت تأثیر اندازه محدود<sup>۱</sup> (به دلیل کاهش دقت داده‌ها) قرار گیرند. بنابراین این نماها را برای برای شبیه‌سازی Illustris-1 که اندازه‌ای برابر با  $1820^2$  دارد، محاسبه می‌کنیم. این نماها برای داده‌های  $(1+2)$  بعدی قابل محاسبه‌اند. به همین دلیل باید برش‌هایی  $(1+2)$  بعدی در سه جهت مختلف از شبیه‌سازی  $(1+3)$  بعدی

۱. Size effect





شکل ۳. بالا: نمایش حلقه‌های پربندی تراز صفر (سمت چپ) در مقایسه با حلقه‌های پربندی تمام ترازها در  $z=46/8$ ، پایین: نمایش حلقه‌های پربندی تراز صفر (سمت چپ) در مقایسه با حلقه‌های پربندی تمام ترازها در  $z=0$ .

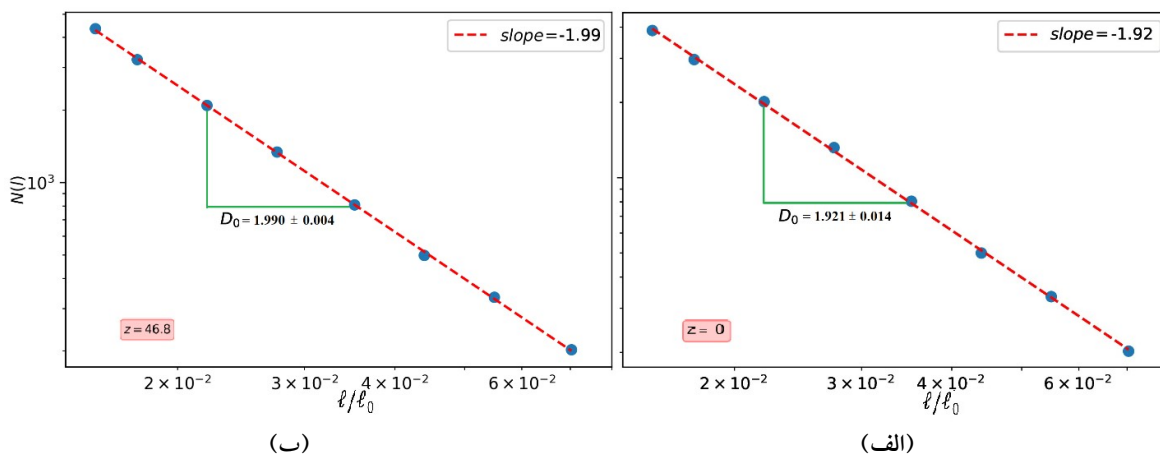
$1/990 \pm 0/004$  (نزدیک به ۲) به دست می‌آید. بنابراین می‌توان گفت با طول نرم‌سازی که در شبیه‌سازی ایلاستریس به کار رفته است، کل پربندها در بالاترین انتقال به سرخی که در اختیار داریم تقریباً ویژگی‌های یک شکل هندسی منتظم را دارند. با حرکت به سمت انتقال‌های کمتر و به طور مشخص در  $z=0$  بعد فراکتالی کل برابر  $1/921 \pm 0/014$  است که نشان دهنده تشکیل ساختارها و به وجود آمدن تهی جاها است.

بُعد  $D_q$  به ازای  $q$ های مختلف، توانایی آشکارسازی خواص آماری بیشتری را نسبت به  $D$  دارد. بر خلاف نماهای قبلی که محاسبات اولیه را برای یک برش خاص محاسبه کردیم، در اینجا بُعد  $D_q$  را برای ۲۷ برش از شبیه‌سازی  $N$ -ذره‌ای محاسبه کرده و نتایج آن را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. در شکل ۵ مقدار  $D_q$  در  $z=46/8$  برای تمام ممان‌های  $q$  تغییر چندانی ندارد که نشان دهنده وجود خاصیت تک فراکتالی در انتقال به سرخ‌های بالاست و با پیش‌بینی نظری نیز همخوانی دارد. اما به دلیل تشکیل ساختارها و غیر خطی شدن و افزایش

هموار شده از وسط شبیه‌سازی و عمود بر محور مکانی شبیه‌سازی در دو انتقال به سرخ  $z=46/8$  (بالاترین انتقال به سرخ) و  $z=0$  درآورده و روابط توانی این نما را بررسی خواهیم کرد.

بُعد فراکتالی تمام پربندها به کمک روش شمارش جعبه محاسبه می‌شود. به زبان ساده این بُعد نشان دهنده میزان پر شدن نقشه از حلقه‌های پربندی است. ما در این روش، نقشه‌ها را به جعبه‌هایی به طول ضلع بین ۳۲ تا ۱۲۸ پیکسل تقسیم می‌کنیم و ارتباط بین تعداد جعبه‌های پر (حاوی پربند) و طول یک جعبه در حالت خاص را بررسی می‌کنیم. این ارتباط در شکل ۴ نشان داده شده است.

در اینجا نیز خاصیت مقیاسی برای هر دو انتقال به سرخ صادق بوده و رابطه توانی مورد نظر برقرار است. همان طور که شکل ۳ مشاهده می‌شود، پربندها در  $z=46/8$  تقریباً تمام صفحه را پر کرده‌اند و تنها تعداد انگشت شماری از جعبه‌ها با طول ۱ خالی می‌ماند. نمای مقیاسی کل پربندها،  $D$ ، برابر



شکل ۴. نمودار شمارش جعبه بر حسب اندازه جعبه برای بررسی خاصیت فراکتالی تمام پربندها. (الف)  $z=0$  و (ب) در  $z=46.8$ .

تعمیم یافته به انتقال به سرخ چگونه است؟ این تغییرات می‌تواند درباره نحوه تشکیل ساختارها و زمان وقوع آن اطلاعات جالبی در اختیار ما قرار دهد. همچنین دیدن تغییرات خواص آماری به بررسی تغییر فازهای کیهانی نیز کمک خواهد کرد. در هر انتقال به سرخ مقدار این بُعد را برای پنج ممان مختلف  $+2$ ،  $+1$ ،  $0$ ،  $-1$ ،  $-2$  به دست می‌آوریم و تحول آنها را بررسی خواهیم کرد. این تحول در شکل ۶ به نمایش در آمده است.

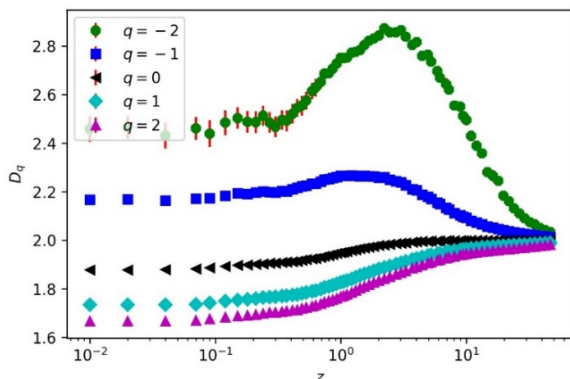
### ۵. جمع‌بندی و پیشنهادها

نمای مقیاسی بُعد فراکتالی تعمیم‌یافته،  $D_q$  برای میدان چگالی ماده تاریک که به صورت برش‌های  $(2+1)$  بُعدی از یک شبه‌سازی  $(3+1)$  بُعدی، تهیه شده‌اند، محاسبه شد. ابتدا نشان دادیم که رابطه توانی برای تابع پارشی که معرف این بُعد است، برای تمام انتقال به سرخ‌های قابل دسترسی، برقرار است. بُعد فراکتالی تعمیم یافته نشان می‌دهد که در انتقال به سرخ بالا وابستگی این نما به  $q$  کم بوده و خواص تک‌فراکتالی دارند. این بُعد برای ممان‌های  $q$  منفی با کاهش انتقال به سرخ ابتدا افزایش پیدا کرده و سپس کاهش شدیدی پیدا می‌کند اما برای ممان‌های مثبت از ابتدا تا انتهای تحول آن دارای روند کاهشی دارد که نشان دهنده تشکیل ساختارها است. این تحول بر حسب بُعد فراکتالی تعمیم یافته به دو مرحله تقسیم می‌شود: مرحله اول

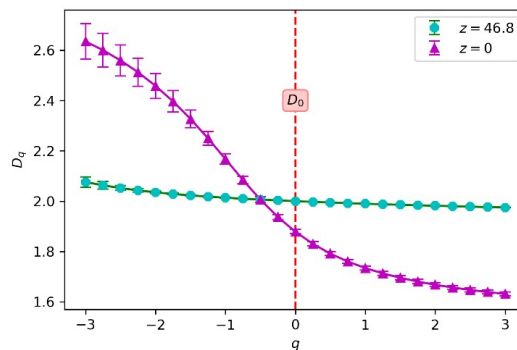
ناگوسیت، این خاصیت تک‌فراکتالی یعنی استقلال  $D_q$  از  $q$  برای  $z=0$  برقرار نیست. با به کار بردن ابزار  $D_q$  به منظور مطالعه برش‌های دوبعدی از میدان تباین چگالی ماده تاریک در سه بُعد، دو مرحله تحول در تشکیل ساختار شناسایی می‌شود: اول این که در انتقال به سرخ‌های بالا به دلیل این که میدان تصادفی از ویژگی‌های یک میدان گوسی نسبتاً یکنواخت تبعیت می‌کند لذا انتظار داریم که تعداد پربندهای موجود در برش‌های دوبعدی، زیاد باشد و همچنین مساحت‌های آنها نیز کم باشد. در این حالت می‌توان در نظر گرفت که مقادیر احتمال‌ها به صورت یکنواخت در بخش‌های مختلف میدان، توزیع شده‌اند. با گذشت زمان و کاهش انتقال به سرخ در بازه  $3 \leq z < \infty$  و با فرض این که هنوز تعداد پربندها تغییر قابل توجهی نداشته باشند، توزیع پربندها به سمت غیر یکنواخت شدن پیش می‌رود. لذا از آنجا که برای  $q$ ‌های منفی حساسیت بیشتر در تغییر احتمال‌ها وجود دارد بنابراین تغییرات  $D_q$  به انتقال به سرخ بیشتر است. این حساسیت به صورت افزایشی با کاهش انتقال به سرخ خود را نشان می‌دهد. در مرحله دوم تحول (در بازه  $z \leq 3$ ) با ادغام پربندهای کوچک و تشکیل ساختارها، تپی‌جاها زیاد شده و در نتیجه تعداد نواحی که شامل پربند است کاهش یافته (نماد مثلث در شکل ۶) و این اتفاق نهایتاً منجر به کاهش مجدد بُعد فراکتالی تعمیم یافته خواهد شد.

اکنون این سوال را مطرح می‌کنیم که وابستگی بُعد فراکتالی





شکل ۶. تحول بُعد فراکتالی تعمیم یافته  $D_q$  به ازای پنج  $q$  مختلف برحسب انتقال به سرخ.



شکل ۵. بُعد فراکتالی تعمیم یافته  $D_q$  بر حسب ممان‌های  $q$  مختلف.

این نوع تحول وجود دارد لذا یکی از شرایط لازم وجود گذار فاز را نشان می‌دهد و در نتیجه می‌توان به بررسی سایر ردپاهای وجود گذار فاز کیهانی طی تحول کیهان پرداخت. بررسی ردپای امواج گرانشی پس‌زمینه با توجه به پالسارها و سایر منابعی که تحت تأثیر این امواج زمینه گرانشی قرار می‌گیرند نیز با کمک این رهیافت می‌تواند به نتایج جالبی منجر شود [۲۱].

### ۶. قدردانی

شبیه‌سازی ایلاستریس به صورت عمومی از پیوند [illustris-project.org](http://illustris-project.org) قابل دسترس است و نویسندگان از گروه تحقیقاتی که این شبیه‌سازی را فراهم کرده‌اند، قدردانی می‌کنند.

غیر یکنواخت شدن توزیع پربندها است و در مرحله دوم ادغام پربندها در مقیاس فضایی بزرگ‌تر و تشکیل ساختارها است. این دو مرحله به خوبی توسط بُعد فراکتالی تعمیم‌یافته در  $q$  منفی نشان داده می‌شود. از آنجا که نمای بُعد فراکتالی تعمیم‌یافته برای  $q$  های منفی به شدت به انتقال به سرخ وابسته است، از این رو می‌تواند به عنوان معیاری حساس به منظور یافتن تمایز بین مدل‌های مختلف تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی، مورد توجه قرار گیرد.

به منظور تکمیل این تحقیق می‌توان مواردی همچون بررسی تحول بُعد فراکتالی تعمیم یافته در مدل‌های مختلف کیهان‌شناسی از جمله مدل‌های  $f(R)$ ، محاسبه سایر نماهای مقیاسی هندسی و وابستگی نتایج به ترازها را مطالعه کرد. با توجه به این که در این تحقیق مشخص شد که رفتار مقیاسی در

### مراجع

1. V J Martinez and E Saar, "Statistics of the galaxy distribution", CRC press (2001).
2. J Einasto and E Saar, "Superclusters of galaxies", in IAU Symposium, **124** (1987).
3. <https://www.euclid-ec.org/>
4. V Desjacques, J Donghui, and S Fabian, *Physics reports* **733** (2018) 1.
5. T Matsubara, *The Astrophysical Journal* **584**, 2,1 (2003) 33.
6. W Fang, B Li, and G B Zhao, *Physical review letters* **118**, 18 (2017) 181301.
7. <http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/index.php/>
8. R H Landau and J P Manuel "Computational physics: problem solving with computers". Wiley (2007).
9. Gouyet, Jean-François, "Physics and fractal structures", Paris/New York: Masson Springer, ISBN 978-0-387-94153-0 (1996).
۱۰. ب خاقانی. رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید، تهران.
11. Lorenzen, William and Harvey E. Cline. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. Computer Graphics (SIGGRAPH 87

17. R colistete , J C Fabris, S V B Goncalves and P E de Souza, *Int. J. Mod. Phys. D* 13 (2004) 669.
18. G Hinshaw, D Larson, E Komatsu, et al. *Astrophys. J. Suppl* (2013),, 208, 19.18. Jr.
19. A Banihashemi, N Khosravi, and A H Shirazi. *Physical Review D* 99, 8 (2019) 083509.
20. N Khosravi, et al. *Physical Review D* 99, 10 (2019): 103526.
21. I Eghdami, H Panahi, and S M S Movahed. *The Astrophysical Journal* 864, 2 (2018) 162.
12. <http://sina.sharif.edu/rahvar/statistics>
13. White, Simon DM. arXiv preprint astro-ph/9410043 (1994).
14. C M Baugh, E Gaztanaga, and G Efstathiou; *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 274 (1995) 1049.
15. Nelson, Dylan, et al; *Astronomy and Computing* 13 (2015) 12.
16. Springel, Volker. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 401, 2 (2010) 791.