

رهیافت برزین در تعیین عملگرهای نردبانی وابسته به حرکت ذره روی حلقه و کره

سودابه رضایی و اردشیر رابعی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه

پست الکترونیکی: rabeie@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۳/۰۳)

چکیده

صورت‌بندی کوانتومی یک سامانه فیزیکی اصولاً بر اساس عملگرهای خلق و نابودی انجام می‌شود. ما در این مقاله با استفاده از روش کوانتس برزین به تعیین این عملگرهای نردبانی برای ذره متحرک روی حلقه و کره دو بعدی می‌پردازیم. این روش کوانتس برگرفته از رابطه تفکیک واحد روی حالت‌های همدوس است. در واقع حالت‌های همدوس یک طرح کوانتس مستقیم از یک حالت کلاسیکی به همتای کوانتومی آن را فراهم می‌کنند. در این مقاله حالت‌های همدوس مربوط به سیستم‌های ذکر شده را از نقطه نظر تابع هسته گرمایی مورد بحث قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس، کوانتس برزین، عملگر خلق، عملگر نابودی

۱. مقدمه

ویژه ساده‌ترین موارد آن یعنی حرکت ذره کوانتومی روی حلقه و کره S^1 ، نیز رضایت‌بخش بوده باشد. به عنوان مثال، کوالسکی و رمبیلسکی با الهام از نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی، عملگر نابودی و حالت‌های همدوس مربوط به حرکت ذره کوانتومی روی حلقه، که ویژه بردار عملگر نابودی هستند، را تعیین کرده‌اند [۳]. حالت‌های همدوس وابسته به حرکت ذره روی کره S^2 نیز توسط رادکلیفت، گیلومر و پريلموف ارائه شده‌اند [۴]. مشخصه مهم این حالت‌ها این است که توسط نقاطی روی کره، فضای پیکربندی، برچسب‌گذاری می‌شوند. در مطالعه دیگر، کوالسکی و رمبیلسکی حالت‌های همدوس مربوط به ذره روی کره S^2 را، متناظر با نقاطی روی فضای فاز کلاسیکی

از نقطه نظر فیزیکی، حالت‌های همدوس به عنوان نزدیک‌ترین حالت‌های کوانتومی به همتای کلاسیکی خود شناخته می‌شوند. به طور کلی، این حالت‌ها از سه ویژگی اساسی پیوستگی، بهنجارش‌پذیری و برآورده کردن رابطه تفکیک واحد برخوردارند [۱ و ۲]. مشخصه سوم پل ارتباطی بین جهان مکانیک کلاسیک و جهان مکانیک کوانتومی را فراهم می‌کند. یکی از سیستم‌های کوانتومی که به صورت موفقیت‌آمیزی از منظر حالت‌های همدوس استاندارد مورد بررسی قرار گرفته است، نوسانگر هماهنگ ساده است. به نظر می‌رسد، نتایج تعمیم این مفهوم در توصیف حرکت دوره‌ای ذره کوانتومی، به

فضای فاز کلاسیکی وابسته یعنی $T^*(S^d)$ یا به صورت معادل کره مختلط S^d_C برچسب گذاری می‌شوند. ۲- ویژه بردار عملگر نابودی هستند، بنابراین از نوع حالت‌های همدوس پريلموف نیستند. ۳- بر حسب هسته گرمایی^۱، جواب معادله گرما، که تابعی تحلیلی روی کره است، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\rho^d_\tau(\vec{a}, \vec{x}) = \langle \delta_x | \psi_d^\tau(\vec{a}) \rangle, \vec{a} \in S^d_C, x \in S^d, \quad (2)$$

که $\langle \delta_x |$ و $|\psi_d^\tau(\vec{a})\rangle$ به ترتیب ویژه بردار بهنجارش ناپذیر و حالت‌های همدوس وابسته به کره مختلط d - بعدی هستند. سنجه مناسب روی کره مختلط نیز به صورت ضرب سنجه روی هسته گرمایی هذلولی وار d - بعدی در سنجه ناورد روی کره S^d در نظر گرفته می‌شود [۸].

ما در این کار، ابتدا به تعیین حالت‌های همدوس و عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت ذره روی حلقه بر اساس تحلیل کوالسکی و رمبیلنسکی و مختلط کننده تیمن [۹] و [۱۰] می‌پردازیم. سپس سعی می‌کنیم با استخراج حالت‌های همدوس روی حلقه از هسته گرمایی مربوطه و اعمال کوانتش برزین روی مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی مناسب، عملگرهای نابودی و خلق را در این مورد تعیین کرده و نتایج حاصل از این دو روش را با هم مقایسه کنیم. در پایان روش کوانتش برزین را در مورد حرکت ذره روی کره به کار می‌بریم و عملگرهای نابودی و خلق تعیین شده را با آنهایی که توسط کوالسکی و رمبیلنسکی تعیین شده‌اند، مقایسه می‌کنیم.

۲. تحلیلی بر کار کوالسکی و رمبیلنسکی در حرکت

ذره روی حلقه

کوالسکی و رمبیلنسکی با توجه به معادله ویژه مقداردار حالت‌های همدوس استاندارد و تعریف عملگر یکانی $\hat{U} = e^{i\hat{\phi}}$ به عنوان عملگر موقعیت و استفاده از لم بیکر هاسدورف در

مشخص کردند نه فضای پیکربندی [۵]. حالت‌های معرفی شده مشابه با روش باروت و جیراردلو [۶] ویژه بردار عملگر نابودی (عملگر غیر هرمیتی) هستند. همچنین علی‌رغم این که از بردار خالص ساخته می‌شوند اما توسط عمل غیر یکانی گروه تعیین می‌شوند (در تضاد با ساختار نظریه گروه پريلموف).

هدف ما در این مقاله، تعیین عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت ذره روی حلقه و کره با اعمال کوانتش روی فضای فاز وابسته است. می‌دانیم فریند کوانتش، گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی است، طوری که سیستم کوانتومی در حد $\hbar \rightarrow 0$ به سیستم کلاسیکی متناظر تبدیل شود. برای سیستم‌های کلاسیکی با فضای فاز تخت از نوع $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ، با مختصات q_i و p_i ، روش کوانتش استاندارد به کار می‌رود اما برای سیستم‌هایی با فضای فاز از نوع $\mathbb{R}^n \times S^n$ ، این روش کوانتش کارآمد نخواهد بود. کوانتش برزین یا کوانتش به روش حالت‌های همدوس، روشی مناسب برای توصیف کوانتومی سیستم‌هایی است که فضای فازشان صفحه نیست. در این روش کوانتش، به هر مشاهده پذیر کلاسیکی در فضای فاز، مثل تابع f ، یک مشاهده‌پذیر کوانتومی، مثل عملگر O_f ، به صورت زیر نسبت داده می‌شود [۷]:

$$O_f = \int_X f |\psi\rangle \langle \psi| d\mu(\psi), \quad (1)$$

که X معرف فضای فاز و $|\psi\rangle$ و $d\mu(\psi)$ به ترتیب حالت‌های همدوس و سنجه مناسب روی فضای فاز هستند. در واقع رابطه انتگرالی کوانتش برزین در (۱) از رابطه تفکیک واحد روی حالت‌های همدوس نشأت می‌گیرد.

به بیان دیگر، شرط لازم جهت اعمال کوانتش برزین در رابطه با سیستم‌های مورد بررسی در این مقاله، ارائه یک زیر فضای هیلبرت (حالت‌های همدوس) و سنجه مناسب روی فضای فاز کلاسیکی مربوط به سیستم‌هایی است که ما در تعیین آنها از مقاله هال و میتچل بهره می‌بریم [۸]. در مرجع مذکور، خانواده‌ای از حالت‌های همدوس و رابطه تفکیک واحد مربوط به آنها، برای سیستمی با فضای پیکربندی کلاسیکی از نوع فضای متقارن فشرده و به طور خاص کره d - بعدی معرفی شده است. مشخصه این حالت‌ها این است که ۱- توسط نقاطی روی

۱. هدف از حل معادله گرما، تعیین تابعی است که در فیزیک کوانتومی از آن با عنوان انتشارگر یاد می‌شود. این تابع به صورت پیچش هسته گرمایی و یک تابع پیوسته و کراندار است که هسته گرمایی برای گروه‌ها و رویه وابسته به آنها کاملاً تعریف شده است.

برای عملگرهای بوزونی خلق و نابودی و عملگر تعداد است با این تفاوت که $[Z', Z'^{\dagger}] = 0$. همچنین بین عملگر نابودی Z' و عملگر معرفی شده در رابطه (۲) می توان نوشت:

$$Z' = \hat{T} Z \hat{T}^{-1}, \quad (10)$$

که \hat{T} عملگر پاد یکانی وارونی زمانی است. از رابطه بالا واضح است که هر چیزی که در یک جهت زمانی خلق شود در جهت مخالف نابود می شود.

به راحتی می توان نشان داد که با این انتخاب جدید برای عملگر نابودی، حالت های همدوس باروت جیراردلو یعنی:

$$|l, \varphi\rangle = |\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ij(\varphi+il)} e^{-\frac{j}{r}} |j\rangle.$$

نقش ویژه بردار عملگر نابودی ایفا می کنند.

در اینجا نشان می دهیم که می توان مباحث بالا را بر اساس ارتباط عملگرهای خلق و نابودی با مختلط ساز تیمن ثابت کرد. مزیت روشی که ما اینجا ارائه می دهیم در این است که این روش قابل تعمیم به ابعاد بالاتر است.

مختلط کننده ابزاری ریاضی است که توسط تیمن معرفی شده است. این تابع به ما این امکان را می دهد که یک قطبش مختلط روی فضای فاز از فضای پیکربندی ایجاد کنیم.

تیمن در مقاله خود به هر تابع روی فضای فاز که برای آن $\{C, \cdot\}$ همگرا است، اجازه می دهد که مختلط کننده باشد طوری که C معرف تابع مختلط کننده است و به صورت نسبت انرژی جنبشی بر بسامد زاویه ای تعریف می شود [۹ و ۱۰].

بر این اساس اگر مختصات موضعی روی رویه دوتایی M (که در فیزیک می تواند فضای فاز باشد) را با x_k نشان دهیم مختصات مختلط شده از رابطه زیر به دست می آید:

$$z_k(m) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \{x_k, C\}_n(m), \quad (11)$$

که در اینجا از گروه پواسون با نمادگذاری زیر استفاده شده است:

$$m := (x_k, p_k), \{C, x_k\}_n = x_k, \{C, x_k\}_{n+1} = \{C, \{C, x_k\}_n\},$$

یک محاسبه صریح، عملگر نابودی را برای حرکت ذره روی حلقه به صورت زیر:

$$\hat{Z} = e^{i(\hat{\varphi}+i\hat{J})} = \hat{U} e^{-\frac{j}{r}}, \quad (3)$$

تعیین کرده اند [۳] که با اندکی محاسبه می توان آن را در نمایش فوک به صورت زیر نوشت:

$$Z|j\rangle = e^{-\frac{j}{r}} |j+1\rangle, \quad (4)$$

که $\{|j\rangle\}$ مجموعه ای از بردارهای متعامد هستند که رابطه بستاری را برآورده می کنند:

$$\sum_j |j\rangle \langle j| = \hat{I}, \quad (5)$$

همچنین آنها، حالت های همدوس مربوطه را به عنوان ویژه بردار عملگر نابودی، به صورت زیر:

$$|l, \varphi\rangle = |\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{lj-ij\varphi} e^{-\frac{j}{r}} |j\rangle, \quad (6)$$

و با رابطه تفکیک واحد

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^r}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-l'r} |l, \varphi\rangle \langle l, \varphi| = \hat{I}, \quad (7)$$

تعیین کردند که $\xi = e^{-l+i\varphi}$.

با نگاهی به رابطه (۴) واضح است که عملگر معرفی شده در مقاله کوالسکی و رمبیلسکی، مشابه با عملگر خلق عمل می کند نه عملگر نابودی. به راحتی می توان نشان داد که $Z' = e^{-i(\hat{\varphi}+i\hat{J})}$ گزینه مناسبی برای عملگر نابودی است طوری که:

$$\hat{Z}' = \sum_j e^{-\frac{j}{r}} |j-1\rangle \langle j|.$$

برای این انتخاب جدید می توان رابطه جبری به صورت زیر را تحقیق کرد:

$$[\hat{J}, \hat{Z}'] = -Z', \quad [\hat{J}, \hat{Z}'^{\dagger}] = Z'^{\dagger}, \quad (8)$$

که همتای جبر نوسانگر هماهنگ ساده به صورت

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}, \quad (9)$$

اثر عملگرهای نابودی و خلق روی کت پایه $|j\rangle$ به صورت زیر هستند:

$$Z'|j\rangle = e^{j-\frac{1}{r}}|j-1\rangle, \quad (17)$$

$$Z'^{\dagger}|j\rangle = e^{j+\frac{1}{r}}|j+1\rangle. \quad (18)$$

۳. تعیین حالت‌های همدوس و کوانتش برزین روی

حلقه

هدف ما در این بخش، کوانتش به روش برزین برای حرکت ذره کوانتومی روی حلقه S^1 با فضای فاز حلقه مختلط به صورت:

$$S^1_{\mathbb{C}} = \left\{ \bar{a} \in \mathbb{C}^r \mid \bar{a}(\bar{x}, \bar{p}) = \cosh p\bar{x} + i \frac{\sinh p}{p} \bar{p} \right\}, \\ = \left\{ \bar{a} = (a_1, a_r) = (\cos(\beta + ip), \sin(\beta + ip)) \right\}, \quad (19)$$

است. لازم به ذکر است که ما در این بخش، نمایش (β, m) که در مقاله هال و میتچل [۸] آمده است را دنبال می‌کنیم نه نمایش (φ, l) کوالسکی و رمیلنسکی.

ابزار مورد نیاز برای این منظور حالت‌های همدوس است. روشی که ما برای تعیین آنها پیش می‌گیریم بر اساس بیان هال و میتچل از حالت‌های همدوس برحسب هسته گرمایی طبق رابطه (۲) است.

این هسته گرمایی برای حلقه مختلط به صورت زیر است [۸]:

$$\rho'_{\tau}(\bar{a}, \bar{x}) = (\tau\pi)^{-r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\bar{\theta} - \tau\pi n)^2}{\tau}}, \quad (20)$$

که با اعمال قاعده جمع پواسون [۱۱] به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho'_{\tau}(\bar{a}, \bar{x}) = \frac{1}{\tau\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\bar{\theta}} e^{-\tau n^2}. \quad (21)$$

که $\bar{\theta} = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{x}}{r}\right)$ زاویه مختلط است. با انتخاب بردار بهنجار ناپذیر به صورت زیر:

$$\{z_k, \bar{z}_k\} = \{\bar{z}_k, z_k\} = 0.$$

تیمن همتای کوانتومی این نقطه از فضای فاز، یعنی

$$\hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n [X, \hat{C}]^n}{n!} = e^{-\frac{\hat{C}}{\hbar}} \hat{x} e^{\frac{\hat{C}}{\hbar}}, \quad (12)$$

را به عنوان عملگر نابودی معرفی می‌کند (\hat{C} همتای کوانتومی مختلط کننده تیمن است).

اکنون با توصیفی که از مختلط کننده تیمن ارائه شد، در موقعیتی هستیم که از این ابزار ارزشمند ریاضی در تعیین عملگرهای خلق و نابودی مربوط به حرکت ذره روی حلقه بهره ببریم. با انتخاب تابع مختلط کننده کوانتومی به صورت

$$\hat{C} = \frac{j^2}{r}$$

$$\hat{Z}'_l = e^{-\frac{j^2}{r}} \hat{x}_l e^{\frac{j^2}{r}}, \\ \hat{Z}'_r = e^{-\frac{j^2}{r}} \hat{x}_r e^{\frac{j^2}{r}},$$

که

$$\hat{x}_l = \frac{\hat{U} + \hat{U}^{\dagger}}{r}, \quad (13)$$

$$\hat{x}_r = \frac{\hat{U} - \hat{U}^{\dagger}}{ri}. \quad (14)$$

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد:

$$\hat{Z}'_l = \frac{1}{r} \left\{ \sum_j e^{-j-\frac{1}{r}} |j+1\rangle \langle j| + \sum_j e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle \langle j| \right\}, \quad (15)$$

$$\hat{Z}'_r = \frac{1}{ri} \left\{ \sum_j e^{-j-\frac{1}{r}} |j+1\rangle \langle j| - \sum_j e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle \langle j| \right\}. \quad (16)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۳) و (۱۴) مؤلفه‌های عملگر خلق نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{Z}'_l{}^{\dagger} = e^{\frac{j^2}{r}} \hat{x}_l e^{-\frac{j^2}{r}}, \\ \hat{Z}'_r{}^{\dagger} = e^{\frac{j^2}{r}} \hat{x}_r e^{-\frac{j^2}{r}}.$$

با انتخاب ترکیب مناسبی از مؤلفه‌های عملگر نابودی و خلق، به راحتی می‌توان نشان داد:

$$(\hat{Z}'_l - i\hat{Z}'_r) = e^{j-\frac{1}{r}} |j-1\rangle \langle j| = e^{-i(\hat{\varphi} + i\hat{J})} = \hat{Z}'_l,$$

$$(\hat{Z}'_l{}^{\dagger} + i\hat{Z}'_r{}^{\dagger}) = e^{j+\frac{1}{r}} |j+1\rangle \langle j| = e^{i(\hat{\varphi} - i\hat{J})} = \hat{Z}'_l{}^{\dagger}.$$

$$\hat{O}_{\bar{a}_i} = \hat{O}_{a_i} / \tau \rightarrow -\tau, \quad i=1,2. \quad (27)$$

به راحتی می توان روابط ویژه مقاداری زیر را در مورد این عملگرها ثابت کرد:

$$\hat{O}_{a_i} |\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle = a_i |\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle, \\ \langle \psi_i^\tau(\bar{a}) | \hat{O}_{\bar{a}_i} = \langle \psi_i^\tau(\bar{a}) | \bar{a}_i.$$

همچنین با انتخاب ترکیب مناسبی از مؤلفه های عملگرهای خلق و نابودی می توان نوشت:

$$\hat{O}_{e^{i(\beta+ip)}} = \hat{O}_{a_1} + i\hat{O}_{a_2} = \sum_m e^{\tau(m-\frac{1}{\tau})} |m-1\rangle \langle m|, \\ \hat{O}_{e^{-i(\beta-ip)}} = \hat{O}_{\bar{a}_1} - i\hat{O}_{\bar{a}_2} = \sum_m e^{\tau(m+\frac{1}{\tau})} |m+1\rangle \langle m|.$$

اثر این عملگرها روی کت پایه $|m'\rangle$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{O}_a |m'\rangle = e^{\tau(m'-\frac{1}{\tau})} |m'-1\rangle, \quad (28)$$

$$\hat{O}_{\bar{a}} |m'\rangle = e^{\tau(m'+\frac{1}{\tau})} |m'+1\rangle. \quad (29)$$

ملاحظه می شود که نتایج این بخش کاملاً منطبق بر نتایج بخش قبل است که از بحث مختلط کننده تینم به دست آمد.

۴. توصیف حرکت ذره روی کره S^2 با روش

کوانتش برزین

کوالسکی و رمیلنسکی در [۵] به بررسی حرکت ذره روی کره S^2 پرداخته اند. ما در این کار می خواهیم این کار را بر اساس روشی که در بخش ۳ پیش گرفتیم برای کره S^2 با مؤلفه های:

$$\bar{x} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

و فضای فاز $T^*(S^2)$ که با کره مختلط $S^2_{\mathbb{C}}$ با مؤلفه های زیر یکریخت است:

$$\bar{a} = \begin{cases} x_1 + i \frac{\sinh p}{p} p_1 = \sin \theta_a \cos \varphi_a, \\ x_2 + i \frac{\sinh p}{p} p_2 = \sin \theta_a \sin \varphi_a, \\ x_3 + i \frac{\sinh p}{p} p_3 = \cos \theta_a, \end{cases} \quad (30)$$

انجام دهیم.

$$|\delta_x\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\beta} |n\rangle, \quad (22)$$

و در نظر گرفتن رابطه (۲) به راحتی می توان حالت های همدوس را به صورت زیر از هسته گرمایی استخراج کرد:

$$|\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau n^2}{\tau}} e^{in(\beta+ip)} |n\rangle, \quad (23)$$

که

$$N_1 = \sum_n e^{-\tau n^2} e^{\tau np} < \infty,$$

این حالت ها رابطه تفکیک واحد را به صورت زیر برآورده می کنند:

$$\int_{\bar{x} \in S^2} \int_{\bar{x} \cdot \bar{p} = 0} |\psi_i^\tau(\bar{a})\rangle \langle \psi_i^\tau(\bar{a})| d\mu_1(\bar{a}) = \hat{I}_1, \quad (24)$$

که

$$d\mu_1(\bar{a}) = \left(\frac{N_1}{\tau \pi \sqrt{\pi \tau}}\right)^{\frac{1}{\tau}} e^{-\frac{p^2}{\tau}} dp d\beta,$$

واضح است که حالت های همدوس استخراج شده از هسته گرمایی با حالت های همدوس بر اساس روش باروت و جیراردلو در بخش قبل، کاملاً تطابق دارد.

می توان همتای کوانتومی دو مؤلفه بردار شعاع مختلط $\bar{a}(a_1, a_2)$ را با اعمال کوانتش برزین یعنی رابطه (۱) به صورت زیر تعیین کرد:

$$\hat{O}_{a_1} = O_{\cos(\beta+ip)} = \frac{1}{\tau} \left\{ \sum_m e^{\tau(m-\frac{1}{\tau})} |m-1\rangle \langle m| + \sum_m e^{-\tau(m+\frac{1}{\tau})} |m+1\rangle \langle m| \right\}, \quad (25)$$

$$\hat{O}_{a_2} = O_{\sin(\beta+ip)} = \frac{1}{\tau i} \left\{ \sum_m e^{\tau(m-\frac{1}{\tau})} |m-1\rangle \langle m| - \sum_m e^{-\tau(m+\frac{1}{\tau})} |m+1\rangle \langle m| \right\}, \quad (26)$$

به وضوح می توان تطابق این مؤلفه ها را به مؤلفه های عملگر نابودی، که در بخش قبلی به دست آمد، برای $\tau=1$ مشاهده کرد.

به طور مشابه می توان مؤلفه های عملگرهای خلق را به عنوان همتای کوانتومی مزدوج مؤلفه های بردار شعاع حلقه مختلط نیز به دست آورد که برای آنها رابطه زیر برقرار است:

$$\hat{O}_{a_i} = \frac{1}{r} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{l,m} e^{\tau l} [b_{11} |l-1, m+1\rangle \langle l, m| - b_{1r} |l-1, m-1\rangle \langle l, m|] \\ & + \sum_{l,m} e^{-\tau(l+1)} [b_{r1} |l+1, m-1\rangle \langle l, m| - b_{rr} |l+1, m+1\rangle \langle l, m|] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\hat{O}_{a_i} = \frac{i}{r} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{l,m} e^{\tau l} [-b_{11} |l-1, m+1\rangle \langle l, m| - b_{1r} |l-1, m-1\rangle \langle l, m|] \\ & + \sum_{l,m} e^{-\tau(l+1)} [b_{r1} |l+1, m-1\rangle \langle l, m| + b_{rr} |l+1, m+1\rangle \langle l, m|] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$O_{a_r} = \sum_{l,m} e^{\tau l} c_{11} |l-1, m\rangle \langle l, m| + e^{-\tau(l+1)} c_{rr} |l+1, m\rangle \langle l, m|, \quad (40)$$

که

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sqrt{\frac{(l-m-1)(l-m)}{(r l-1)(r l+1)}}, \\ b_{1r} &= \sqrt{\frac{(l+m-1)(l+m)}{(r l-1)(r l+1)}}, \\ b_{r1} &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+r)}{(r l+1)(r l+r)}}, \\ b_{rr} &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+r)}{(r l+1)(r l+r)}}. \end{aligned} \quad (41)$$

و

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(r l-1)(r l+1)}}, \\ c_{rr} &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(r l+1)(r l+r)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

با نگاهی به مؤلفه‌های عملگر نابودی برای حرکت ذره روی کره، که توسط کوالسکی و رمیلنسکی در مرجع [۵] به دست آمده، می‌توان مشاهده کرد که آنها با مؤلفه‌های عملگر نابودی به دست آمده با روش ما برای $\tau=1$ منطبق است.

با تکرار محاسبات، به راحتی می‌توان عملگرهای خلق را نیز برای حرکت ذره روی کره دو بعدی به دست آورد که برای آنها خواهیم داشت:

$$\hat{O}_{\bar{a}_i} = \hat{O}_{a_i} |_{\tau \rightarrow -\tau}, \quad i=1,2,3.$$

همچنین می‌توان روابط ویژه مقدری زیر را برای این عملگرها نیز تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} \hat{O}_{a_i} |\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle &= a_i |\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle, \\ \langle \psi_r^\tau(\bar{a}) | \hat{O}_{\bar{a}_i} &= \langle \psi_r^\tau(\bar{a}) | \bar{a}_i, \quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

۵. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله حالت‌های همدوس مورد نیاز برای ذره متحرک

هسته گرمایی روی $S^2_{\mathbb{C}}$ به صورت زیر است [۸]:

$$\rho_r^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = (r\pi\tau)^{-1} e^{\frac{\tau}{r}} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\varphi - r\pi n) e^{-\frac{(\varphi - r\pi n)^2}{r\tau}} d\theta. \quad (31)$$

با به کار بردن قاعده جمع پواسون می‌توان هسته گرمایی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_r^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = \frac{1}{r\sqrt{r}\pi^r} \sum_{n=0}^{\infty} (rn+1) e^{-\frac{\tau n(n+1)}{r}} \int_0^\pi \frac{\sin\varphi(n+\frac{1}{r})}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} d\varphi. \quad (32)$$

با استفاده از روابط مربوط به چند جمله‌ای های لژاندر و ارتباط آنها با هماهنگ‌های کروی می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_r^\tau(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\frac{\tau n(n+1)}{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta_a, \varphi_a), \quad (33)$$

با انتخاب بردار صوری (بهنجار نشده) زیر

$$|\delta_x\rangle = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) |l, m\rangle, \quad (34)$$

می‌توان حالت‌های همدوس برای یک ذره متحرک روی کره را به صورت زیر به دست آورد:

$$|\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_r}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\frac{\tau l(l+1)}{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (35)$$

این حالت‌های همدوس رابطه تفکیک واحد زیر را برآورده می‌کنند:

$$\int_{\bar{x} \in S^r} \int_{\bar{y} \in S^r} |\psi_r^\tau(\bar{a})\rangle \langle \psi_r^\tau(\bar{a})| d\mu_r(\bar{a}) = \hat{I}_r, \quad (36)$$

که

$$d\mu_r(\bar{a}) = \frac{e^{-\frac{\tau}{r}}}{r\pi\sqrt{(r\pi\tau)^r}} \int_{r p}^{\infty} \frac{se^{-\frac{s}{r\tau}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh r p}} ds \frac{\sinh r p}{r p} dx d\bar{p}. \quad (37)$$

با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که این حالت‌ها کاملاً بر حالت‌های همدوس که توسط کوالسکی و رمیلنسکی برای حرکت ذره روی کره در [۵] به دست آمده، تطابق دارد.

با اعمال کوانتش برزین، روی مؤلفه‌های بردار \bar{a} می‌توان همتهای کوانتومی آنها را به صورت زیر به دست آورد:

بین نتایج ما و کارهای کوالسکی-رمیلنسکی برای $\tau=1$ حاصل شد. با توجه به این که می توان روش مبتنی بر کوانتس برزین را به ابعاد بالاتر تعمیم داد این روش را می توان برای فضاهای فاز متقارن غیر از کره نیز به کار برد.

روی حلقه و کره S^2 را بر اساس هسته گرمایی ارائه شده توسط هال و میتچل معرفی کردیم. همچنین مؤلفه های عملگرهای خلق و نابودی برای حرکت یک ذره کوانتومی روی حلقه بر اساس مختلط ساز تیمن را بررسی کردیم که کاملاً بر کار کوالسکی و رمیلنسکی منطبق شد. نهایتاً به روش کوانتس برزین عملگرهای خلق و نابودی را برای حرکت ذره روی حلقه و کره S^2 دنبال کردیم که خوشبختانه تطابق خیلی خوبی

مراجع

1. R J Glauber, *Phys. Rev.* **131**(1963) 2766.
2. J P Gazeau , “*Coherent states in quantum physics*”, Wiley-VCH, Berlin (2009).
3. K Kowalski, J Remielinski, and L C Papaloucas, *J. Phys.A: Math.Gen* **29** (1996) 4149.
4. A Perelomov, “*Generalized coherent states and their application*”, Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, Newyork, London, Parise, Tokyo (1986).
5. K Kowalski and J Remielinski, *J. Phys. A : Math. Gen.* **33** (2000) 6035.
6. A O Barut, “*Dynamic group and generalized symmetries in quantum theory*” University of Canterbury, Christchurch (1971).
7. E A Berezin, *Common. Math. Phy.* **40** (1975) 153.
8. B Hall and J J Mitchell, *J. Math. Phys.* **43** (2002).
9. T Thiemann, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 2063.
10. T Thiemann, “*Modern canonical quantum general relativity*”, Cambridge University Press, (2007).
11. B I S Gradshteyn and I M Ryshik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Fizmatgiz, Moscow. Lett. A (1994).